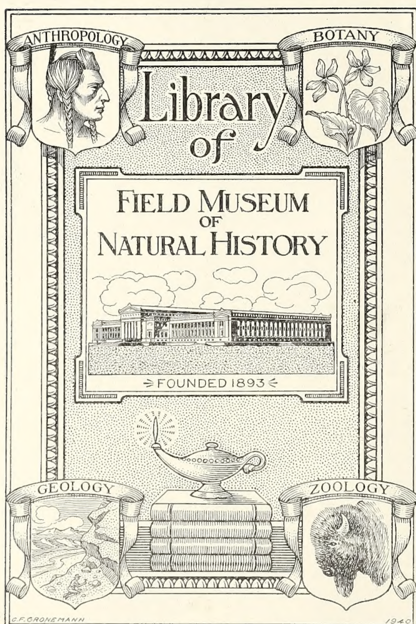

THE FIELD MUSEUM LIBRARY
3 5711 00073 7479


ANTHROPOLOGY
BOTANY
Library of
FIELD MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY
FOUNDED 1893
GEOLOGY
ZOOLOGY
C.F. GRONEMANN
1940

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 27 JANUARI 1923 TOT EN MET 29 DECEMBER 1923

DEEL XXXII

UITGAVE DER
KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM
1923

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 27 JANUARI 1923 TOT EN MET 26 MEI 1923

DEEL XXXII
(1STE GEDEELTE)

UITGAVE DER
KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM
1923

INHOUD.





KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 27 JANUARI 1923.

DEEL XXXII.

N°. 1.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

De Voorzitter verwelkomt Prof. JEAN PERRIN, hoogleeraar aan de Sorbonne te Parijs, die als gast de vergadering bijwoont.

Ingekomen zijn:

1°. eene missive van SIR NAPIER SHAW dd. 23 Januari j.l. meldende, dat hij persoonlijk in de vergadering der Afdeeling van 26 Mei e.k. de hem toegekende BUYS BALLOT-medaille in ontvangst hoopt te komen nemen.

2°. een schrijven van Mevrouw de Wed. FÜRBRINGER uit Heidelberg dd. 26 Dec. 1922, waarin zij dank zegt voor den financieelen steun der Akademie, die het mogelijk maakte het posthume werk van wijlen haren echtgenoot uit te geven.

3°. een schrijven van den Heer J. VOÛTE te Weltevreden dd. 9 December 1922, houdende dankzegging voor zijne benoeming tot correspondent der Afdeeling.

4°. een schrijven van de „Académie de Médicine" te Parijs dd. December j.l., waarbij de Akademie wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen op de bijeenkomst te houden 23 Januari 1923 ter herinnering aan het eeuwfeest van JENNER's geboorte. Hierop is bereids geantwoord, dat geen der leden van de Akademie in de gelegenheid zal zijn aan de uitnoodiging gevolg te geven.

5°. een schrijven van het Nederlandsch Radio Genootschap te Utrecht dd. 9 Januari j.l., waarin wordt kennis gegeven, dat het Genootschap is toegetreden als lid van de „Union radiotélégraphique scientifique internationale". Voor kennisgeving aangenomen.

6°. eene missive van de Commissie voor het BAKHUIS ROOZEBOOM-fonds dd. 4 Januari j.l. houdende mededeeling, dat dit jaar weder uitreiking der BAKHUIS ROOZEBOOM-medaille zal plaats hebben. In verband hiermede worden door den Voorzitter de Heeren SCHREINEMAKERS, COHEN en JAEGER uitgenoodigd in de commissie van advies zitting te nemen. De Heer JAEGER, ter vergadering aanwezig, verklaart zich daartoe bereid.

Aan de Heeren SCHREINEMAKERS en COHEN zal van hunne benoeming kennis gegeven worden.

7°. eene apostille van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 19 Januari j.l. N°. 353 Afd. K.W. waarbij ter kennisneming, met verzoek om terugzending, wordt aangeboden eene missive van den Minister van Buitenlandsche Zaken dd. 15 Januari j.l. N°. 351, ter begeleiding van den aan het „Journal Officiel" van 30 December 1922 ontleenden tekst der Fransche wet, houdende oprichting van een „Office national des recherches scientifiques et industrielles et des inventions". Besloten wordt afschrift van dezen tekst te zenden aan de Wetenschappelijke Adviescommissie.

Voorts deelt de Voorzitter mede, dat is ingekomen een schrijven van „The Public Library" te Sydney dd. 8 December 1922, waarin toezending wordt verzocht van de geschriften, welke door de I.C.O.-Commissie worden uitgegeven.

Aan dit verzoek is voldaan.

De Voorzitter brengt verder ter kennis der Vergadering, dat alsnog als lid der I.C.O. Commissie is toegetreden de Heer Dr. J. KUYPER te Pasoeroean.

Aan den Minister zal voorts mededeeling worden gedaan dat de Heer P. VAN ROMBURGH (en misschien ook de Heer G. A. F. MOLENGRAAFF) de 2de vergadering van de *„Panpacific scientific Union"*, dezen zomer te Sydney te houden, zullen bijwonen.

Verder is nog ingekomen een bericht van het overlijden op 8 Januari j.l. van het rustend lid der Afdeeling, den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Aan de familie van den overledene is een brief van rouwbeklag gezonden.

Naar aanleiding van dit overlijden zegt de Voorzitter het volgende:

Donderdag 11 Januari hebben wij een man ten grave gedragen, die gedurende meer dan 50 jaren deel heeft uitgemaakt van deze Akademie en daarvan gedurende 22 jaren de Wis- en Natuurkundige Afdeeling heeft geleid.

HENDRICUS GERARDUS VAN DE SANDE BAKHUYZEN

toch werd in Mei 1872 tot lid van onze Afdeeling gekozen en was van Maart 1888 tot 1910 Voorzitter, eerst tot 1896 met VAN DER WAALS als ondervoorzitter en OUDEMANS als secretaris, daarna van 1896—1902 met STOKVIS als ondervoorzitter en VAN DER WAALS als secretaris, terwijl van 1902—1910 dezelfde secretaris bleef functioneeren, maar KORTEWEG als ondervoorzitter optrad.

BAKHUYZEN heeft jaren lang het wetenschappelijke leven in onze Afdeeling beheerscht, er den stempel van zijn persoonlijkheid op gedrukt. Verschillende belangrijke zaken zijn in dien tijd tot stand gekomen. Ik denk aan het Herseninstituut, aan het initiatief, dat de Afdeeling op zijn instignatie nam, om te komen tot de uitgave van de werken van CHRISTIAAN HUYGENS, welk initiatief er toe leidde, dat deze zoo gewichtige uitgave door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen werd aangevat en voor een groot deel tot een goed einde werd gebracht. Ik denk vooral aan de hervorming, die de oude Verslagen en Mededeelingen ondergingen, toen zij op voorstel van VAN DER WAALS verjongd werden tot het tegenwoordige Zittingsverslag, dat een zoo belangrijke rol is gaan spelen in het wetenschappelijke leven van ons vaderland.

Met enkele woorden wensch ik het leven te gedenken van den man, die voor onze Afdeeling van zoo groote beteekenis is geweest. Daarbij zal het niet mogelijk zijn, iets anders te doen dan aanstippen van de belangrijkste zaken uit dit in vele opzichten zoo rijke bestaan.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN werd 2 April 1838 te 's-Gravenhage geboren; daar doorliep hij de lagere school en het Gymnasium, om in 1855 te Delft en 4 jaar later te Leiden student te worden; daar werden VERDAM, RYKE en vooral KAISER zijn leermeesters. Hier promoveerde hij 21 April 1863 op een proefschrift: „over den invloed der buiging op de hoogten van hemellichten met den meridiaancirkel bepaald". De nieuwe Leidsche sterrewacht had gebrek aan personeel, maar verschillende volontairs hielpen KAISER belangeloos. Daaronder BAKHUYZEN, dien KAISER achtte: „als voor de sterrekunde te zijn geboren". Hij vond dan ook, dat het „een groot onheil voor de sterrekunde van ons vaderland" was, dat BAKHUYZEN een jaar later, in het einde van 1864, een betrekking aanvaardde als leeraar aan het gymnasium te 's-Gravenhage, twee jaar later als leeraar aan de H. B. S. te Utrecht.

Reeds in 1867 werd hij geroepen den leerstoel voor toegepaste natuurkunde te bezetten aan de Polytechnische School te Delft. Vijf jaren later volgde hij zijn leermeester te Leiden op, zoodat het „onheil" was hersteld. 20 December 1872 hield hij zijn oratie over „de methode welke thans bij de beoefening der sterrekunde moet gevolgd worden". Nog pas een groote maand geleden mocht hij het feit herdenken, dat die dag 50 jaar achter hem lag en ook onze Afdeeling heeft hem toen een gelukwensch gezonden, schriftelijk, omdat persoonlijk bezoek slechts van een zeer enkel goed vriend bij den staat van zijn gezondheid gewenscht was.

Het is hier de plaats niet, de verdiensten van BAKHUYZEN voor ons Hooger Onderwijs in het algemeen en voor de Leidsche sterrewacht in het bizonder te gedenken. Daarom moge volstaan worden met de vermelding, dat BAKHUYZEN in zekeren zin de vertegenwoordiger was van de ouderwetsche sterrekunde; hij, van wien eens gezegd werd, dat hij in hooge mate gevoelig was voor de poëzie der laatste decimaal, begreep zeer goed in welke richting zijn gaven lagen. In het bizonder heeft hij zich gegeven aan het opsporen van foutenbronnen, zoowel van de instrumenten als

van de waarnemers. Zoo is het dan ook niet te verwonderen, dat de waarnemingen aan de Leidsche sterrewacht verricht, tot de allerbeste behooren, die men kent, dat deze instelling in het laatste gedeelte van de vorige eeuw vooraan stond in de rij der instellingen, waar de fundamenteele astronomie beoefend werd. Het gevolg van die uiterste nauwgezetheid was echter ook, dat er zeer lang gewacht werd, totdat tot publiceeren werd overgegaan. Zoo bleef BAKHUYZEN's belangrijkste werk, de plaatsbepaling van 84 sterren nabij de Noordpool, lang onuitgegeven liggen en pas kort geleden, bij zijn gouden feest, konden hem de eerste afgedrukte vellen ter hand worden gesteld.

Onder het verdere werk, door BAKHUYZEN verricht, noem ik zijn waarnemingen over straalbreking, over de uitmeting van de fotografische hemelkaarten, over de aswenteling van de planeet Mars, over den overgang van Venus voorbij de zon in de jaren 1874 en 1882, over eb en vloed en, in verband met de waterstanden, over de vraag naar de event. daling van den bodem van Nederland.

Zoo langzamerhand ben ik bij de vermelding van het werk van ons overleden medelid gekomen tot hetgeen hij buiten de eigenlijke astronomie gedaan heeft. Daar was hij op verschillend terrein gezaghebbend. Ik denk in de eerste plaats aan de geodesie. Sedert 1874 was hij lid van de Rijkscommissie voor graadmeting en waterpassing, daarna secretaris en later jarenlang voorzitter van deze belangrijke commissie. Zoo werd hij ook op meer internationaal gebied „sécrétaire perpetuel" van de internationale commissie voor aardmeting. Zijn samenvattende bewerking van vele waarnemingsreeksen op dit gebied was *de* bron bij de meerderheid der lengtebepalingen van Europeesche sterrewachten.

In het algemeen heeft VAN DE SANDE BAKHUYZEN zich veel op internationaal gebied bewogen. Hij was diep doordrongen van de noodzakelijkheid van samenwerking der verschillende landen op wetenschappelijk gebied. Nog tot het laatst van zijn leven heeft hij daarvoor gestreden, toen het ging over de zelfstandigheid van de geodesie in den nieuwen „Conseil international des recherches", die de

plaats gaat innemen van de Internationale Associatie der Akademies, waar Bakhuyzen onze Akademie zoo dikwijls vertegenwoordigd heeft.

De voornaamste buitenlandsche astronomen en geodeten waren zijn vrienden, of hij kende ze persoonlijk, en nog in het afgeloopen jaar bleek op de bijeenkomsten te Rome en te Brussel, dat zelfs bij zijn afwezigheid zijn schaduw zich als het ware deed gevoelen.

Vroeger ging er wel nauwelijks een vergadering van onze Afdeeling voorbij, waarbij Bakhuyzen afwezig was; alleen in de laatste jaren werden zijn bezoeken al zeldzamer, zoodat de jongsten van onze leden wellicht niet meer zoo onder den indruk zijn gekomen van deze markante persoonlijkheid als wij ouderen. Hij maakte zeker op ieder den indruk van een heerschersnatuur, getemperd door een zachtheid, die degeen, die nader met hem in aanraking kwam, leerde waardeeren. Wie herinnert zich niet die scherpe, min of meer onregelmatige trekken, die merkwaardige voordracht, waarbij de woorden eenigszins stootend werden te voorschijn gebracht? De laatste maal, dat wij Bakhuyzen hier hoorden, gold het een lievelingsonderwerp van hem, de standaardmeter, die zijn bizondere belangstelling had, een belangstelling, die hij min of meer als erfgenaam van Bosscha had overgenomen.

Bakhuyzen was jaren lang een centrale figuur in de wetenschappelijke wereld van Nederland en ook daarbuiten. Onderscheidingen zijn hem dan ook vele ten deel gevallen. Maar wanneer deze vergeten zijn, zal zijn naam blijven voortleven in de geschiedenis der Nederlandsche wetenschap en in het bizonder zal hij in dankbare herinnering worden gehouden in de annalen van onze Akademie van Wetenschappen!

Scheikunde. — H. R. KRUYT en W. A. N. EGGINK: *„Het electroviskeus effect bij het rubbersol."*

1. Onderzoekingen aan het agarsol [1]) hebben geleerd, dat het verband [2]) tusschen de lading van gedispergeerde deeltjes en de viscositeit van het disperse systeem zich duidelijk manifesteert bij die solen, waar men de lading belangrijk wijzigen kan, zonder dat het kolloide systeem als zoodanig te gronde gaat, d. i. bij die systemen, wier stabiliteit niet slechts van hun lading afhangt, maar waarbij ook hydratatie (algemeener: solvatatie) het systeem beschermt. De opvattingen omtrent de stabiliteit van het lyophile sol laten zich toepassen over het geheele terrein der emulsoiden [3]), althans wanneer water dispersiemilieu is. Nu trok echter onze aandacht een bemerking op pg. 570 van O. DE VRIES' Estate Rubber [4]), waar medegedeeld wordt, dat verhooging resp. verlaging der viscositeit van een benzolische rubberoplossing bewerkt wordt door deze met enkele druppels eener oplossing van alkali resp. van zuur of zout te schudden.

Aangezien het lijkt of men hier met een electroviskeus effect te doen heeft, hebben wij nagegaan, welken invloed electrolyten op de viscositeit van oplossingen van rubber in benzol hebben.

2. Gewerkt werd met aldus bereide solen: 1 gr. eener bepaalde crèpe-rubber werd met 300 ccm. benzol bedeeld, na 24 uur staan voorzichtig omgeschud en het sol door een vouwfilter geschonken. Voorts werden benzolische electrolytoplossingen gemaakt; de viscosimetrisch te onderzoeken vloeistoffen werden bereid door een volume sol met een volume electrolyt oplossing (resp. een volume benzol, voor de nulproef) te mengen; of, voor wat betreft de meting der rubberlooze vloeistoffen, door electrolytoplossingen te verdunnen met benzol, zooals ze zoojuist met sol verdund waren. Aan het begin en het einde van elke serie werd het electrolytvrije mengsel ge-

---

[1]) H. R. KRUYT en H. G. DE JONG, Z. physik. Chem. **100**, 250 (1922).

[2]) M. VON SMOLUCHOWSKI, Koll. Z. **18**, 190 (1918). Wij verkiezen het woord electro viskeus boven quasi-viskeus, dat v. SMOLUCHOWSKI gebruikt, maar dat aanleiding tot misverstand geven kan.

[3]) H. R. KRUYT, Koll. Z. **31**, 338 (1922).

[4]) Batavia 1920.

meten en, bij optredend verschil, een correctie aan de tusschenliggende waarden aangebracht. De metingen zijn verricht in den viscosimeter van OSTWALD [1]) en bij 25°.

In de hier volgende tabellen zijn de aangegeven concentraties eindconcentraties, de viscositeit van benzol is 1.000 gesteld, η_e is de viscositeit eener electrolytoplossing, η_{s+e} die van een rubbersol met gelijke electrolytconcentratie. Onder $\frac{\eta_{s+e}}{\eta_e}$ is de verhouding dezer grootheden aangegeven, nadat de vermelde correctie voor de tijdreactie is aangebracht.

TABEL I.

Invloed van benzoëzuur op de viscositeit van rubbersolen.

Conc. Benzoëz. mMol p. L.	Viscositeit benzol + benzoëz. η_e	Viscositeit rubber + benzoëz. η_{s+e}	$\frac{\eta_{s+e}}{\eta_e}$ gecorrigeerd
0	1.000	1.698	1.698
6	— [2])	1.635	1.633
12	— [2])	1.601	1.598
24	— [2])	1.584	1.577
48	1.010	1.565	1.552
96	1.018	1.559	1.533
192	1.036	1.574	1.522
0	1.000	1.695	1.698

In fig. 1 zijn deze uitkomsten grafisch weergegeven. Geheel overkomstige bepalingen zijn uitgevoerd met azijnzuur, zoutzuur, zwaveligzuur, zwavelwaterstof en kwikchloride. De uitkomsten zijn principieel dezelfde, de viscositeitsverlagende werking is alleen verschillend en wel het sterkst voor zoutzuur, waarbij reeds $1\frac{1}{4}$ mMol per Liter de viscositeit van 1,573 tot 1,486 verlaagt.

Merkwaardig gedraagt zich ammoniak; in tabel II zijn de uitkomsten weergegeven.

[1]) Met inachtneming van alle voorzorgen overeenkomstig H. G. BUNGENBERG DE JONG, Rec. Trav. chim. Pays Bas 43, 1 (1923).

[2]) Geinterpoleerd tusschen de waarden voor 0 en 48 mMol per L.

De viscositeit der NH_3-benzolmengsels (η_e) verschilde niet merkbaar van die van benzol.

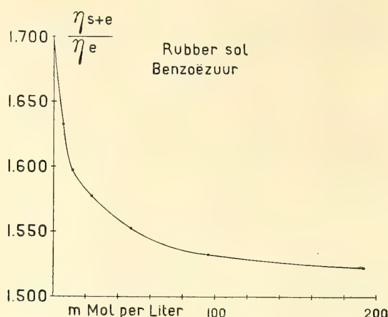


Fig. 1.

TABEL II.
Invloed van ammoniak op de viscositeit van rubbersolen.

Conc. ammoniak mMol p. L.	Viscositeit rubber + NH_3 η_{s+e}	$\frac{\eta_{s+e}}{\eta_e}$ gecorrigeerd
0	1.608	1.608
0.37	1.616	1.616
0.75	1.622	1.621
1.49	1.625	1.624
2.98	1.622	1.620
5.96	1.620	1.618
11.92	1.620	1.618
23.85	1.621	1.618
0	1.611	1.608

Men ziet hieruit, dat de viscositeit der solen stijgt door toevoeging van ammoniak, een maximum bereikt en vervolgens daalt.

3. De groote verandering der viscositeit door een toegevoegde stof in zoo kleine concentratie als bij de zuren het geval is maakt zeker den indruk van een electroviskeus effect.

In fig. 2 hebben wij onze uitkomsten in beeld gebracht voor alle onderzochte electrolyten, doch slechts voor concentraties beneden

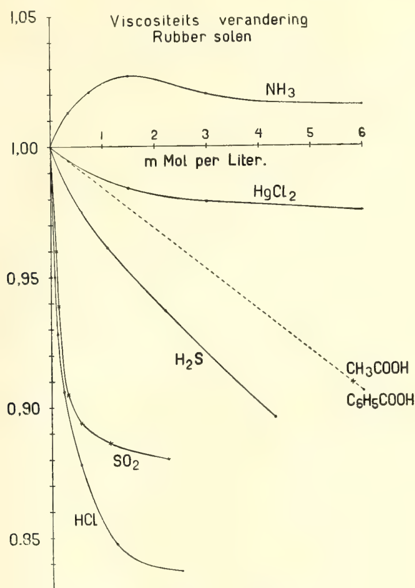


Fig. 2.

6 mMol per Liter. De relatieve viscositeit van het electrolytvrije sol hebben wij telkens als eenheid genomen en dan als ordinaten de verhouding $\frac{\eta_{s+e}-1}{\eta_s-1}$ uitgezet.

In frappante overeenstemming met deze verklaring is het gedrag van NH_3: het is immers bij alle onderzoekingen over capillair-electrische verschijnselen gebleken, dat alkalische stoffen een negatief geladen wand een hoogere potentiaal verleenen, om bij verdere toevoeging deze weer te doen dalen[1]). In overeenstemming hiermede bevestigden onderzoekingen in dit laboratorium van den Heer Lier

[1]) Zie b.v. G. von Elissaffof, Z. physik. Chem. **79**, 385 (1912); R. Ellis, Z. physik. Chem. **80**, 597 (1912); H. R. Kruyt en A. E. van Arkel, Koll. Z. **32**, 29 (1923).

het optreden eener stijgende electro-viscositeit door hydroxyl-ionen bij caseïne, die van Dr. BUNGENBERG DE JONG hetzelfde bij amylum [1]). Juist dit positieve effect is dus een krachtig argument voor onze zienswijze.

4. Er rijzen intusschen twee bedenkingen. De eerste is: is NH_3, en evenzeer is SO_2 in benzol een electrolyt? Voor de vorming van een OH-ion uit NH_4OH, resp. een H-ion uit H_2SO_3 is de aanwezigheid van water vereischte. Berekent men echter, hoeveel water noodig is bij de zeer kleine concentraties, waarom het hier gaat, dan vindt men waarden, die slechts een klein deel der oplosbaarheid van water in benzol zijn, een hoeveelheid, die in benzol, dat niet onder bizondere voorzorgen gedroogd is, zeker steeds aanwezig is.

Een tweede bedenking zou de vraag kunnen leveren, of de electrolyten in benzol wel voldoende gedissocieerd zijn om deze verschijnselen op haar rekening te stellen. De onderzoekingen van WALDEN [2]) kunnen ons echter in dit opzicht gerust stellen. Gelijke dissociatie in twee oplosmiddelen wordt bereikt bij verdunningen, die zich verhouden als de derde machten der dielectriciteitsconstanten, d.i. voor de verhouding benzol-water $4,7 \times 10^4$. De volgorde der sterkten is dus in twee oplosmiddelen dezelfde. Berekent men nu volgens WALDEN de α voor HCl in benzol, conc. 1 mMol per Liter, rekening ermede houdend, dat de constante uit de verdunningswet van OSTWALD verandert evenredig aan de concentratie der ongedissocieerde moleculen, dan vindt men $\alpha = 0,32$. Hier is dus nog een belangrijke splitsing. Bij een zwak zuur als benzoëzuur wordt de dissociatie door benzol wel sterker verlaagd ten opzichte van die in water, maar ze is toch in de concentraties, die hier in 't spel zijn, niet minder dan 1/200 van die in water.

Er is intusschen een markant verschil tusschen de electroviskeuse verschijnsels in water en die in benzol. Terwijl in water de curven voor kationen van gelijke valentie samenvallen, is dat voor onze curven hier, hoewel ze alle het H-ion als ontladend ion hebben ($HgCl_2$ uitgezonderd), niet het geval. Men krijgt den indruk, dat de werkelijke H-ionen concentratie hier een rol speelt: de anorganische zuren toch ontladen in de volgorde hunner sterkte. De twee organische zuren zijn wel sterker dan H_2S, maar organische anionen werken door hun grootere adsorbeerbaarheid de ontlading altijd

[1]) Nog ongepubliceerd; zie intusschen voor caseïne W. PAULI, Kolloidchemie der Eiweisskörper, 81 e.v. (Dresden-Leipzig 1920) en voor amylum M. SAMEC, Koll. Beih. **4**, 132 (1913), **5**, 141 (1914) enz.

[2]) P. WALDEN, Z. physik. Chem. **24**, 363 (1920).

tegen, het aromatische ion sterker dan het aliphatische, daardoor de meerdere sterkte compenseerend. Het uiterst zwak geioniseerde $HgCl_2$ heeft in aansluiting hiermede de geringste ontladende kracht.

5. Wij willen tenslotte op een consequentie wijzen van het geconstateerde electroviskeus karakter van een deel der viscositeit bij het rubbersol. Men heeft vaak getracht de kwaliteit van verschillende rubbermonsters te vergelijken door de viscositeit van gelijkgeconcentreerde benzolische oplossingen te meten. De keuze dezer vergelijkingseigenschap is niet onlogisch, daar men de viscositeit in eerste instantie als een maat voor de solvatatie kan beschouwen en deze als een echte kolloide karakteristiek in aanmerking nemen. De ervaring leert nu inderdaad, dat er een zekere correlatie bestaat tusschen de viscositeit van het sol en de mechanische eigenschappen, die de kwaliteit beheerschen; meer dan een vage correlatie is het echter niet. Nu is het echter hierboven gebleken, dat een deel der viscositeit *niet* met de solvatatie samenhangt, maar van electrischen oorsprong is en dus een volmaakt toevallig karakter heeft, afhankelijk van oplosbare electrolytbestanddeelen, die de rubber vergezellen en die op de mechanische eigenschappen in deze minieme concentraties zonder invloed zijn. Wil men dus een funktioneel verband opsporen tusschen viscositeit en kwaliteitseigenschappen der rubber, dan zal men te voren steeds door bewuste electrolyttoevoeging het electroviskeus effect moeten wegnemen.

Van het standpunt der zuivere kolloidchemie achten wij de wetenschap dezer electroviskeuze verschijnselen van belang, omdat zij ons een toegang geven tot de bestudeering der electrische verhoudingen bij niet-waterige solen.

Utrecht, VAN 'T HOFF-laboratorium 1922.

Scheikunde. — H. L. BUNGENBERG DE JONG: „*Over de inwerking van salpeterzuur op de methylamiden van parasulfobenzoëzuur.*"

(Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en H. R. KRUYT).

Dit onderzoek werd ondernomen deels om de nitratie-produkten van de o., m. en p. methylsulfamidobenzoëzuren te vergelijken, deels om tot verbindingen te komen, waarvan met zekerheid te zeggen is, of de methylamidogroepen in de COOH-, dan wel in de SO_3H-groep treden.

Om te trachten de methylsulfamiden te verkrijgen zijn de volgende wegen ingeslagen:

I. Oxydatie der derivaten van p. toluolsulfamide.

II. Methyleering en verdere bewerking van p. sulfamidobenzoëzuur.

III. Oxydatie van p. toluolsulfochloride en vervolgens inwerking van methylamine.

I. De oxydatie van het p. monomethylsulfamidotoluol, dat verkregen werd volgens voorschrift van VAN ROMBURGH werd uitgevoerd:

a. door de stof in eene oplossing van natriumhydroxyde (1 mol.) bij 35° te oxydeeren met kaliumpermanganaat. Hierbij ontstond echter slechts p. toluolsulfamide.

b. door oxydatie met chroomtrioxyde en ijsazijn of kaliumbichromaat en zwavelzuur, waarbij evenwel alleen p. sulfamidobenzoëzuur werd gevormd.

Mogelijk ware het, dat na bescherming der methylgroep door een nitrogroep de oxydatie zou gelukken. Het reeds door VAN ROMBURGH (Akad. Versl. 22 Februari 1902), verkregen o. nitrotoluolmethylsulfnitramide gaf door behandeling met chroomtrioxyde en ijsazijn bij kookhitte, voor een klein gedeelte afbraak, grootendeels de uitgangsstof terug.

II. Methyleering van p. sulfamidobenzoëzuur met berekende hoeveelheid dimethylsulfaat gaf *niet* het mono-, doch het dimethylsulfamidobenzoëzuur. Nitratie van deze laatste stof gaf producten oplosbaar in water en niet de gewenschte stof.

III. REMSEN vond, dat bij oxydatie van p. toluolsulfochloride met kaliumbichromaat en geconcentreerd zwavelzuur p. sulfobenzoëzuur gevormd werd. Om de verzeeping van de SO_2Cl-groep bij oxydatie van voornoemde stof te vermijden, werd door mij gewerkt in een mengsel van azijnzuur en azijnzuuranhydride. Zoo verkreeg ik het p. benzoëzuursulfochloride, dat door behandeling met methylamine in monomethylsulfamidobenzoëzuur overgaat. Nitratie van deze verbinding geeft het nitramide.

Hieronder volgt een korte beschrijving der verkregen produkten.

p. Dimethylsulfamidobenzoëzuur, Sp. 255°—256° onder ontleding, werd verkregen door p. sulfamidobenzoëzuur met 2 mol. natriumhydroxyde in water met dimethylsulfaat bij 60° te schudden. Na reiniging door oplossen in overmaat loog en zacht verwarmen, met zuur praecipiteeren en omkristalliseeren uit alkohol. (Analyse Ber. 6.11 °/₀ N., Gev. 6.08 °/₀ N.). De *ester* van dit zuur werd verkregen door zoutzuur in alkoholische oplossing te leiden gedurende eenige uren. Na zuivering werden kleurlooze, groote kristallen verkregen. (Analyse Ber. 5,44 °/₀ N., Gev. 5.31 °/₀ N.).

p. Benzoëzuursulfochloride. De beste opbrengst verkregen we door oxydatie onder roeren van 4 gr. p. toluolsulfochloride in een oplossing van 12 cc. ijsazijn en gelijke deelen anhydride, met 5.2 gr. chroomtrioxyde, zóó dat de temperatuur tusschen 40° en 45° blijft. Na toevoeging van het oxydans nog eenigen tijd doorroeren en dan, na uitgieten in water, het neerslag drogen. Ter verwijdering van eventueel onaangetast p. toluolsulfochloride wordt het neerslag gekookt met drogen petroleumaether. Na omkristalliseeren uit *volkomen droog* toluol (of aether), verkreeg ik het gezochte produkt. Sp. 235°—236° onder ontleding. (Analyse Ber. 16.1°/₀ Cl, Gev. 16.2°/₀ Cl). Om te bewijzen dat het Cl- aan de S- gebonden is, sloeg ik den volgenden weg in: *a*. De stof werd met ammoniak behandeld waardoor p. sulfamidobenzoëzuur ontstond, dat ook verkregen werd door oxydatie van p. toluolsulfamide; *b*. met dimethylamine ontstond dimethylsulfamidobenzoëzuur.

p. Monomethylsulfamidobenzoëzuur. Sp. 244°—245° onder ontleding. Deze stof werd bereid door toevoegen van 1 mol. methylamine bij 1 mol. p. benzoëzuursulfochloride, daarna langzaam loog toedruppelen, totdat een heldere oplossing ontstond. Ten slotte neerslaan met zuur en omkristalliseeren uit alkohol. (Analyse Ber. 6,51 °/₀ N. Gev. 6,41 °/₀ N.).

p. Methylsulfnitramidobenzoëzuur. Deze stof ontstaat door nitratie van het vorige produkt met reëel salpeterzuur. Zelfs bij verhitting treedt geen nitratie in de kern op. De stof vertoont de reactie van Lieberman met groene verkleuring. Sp. 195° onder heftige gasontwikkeling. (Analyse Ber. 10,77 °/₀ N. gev. 10,75 °/₀—10,7 °/₀ N.).

Om te bewijzen, dat de stof een nitramide was het volgende:

a. zij gaf na koken met ammoniak en aanzuren een produkt van Sp. 293° (p. sulfamidobenzoëzuur).

b. Bij behandeling met zoutzuurgas en alkohol ontstond de ester, die onoplosbaar was in verdunde alkali, wat alleen het geval is, wanneer het waterstofatoom der —$NHCH_3$-groep vervangen is door een NO_2-groep.

p. Monomethylsulfamidobenzoylchloride. Sp. 99°.

Bij koken van p. methylsulfamidobenzoëzuur met $SOCl_2$ (1 mol : 10) gedurende eenigen tijd, kristalliseert bij afkoeling deze stof uit. Na omkristallisatie uit drogen petroleumaether verkreeg ik lange glanzende naalden. (Analyse Ber. 6,0 °/₀ N 15,2 °/₀ Cl. Gev. 6,1 °/₀ N 14,93 °/₀ Cl.).

p. Benzoylsulfochloride. Sp. 58°. Deze door van MAARSE (Rec. **33**,209) reeds eerder door verhitting van p. benzoësulfonzure kali met phosphorpentachloride verkregen stof, bereidde ik door koken van p. benzoëzuursulfochloride met overmaat thionylchloride tot de zoutzuurontwikkeling was opgehouden. Na afdistilleeren van de overmaat thionylchloride, werd omgekristalliseerd uit drogen petroleumaether. (Analyse. Ber. 29,7 °/₀ Cl. Gev. 29,51 °/₀ Cl.).

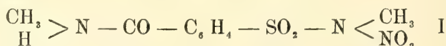
p. Methylsulfnitramidobenzoylchloride, Sp. 79°, werd verkregen door opkoken van het nitramide met thionylchloride. Na afdistilleeren van de overmaat thionylchloride, oplossen in zoo weinig mogelijk benzol en neerslaan met petroleumaether. Bij verwarming met waterige aceton werd p. benzoëzuurmethylsulfnitramide teruggevormd en kon zoutzuur in de oplossing aangetoond worden.

p. Monomethylsulfamido monomethylbenzamide sp. 192°—193°,

a. door inwerking van methylamine op monomethylsulfamidobenzoylchloride;

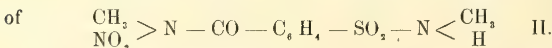
b. door inwerking van methylamine op op p. benzoylsulfochloride. Omkristalliseeren uit water gaf glinsterende naalden. (Analyse. Ber. 12,28 °/₀ N gev. 12,3 °/₀ N.).

Bij nitratie van deze stof met overmaat reëel salpeterzuur bij lage temperatuur, na langzaam uitgieten op ijs en omkristallisatie uit benzol, verkreeg ik een stof (sp. 136°—137° onder heftige ontleding) die 15,4 °/₀ en 15,6 °/₀ N bevatte, terwijl voor een mononitrolichaam berekend was 15,4 °/₀ N. Deze stof vertoonde de Liebermansche reactie. Twee mogelijke formules kunnen aan deze stof worden toegekend en wel:



$$\begin{matrix}CH_3\\H\end{matrix} > N - CO - C_6H_4 - SO_2 - N < \begin{matrix}CH_3\\NO_2\end{matrix} \quad I$$

of



$$\begin{matrix}CH_3\\NO_2\end{matrix} > N - CO - C_6H_4 - SO_2 - N < \begin{matrix}CH_3\\H\end{matrix} \quad II.$$

Het meest waarschijnlijk komt mij formule I voor, daar zoowel VAN ROMBURGH, (Rec. 4,388) als TAVERNE (Rec. 16,253) getracht hebben het nitramide van het methyl*benzamide* te bereiden, doch dit niet konden verkrijgen. Op de structuur van deze stof zal ik later nog terug komen.

De inwerking van salpeterzuur op de methylamiden van ortho- en metasulfamidobenzoëzuur is nog in studie.

Plantkunde. — J. M. Janse: „*Over prikkeling bij auxotonische bewegingen*".

(Aangeboden door de Heeren J. C. Schoute en J. W. Moll).

Talrijke bewegingen (krommingen) van zeer verschillende plantendeelen komen tot stand door een verandering in de groeisnelheid van een der zijkanten van het orgaan; men vat ze dikwijls te zamen als „auxotonische" bewegingen. Verschillende prikkels, waaronder die van zwaartekracht en licht verreweg de voornaamste zijn, kunnen de aanleiding tot die bewegingen vormen; deze prikkels worden plaatselijk gepercipieerd en geleid naar de groeizone, in welke de kromming vervolgens tot stand komt.

De algemeene opvatting tot nu toe was dat de normale, vertikale lengtegroei een op zich zelf staand verschijnsel was en dat bv. de zwaartekrachtprikkel eerst optrad, nadat men het plantendeel in een anderen stand had gebracht. In een onlangs verschenen mededeeling [1]) heb ik de meening uitgesproken dat, integendeel, ook de normale lengtegroei een gevolg zou zijn van den zwaartekrachtprikkel, welke nu, door alzijdig gelijke verlenging der cellen, bv. den verticalen groei van hoofdas en van hoofdwortel zou veroorzaken. In dien stand zou dan zelfs de maximale prikkeling optreden, beantwoordende aan hunne, proefondervindelijk aangetoonde, maximale groeisnelheid in dien stand. De proeven van Wiesner, Molisch [2]) en Czapek [3]) spreken voor die opvatting: zij toonden aan dat na het afsnijden van den worteltop de groeisnelheid in de eerstvolgende 24 uur een sterke vermindering ondergaat; deze vermindering zou voorzeker nog duidelijker zijn gebleken, indien de metingen ook gedurende de volgende dagen waren voortgezet, omdat de groei gedurende den eersten dag nog onder den invloed moet hebben gestaan van den prikkel, die vóór het afsnijden uit den top was ontvangen.

Algemeen wordt aangenomen dat de prikkeling door de zwaartekracht berust op den druk der specifiek zwaardere zetmeelkorrels (statolithen) op de buitenlaag van den protoplast van bepaalde cellen

---

[1]) Reizwirkung bei Rektipetalität und bei senkrechtem Wachstum; Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, 1922, Bd. 61, p. 590.

[2]) Berichte d. d. bot. Gesellschaft, 1883, Bd. 1. p. 362.

[3]) Jahrb. für wiss. Botan., 1895, Bd. 27, p. 246.

(statocysten); een zoodanige prikkeling kan intusschen, zooals reeds door NOLL (Heterogene Induktion, 1892) werd aangetoond, alleen dan de oorzaak eener beweging vormen, indien de gevoeligheid van de buitenlaag op verschillende plaatsen ongelijk is. Omdat men nu den vertikalen stand, bij de genoemde organen, als den niet geprikkelden beschouwde, nam men aan dat het aan den ondersten dwarswand grenzend gedeelte het ongevoelige deel vormde. Wordt nu echter ook de lengtegroei door den zwaartekrachtprikkel ingeleid, dan zou dat gedeelte juist het meest gevoelige moeten zijn.

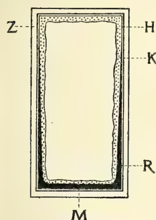
Hoe dit intusschen ook zij, de ligging van de plaats van grootste (of geringste) gevoeligheid in de statocyste moet steeds in een bepaald verband staan met de normale groeirichting van het orgaan, zoodat deze bv. in de cellen van den verticaal groeienden stengel een andere plaats moet innemen als in die van een horizontaal groeiend rhizoom, enz.

Hieruit zou volgen dat, wanneer een plantendeel uit zich zelf een anderen stand gaat innemen, dit moet worden voorafgegaan door een verschuiving van de buitenlaag binnen in de cel. De onderstelling van een zoodanige verschuiving van de buitenlaag zou echter in strijd zijn met de algemeene opvatting dat deze laag onbewegelijk is, wel is waar een hypothese, maar die toch om andere redenen, bv. wegens het bestaan der plasmodesmen, wel waarschijnlijk is. Die tegenstrijdigheid in de eischen geeft aanleiding tot de vraag of het niet waarschijnlijker is dat het prikkelbare deel der statocyste een afzonderlijk orgaan der cel vormt, dat dan wel tusschen buitenlaag en korrelig protoplasma zou kunnen gelegen zijn, maar toch van de eerste volkomen onafhankelijk.

Dit voor den druk der zetmeelkorrels gevoelige, protoplasmatisch gedeelte, dat men het *„statisch apparaat"* zou kunnen noemen, zou dan, tengevolge van uit- of inwendige invloeden, verschuivingen moeten kunnen ondergaan, zonder dat de buitenlaag daarbij betrokken was. Het apparaat zou verder in het middenveld het meest prikkelbaar moeten zijn, terwijl die gevoeligheid naar den rand toe zou moeten afnemen, zooals in bijgaande schets wordt voorgesteld. In niet prikkelbare cellen zou het apparaat niet behoeven voor te komen.

Uit den normaal vertikalen stand van hoofdas en -wortel zou volgen dat in deze plantendeelen het middenveld tegen den ondersten dwarswand der statocyste aanligt, terwijl het bv. in een horizontaal voortgroeiend rhizoom aan den naar beneden gekeerden langswand moest grenzen. Dan toch eerst zou de maximale prikkeling optreden, gepaard gaande met de maximale, alzijdig gelijke, groeisnelheid, waardoor het rhizoom den horizontalen stand zoude blijven behouden.

Is dus nu, voor het optreden van een anderen evenwichtsstand, een bepaalde verschuiving van het statisch apparaat noodig, dan



(Bijgaande schets stelt, schematisch, voor de opvatting omtrent de ligging van het „statisch apparaat" in de statocyste: Z = celwand, H = buitenlaag, K = korrelig protoplasma, R = het statisch apparaat, waarvan M = het middenveld.

De ongelijke dikte van het statisch apparaat in de teekening, dient *slechts* om het plaatselijk verschil in prikkelbaarheid van dat apparaat aan te geven, welke in het middenveld het grootst zoude zijn).

zou men omgekeerd, uit de verandering van den evenwichtsstand kunnen afleiden welke verschuiving in elk afzonderlijk geval heeft plaats gevonden, tenminste wanneer men weet waar die apparaten voorkomen. Deze verschuiving is, voorloopig althans, door mikroskopisch onderzoek der cel niet te controleeren, maar, wanneer het hieronder zal blijken dat door het aannemen van zoodanige verschuivingen het gelukt eenvoudige verklaringen te geven van de meest verschillende, vaak zeer ingewikkelde, verschijnselen, zoo moet dit spreken ten gunste van de aanwezigheid van een *verplaatsbaar* prikkelbaar orgaan in de gevoelige cel. Daarbij moet echter in het oog gehouden worden dat het daarbij eigenlijk onverschillig is of men denkt aan het „statisch apparaat" als boven bedoeld, dan wel aan de buitenlaag als geheel, mits deze dan verschuifbaar zij; hieronder zal steeds het beeld van het statisch apparaat gebruikt worden.

Zoude nu al op deze wijze verklaard kunnen worden hoe het komt dat een plantendeel, dat een bepaalden evenwichtsstand heeft, dien stand blijft behouden, niet te verklaren is daarmede echter het meest bekende verschijnsel dat een plantendeel, dat uit den evenwichtsstand gebracht wordt, daarin niet alleen vanzelf, maar ook langs den kortsten weg daartoe terugkeert: een horizontaal gelegde wortel kromt zich toch in een *vertikaal* vlak naar omlaag totdat de top wederom loodrecht naar beneden wijst. Het groote nut dat die beweging voor de latere ontwikkeling der plant heeft, is natuurlijk geen verklaring van hare oorzaak, vooral niet omdat de voorbereiding tot de beweging wordt getroffen langen tijd vóórdat aan de plant het nut der kromming kan blijken. Men zou dus moeten vragen: waarom voert het plantendeel die nuttige beweging uit en hoe komt het dat deze plaats heeft langs den kortsten weg?

Deze vraag, welke naar mij voorkomt hier voor het eerst zoo scherp gesteld wordt, raakt zóózeer het meer intieme leven der cel, dat het niet kan verwonderen dat ook thans een geheel afdoend antwoord

niet te geven is, maar toch kan beproefd worden een stap nader te komen tot de oplossing.

Wij zullen vooreerst uitsluitend over de prikkeling door de zwaartekracht spreken.

Volgens onze beschouwingen zou dus het statisch apparaat in de statocyste een zoodanige ligging hebben, dat het meest gevoelige middenveld aanligt tegen den onderwand van de cel, wanneer het plantendeel zijn evenwichtsstand inneemt, welke deze stand ook zij. Brengt men dan het plantendeel uit dien stand, legt men b.v. den wortel horizontaal, dan komen de zich onder den invloed der zwaartekracht verplaatsende zetmeelkorrels dus in aanraking met het minder gevoelige randgedeelte van het apparaat; buigt dan de top zich na eenigen tijd naar omlaag, dan komen de zetmeelkorrels, zich wederom verplaatsende, gaandeweg in aanraking met steeds meer gevoelige plaatsen van het apparaat, totdat zij, als de top vertikaal staat, wederom de meest prikkelbare plaats hebben bereikt; de kromming naar omlaag gaat dan dus gepaard met een voortdurende stijging der prikkeling, en, geschiedt ze in een vertikaal vlak, dan is snelheid van stijging ook het grootst.

Kan nu wellicht dit stijgen der prikkeling de, indirecte, oorzaak zijn van de kromming en tevens van het kiezen van den kortsten weg?

Op zich zelf kan dit streven naar maximale prikkeling, zooals men het zou kunnen noemen, bij de plant niet als directe oorzaak van beweging beschouwd worden, hoewel het wellicht later tot een bewegingsoorzaak zou kunnen worden terug gebracht; intusschen zijn er toch gevallen bekend waarin ongetwijfeld het streven naar steeds sterkere prikkeling door bewegingen tot uiting komt.

Zoo bv. bij de positieve chemotaxis: wanneer men bv. varenspermatozoiden brengt in een zwakke oplossing van appelzuur, in welke de concentratie op verschillende plaatsen ongelijk is, dan bewegen zij zich naar de plaats van sterkste concentratie toe, dus in de richting van de stijgende concentratie of prikkeling.

Voor enkele zintuigen van mensch en dier, als oog, oor en wellicht ook voor het statisch orgaan wanneer het organisme in rust is, is het bekend dat deze zich automatisch (reflectorisch) op een sterkeren prikkel instellen, d.w.z. dat dezelfde prikkel die de zintuigwaarneming veroorzaakt, ook andere zenuwen en door deze bepaalde spieren prikkelt, welke laatste daardoor het zintuig in dien zin verplaatsen dat het dan een zoo sterk mogelijken indruk ontvangt; ook hier dus een beweging die ten doel heeft de prikkeling te versterken. Ware hierin vergelijking met de plant ten volle geoorloofd, hetgeen thans moeilijk beslist kan worden, zoo zou men verder

kunnen gaan en zeggen dat, omdat bij de plant de zintuigwaarneming uitvalt, hare krommingen met de zuiver reflectorische bewegingen der dieren te vergelijken zouden zijn.

Intusschen, hoewel erkend moet worden dat vergelijkingen op het gebied der physiologie bij planten en dieren in een aantal gevallen met vrucht kunnen getrokken worden, (zooals vooral op het gebied der prikkeling aannemelijk is, ook omdat er bij beide groepen van levende wezens eenzelfde verhouding bleek te bestaan tusschen prikkelintensiteit en prikkeleffect, de wet van WEBER) zoo moet dit toch steeds met de uiterste voorzichtigheid geschieden. Hiermede rekening houdende, komt het mij evenwel voor dat de feiten voldoende aanleiding verschaffen om het streven der plant, om langs den snelsten weg een zoo groot mogelijken prikkel te ontvangen, als onderstelling aan te nemen, zooals dit feitelijk thans reeds ten opzichte der positieve chemotaxis geschiedt. Aan latere onderzoekingen moet het dan overgelaten worden dit streven naar maximale prikkeling tot een werkelijke oorzaak van beweging terug te brengen.

Aan de hand van een aantal voorbeelden, uit de meest verschillende groepen van auxotonische bewegingen gekozen, wensch ik thans, zéér in het kort, te doen zien hoe eenvoudig de verklaring dier verschijnselen wordt wanneer men van de boven besproken onderstellingen uitgaat.

De verschillende bewegingen kunnen tot bepaalde groepen gebracht worden, naar gelang van de (onderstelde) ligging van het statisch apparaat en van de verplaatsing die het zou moeten ondergaan.

A. PRIKKELING DOOR ZWAARTEKRACHT.

I. *Vaste ligging van het statisch apparaat.*

a. Het statisch apparaat zou in de eerste plaats tegen den ondersten dwarswand van de statocyste kunnen aanliggen. Dit zou het geval moeten zijn bij den verticaal groeienden hoofdwortel en hoofdas, waarbij dan de, maximale, prikkeling de aanleiding zou zijn, tengevolge van de alzijdig gelijke verlenging, tot beider vertikalen groei.

Heeft men deze zelfde plantendeelen in een anderen stand gebracht, bv. den horizontalen, dan vertoonen zij positieve (wortel) of negatieve (stengel) geotropie. Deze zou nu verklaard moeten worden uit het streven naar sterkere prikkeling: in den horizontalen stand drukken de zetmeelkorrels op een deel van den minder gevoeligen rand van het statisch apparaat; wanneer zij nu in aanraking moeten komen met het meest prikkelbare middenveld, zal de wortel zich

omlaag, de stengel daarentegen zich omhoog moeten buigen. Voor de verklaring dier tegengestelde bewegingen is dus geen nieuwe onderstelling noodig: zij volgt uit de omstandigheid dat in de statocyste het middenveld bij den wortel ligt tegen den dwarswand die van de groeizone (waar de kromming optreedt) is afgekeerd, bij den stengel tegen die welke daarnaar is toegekeerd.

Worden bij de centrifugaalproef, de zetmeelkorrels in de statocyste buitenwaarts verplaatst, dan moet, om dezelfde reden als boven, de stengel daarop reageeren door zich naar het middelpunt toe te keeren, de wortel door zich daarvan weg te krommen.

b. Normaal horizontaal groeiende plantendeelen, zooals rhizomen en sommige hechtwortels, kunnen hun evenwichtsstand slechts bewaren en in die richting verder groeien als het middenveld bij den ondersten langswand der statocyste ligt, wederom omdat slechts dan de zetmeelkorrels met dit middenveld in aanraking zouden zijn. Of in dien stand ook deze plantendeelen hun snelsten lengtegroei bereiken moet nog onderzocht worden.

c. Behalve tegen dwars- en langswand zou het middenveld in de cel ook tusschen beiden in, dus scheef, kunnen liggen; in die gevallen zou het plantendeel eveneens een anderen evenwichtsstand moeten vertoonen, welke met den vertikaal een hoek zou maken, welks grootte afhankelijk zou zijn van de ligging van het apparaat ten opzichte van de as der statocyste. Den vasten stand die zijtakken en -wortels der eerste orde steeds innemen, en die bij verschillende planten zeer verschillend kan zijn (vgl. bv. *Araucaria*, de gewone loofboomen, *Populus piramidalis*) zou daardoor worden verklaard.

II. *Veranderlijke ligging van het statisch apparaat.*

Verschillende plantendeelen vertoonen gedurende hun normale ontwikkeling een verandering in den evenwichtsstand, welke dus nu zou toegeschreven moeten worden aan een verschuiving van het apparaat op een bepaald oogenblik, ten minste wanneer aangetoond is dat daarbij zwaartekrachtprikkeling of lengtegroei een rol speelt.

De verschuiving kan plaats hebben òf op een bepaald oogenblik òf voortdurend; bovendien kan zij autonoom, dan wel als gevolg van een uitwendige oorzaak optreden. Naar gelang daarvan kan men de volgende gevallen onderscheiden:

a. De ligging van het apparaat verandert, autonoom, op een bepaald oogenblik.

Bij de kieming van het zaad eener windende plant staat de jonge stengel in het eerst vertikaal doch de top neemt spoedig daarna meer

of minder volledig den horizontalen stand aan, waarmede dan tevens het winden een aanvang neemt. Deze overgang van de negatieve geotropie in de transversale zou nu ingeleid kunnen worden door een autonome verplaatsing van het statisch apparaat, waarbij het middenveld van den ondersten dwarswand naar een der langswanden verschoven wordt; door het overbuigen van den stengel, wordt deze langswand dan de onderste wand van de statocyste. Verschuift het apparaat in de cel juist over 90° dan wordt de nieuwe stand van den stengeltop een zuiver horizontale; bedraagt dit daarentegen minder dan zal de stengeltop, zooals vaak geschiedt, een daarmede overeenkomstigen, scheef-opwaarts gerichten, stand aannemen.

Gelijksoortige standsveranderingen, welke vele bloemen vóór en na den bloei vertoonen, kunnen ook en op even eenvoudige wijze verklaard worden. De bloemen van *Narcissus* bv. staan in knoptoestand recht omhoog om, tegen het opengaan, een ongeveer horizontale richting aan te nemen: een verschuiving van het apparaat van den ondersten dwarswand naar een der langswanden zou hier wederom daaraan moeten voorafgaan. Bij *Agapanthus* treedt dezelfde beweging op maar gaat daarna verder voort, omdat na de bevruchting het vruchtbeginsel zich nog verder omlaag buigt; in dit geval zou dus een tweede verschuiving in dezelfde richting moeten plaats vinden, zoodat ten slotte het middenveld aan den apicalen dwarswand zou aankomen.

Bij al deze bewegingen gaat de kromming met duidelijken groei van bloem- en van vruchtsteel gepaard. Door afsnijden van den bloemknop worden deze bewegingen voorkomen, reden waarom men meent dat de statocysten in het vruchtbeginsel gelegen zijn.

Wederom andere planten vertoonen het verschijnsel dat de, gedurende den bloei opgerichte, bloemsteel na de bevruchting sterk gaat groeien en zich naar beneden kromt; het meest opvallend is dit bij planten die hunne jonge vruchten in den grond begraven: *Trifolium subterraneum*, *Arachis* enz.; hier zou dus de verschuiving van het apparaat, van den ondersten dwarswand naar den bovensten, in één phase moeten verloopen,

In al deze gevallen is de plaatsverandering van het statisch apparaat blijkbaar een gevolg van een afzonderlijken, nieuwen prikkel die òf in het volwassen worden der bloem, òf in het proces der bevruchting gelegen is.

Een verplaatsing van het apparaat in tegengestelden zin zou moeten voorkomen in die gevallen, waarin de top van het sympodiale rhizoom zich vertikaal omhoog buigt ten einde bladeren en bloemen voort te brengen, omdat die opwaartsche kromming zou moeten worden

ingeleid door een verplaatsing van den ondersten langswand naar den basalen dwarswand.

Het meest bekende geval van een bijzondere kromming is wel dat van de bloemstelen van *Papaver* (waaraan zich die der bloemstengels van *Tussilago Farfara* aansluiten) omdat daar de beweging vóór den bloei in den eenen zin, en na de bevruchting in den tegengestelden zin plaats heeft. Reeds Vöchting (1882) kon aantoonen dat die bewegingen ten nauwste samenhangen met de geotropische prikkeling zoowel van den bloemsteel als van het vruchtbeginsel, terwijl tevens de „rectipetaliteit" er een rol bij zoude spelen.

Vöchting noemt „rectipetaliteit" het verschijnsel dat een, na prikkeling gekromd, plantendeel uit zich zelf weer recht wordt, wanneer de prikkel ophoudt te werken; hij beschouwde dit als een op zich zelf staande eigenschap der plantendeelen ook al omdat bleek dat er geen nieuwe prikkeling bij in 't spel was. Het komt mij echter voor, zooals ik in mijne boven aangehaalde mededeeling heb uiteengezet, dat de rectipetaliteit toch moet beschouwd worden als een gevolg van den oorspronkelijken prikkel, maar die, omdat deze gaandeweg ook naar de tegenovergestelde zijde van het plantendeel geleid wordt, aldaar een, nu tegengestelde, kromming teweeg brengt.

Bij *Papaver* staat de jonge bloemknop rechtop op een korten, eveneens vertikalen steel; reeds spoedig daarna maakt de, snelgroeiende, steel een bocht van 180°, zoodat nu de bloemknop omgekeerd hangt. In dien toestand groeit de steel verder, hetgeen plaats heeft in de bocht; dat de kromming daarbij niet toeneemt wordt veroorzaakt door de strekking die er daar tegelijkertijd plaats heeft (rectipetaliteit) en zoo schijnt het alsof de groei slechts tot het gedeelte onder de bocht beperkt is. Is de bloem volwassen dan richt de knop zich weer op, terwijl ook de vrucht dien stand behoudt.

Na afsnijden van het vruchtbeginsel alléén (binnen den nog onvolwassen bloemknop) houdt de lengtegroei van den steel onmiddellijk op en strekt deze zich zoover hij kan; het stilstaan van den groei moet nu beschouwd worden als een gevolg van het ophouden van de zwaartekrachtprikkeling in het vruchtbeginsel, het zich strekken zou dan de rectipetaliteit zijn, hier dus het gevolg van den, vóór het afsnijden ontvangen, prikkel.

De bloemsteel, zoowel als de bloemknop, is negatief-geotropisch; het statisch apparaat zou bij beide dus wederom tegen den ondersten dwarswand moeten aanliggen; in den bloemsteel blijft dit onveranderd. De aanleiding tot het ombuigen van den groeienden bloemsteel over 180° moet dan gezocht worden in een verschuiving van het statisch apparaat, in de statocysten van het vruchtbeginsel, van den

ondersten dwarswand naar den bovensten, terwijl later, het zich weer oprichten van den volwassen bloemknop, door de tegengestelde beweging, in dezelfde cellen, zou moeten worden voorafgegaan.

Men ziet hoe eenvoudig op deze grondslagen de verklaring der zoo ingewikkeld schijnende beweging worden kan.

Een laatste groep zou de zoo algemeen verspreide epi- en hyponastische bewegingen, van plagiotrope plantendeelen, moeten omvatten.

Deze bewegingen berusten op tijdelijke ongelijkheid in groeisnelheid tusschen de boven- en onderzijde van het plantendeel (vooral bladeren), zoodat nu eens die aan de eene zijde, dan die aan de andere zijde overweegt. De aanleiding tot die wijziging in de groeisnelheden is onbekend, maar, hoewel een hernieuwd onderzoek dezer bewegingen zéér gewenscht is, kan men wel als zeker aannemen dat zij, hoe gelijksoortig ook schijnend, dit toch inderdaad niet zijn, omdat zij zeker niet alle door dezelfde prikkels beheerscht worden. De invloed der zwaartekracht o.a. is bij vele hunner aan te toonen, zoodat dáárom, en omdat de bewegingen geheel op lengtegroei berusten, er alle reden is om aan te nemen dat ook in die plantendeelen statocysten voorkomen. Omtrent hunne plaats van voorkomen is, ook bij de bladeren in 't algemeen, nauwelijks iets bekend en is het dus nutteloos verdere onderstellingen omtrent verschuivingen der statische apparaten te opperen, alvorens daaromtrent voldoende gegevens verkregen zijn.

Enkele bewegingen zouden intusschen reeds nu, op gelijksoortige wijze als boven, te verklaren zijn: zoo b.v. de bewegingen der bladeren bij de zich ontplooiende knoppen van *Aesculus*: in den knop en ook zoodra deze opengaat, staan bladstelen en -schijven loodrecht omhoog, waarna de bladschijven zich in hun gewricht over 180° naar beneden buigen (verschuiving der apparaten van den basalen naar den apicalen dwarswand); ten slotte nemen de bladschijven zoowel als de bladstelen een ongeveer horizontalen stand aan (verschuiving der apparaten bij beide naar den ondersten langswand).

In aansluiting hieraan moge nog op de, blijkbaar bijna geheel vergeten, maar toch zeer belangrijke opmerkingen van HOFMEISTER[1]) gewezen worden, waaruit zou blijken dat in den knoptoestand de breedtegroei der bladeren in vele gevallen ook samenhangt met hun vertikalen stand, zóó nl. dat de in den knop naar boven gerichte bladhelften sneller zouden groeien dan de naar beneden gerichte, enz. Zijn deze waarnemingen juist dan zouden zij dus een nieuwe aanwijzing vormen dat ook in de bladeren statocysten voorkomen,

---

[1]) Allgemeine Morphologie der Gewächse. 1868, § 23.

welke dus invloed op den groei der cellen zouden kunnen uitoefenen. Dit zoude overeenkomen met mijne, in den aanvang besproken, meening dat het statisch apparaat ook den normalen groei beheerscht. Op den invloed van de zwaartekracht op den stand der bladeren, welke dus ook met de werking van het statisch apparaat zou moeten samenhangen, komen wij later (blz. 31) terug.

b. Veranderde ligging van het apparaat door invloeden van buiten.

Ook een ingrijpen van buiten af kan somtijds tot standverandering van plantendeelen aanleiding geven, zooals b.v. door verwonding van de hoofdas.

Wanneer de eindknop of een deel van de hoofdas wordt afgesneden gaat de onderliggende zijknop of zijtak zich sterker ontwikkelen dan anders het geval zoude geweest zijn en gaat zich tevens omhoog richten, zoodat ten slotte de zijas geheel of bijna geheel de hoofdas vervangt; het afsnijden veroorzaakt dus zoowel een sterkeren groei als een sterke geotropische kromming. De volstrekte samenhang tusschen beide, die hier zoo opvallend voor den dag treedt, vindt nu zijn eenvoudigste verklaring in de omstandigheid dat beide van prikkeling van het statisch apparaat afhankelijk zouden zijn.

Gaat bv. de bijna horizontale zijas van *Araucaria*, na het verwijderen van den hoofdknop, gaandeweg een vertikalen stand aannemen, dan zoude daaraan vooraf moeten gaan een verplaatsing van het apparaat van den ondersten langswand naar den basalen dwarswand, een verplaatsing dus in de richting naar de wond toe. Nu hebben Tangl [1]) en Nestler [2]) aangetoond dat verwonding tengevolge heeft dat in de cellen, die in de nabijheid van de wond liggen een protoplasmaophooping plaats heeft in de richting naar de wond toe: wanneer nu het statisch apparaat aan die verplaatsing zou deelnemen, zoude reeds daarmede alleen de aanleiding tot de negatief-geotropische beweging gegeven zijn.

Hierbij mag zeker wel vermeld worden dat, volgens Richter [3]), zelfs een zooveel eenvoudiger gebouwde plant als *Chara* dezelfde verschijnselen vertoont: na afsnijden van den eindknop het snel uitgroeien en sterk omhoogbuigen van den naastbijgelegen zijtak.

Het afsnijden van den hoofdwortel heeft niet dienzelfden invloed op de zijwortels der eerste orde: Sachs [4]) toonde aan dat de reeds bestaande zijwortels geen verandering in stand doen zien, maar dat wel de na de verwonding nieuw gevormde zijwortels in een meer

[1]) Sitzungsber. der K. Akad. der Wissensch., Wien, 1 Abt., 1884. Bd. 90, p. 25.
[2]) Ibidem, 1898, Bd. 107, p. 708.
[3]) Flora, 1894, p. 416.
[4]) Arbeiten des botan. Inst. zu Würzburg, Bd. 1, p. 622.

vertikale richting uitgroeien: hier dus een invloed op de ligging van het apparaat in de nieuwgevormde cellen in plaats van een verschuiving in de reeds bestaande.

c. Het statisch apparaat verplaatst zich voortdurend.

Is in eenig plantendeel het statisch apparaat in rust, dan heeft dit tengevolge, dat dat deel een bepaalden evenwichtsstand aanneemt; bij voortdurende, autonome, verplaatsing zal het plantendeel daarentegen nooit den evenwichtsstand bereiken en daarom ook nooit in rust zijn. Zulke onophoudelijke bewegingen kent men in de nutaties en bij het winden der planten.

De nutaties worden thans beschouwd als bewegingen, die zonder prikkeling verloopen, maar een verklaring er van bestaat niet; daar zij uitsluitend op lengtegroei berusten, zullen ook deze hier beschouwd worden als ingeleid door den zwaartekrachtprikkel.

Het minst algemeene geval van nutatie treft men aan bij de bloemstengels van *Allium Porrum*, welke eerst naar de eene zijde overhangen, daarna recht worden om vervolgens naar de andere zijde over te buigen, enz. Een geringe verplaatsing van het statisch apparaat zoude hiertoe reeds de aanleiding kunnen vormen: ligt nl. het middenveld tegen den ondersten dwarswand aan dan neemt, zooals wij zagen, de stengel een vertikalen stand aan; beweegt het zich nu daarna een weinig ter zijde dan zou de stengel, om wederom den evenwichtstand te zoeken, zich naar diezelfde zijde moeten overbuigen; gaat het apparaat daarna, over den dwarswand, terug en verder een weinig naar de andere zijde, dan zou de stengel recht worden en dan ook naar die zijde moeten overbuigen, enz. Het, autonoom, heen en weer schuiven van het apparaat over den ondersten dwarswand zou dus reeds voldoende zijn om de „slingerende nutatie" te doen optreden.

Veel algemeener is de „roteerende nutatie", waarbij de stengeltop zich verplaatst als over een kegeloppervlak; men kan zich nu voorstellen dat deze beweging ingeleid wordt doordat het apparaat, evenals in het voorgaande geval, iets ter zijde van den dwarswand ligt, maar nu als het ware in een kring rondgeschoven wordt, doch zóó dat het middenveld altijd even ver van het centrum van den dwarswand verwijderd blijft. De stengel zou dan wederom geheel die verplaatsing moeten volgen, steeds denzelfden hoek met den vertikaal makend. Hoe meer het apparaat naar ter zijde verplaatst is, en ook blijft gedurende het rondvoeren, des te grooter is de tophoek van den kegel welke door den stengeltop wordt beschreven.

Het winden was volgens Sachs een met de nutatie nauw verwante beweging, ook omdat toen zwaartekrachtwerking bij beide werd

uitgesloten; NOLL toonde later aan dat deze zich echter bij het winden wel deed gevoelen, als „laterale geotropie", waarbij de zwaartekrachtprikkel, door het opwekken van een groeiverschil tusschen de beide zijkanten, de zijdelingsche beweging van den top veroorzaakt.

Deze laterale geotropie voert dus den stengeltop in een horizontalen kring rond, waarbij de top zelve een meer of minder horizontale richting heeft; tevens draait de stengeltop zich om zijn as in tegengestelde richting. Het komt mij voor dat deze bewegingen zich eveneens door autonome verplaatsing van het statisch apparaat laten verklaren: Wij zagen reeds (blz. 6) dat de eerst vertikale kiemstengel spoedig daarna den top een ongeveer horizontalen stand doet innemen, waarna het winden begint; dit werd verklaard door een verplaatsing van het apparaat van den basalen dwarswand naar een der langswanden, welke dan, door het overbuigen, tot ondersten wordt. Wordt nu dit apparaat in de statocyste wederom verschoven, zóó dat het de cel rondgaat, maar daarbij steeds tegen een der langswanden aan gelegen blijft, dan zou daarvan het terugtordeeren van den top, en tevens diens draaiing in het horizontale vlak het gevolg zijn, omdat die torsie niet zoude kunnen plaats hebben zonder de gelijktijdige, en even snelle draaiing (één torsieomgang voor elken beschreven cirkel in het horizontale vlak). Dit rondvoeren zou geschieden in de eene richting bij de links-, in de tegenovergestelde bij de rechtswindende planten. Heeft de stengeltop bij de draaiing geen zuiver horizontale richting, dan zoude het apparaat aan den langswand iets ter zijde, naar den basalen dwarswand toe, verschoven moeten liggen en zoo steeds in dienzelfden stand in de cel rondgevoerd moeten worden.

Het is van belang hierbij op te merken dat deze beweging van het apparaat, evenzeer trouwens als de aard van de beweging van den stengel zelve, meer en meer de bij de roteerende nutatie besprokene nadert; daarom, en omdat volgens onze opvatting *beide* nu ook van den zwaartekrachtprikkel afhankelijk zijn, zoude dus de oude opvatting van SACHS, dat winden en roteerende nutatie zeer nauw verwante bewegingen zijn, weer tot haar recht komen; het verschil zou dan alleen bestaan in de grootte van den tophoek van den kegel, dien de stengeltop beschrijft, welke bij windende planten tot 180° toe kan worden, en dus in de mate waarin het middenveld, ten opzichte van den basalen dwarswand, is op zijde geschoven bij het rondvoeren in de statocyste.

Deze, wel is waar al te korte, bespreking moge toch voldoende zijn om aan te toonen dat het met behulp van onze voorstellingen

mogelijk is ook van de laterale geotropie een eenvoudige verklaring te geven.

Een terugverplaatsing van het apparaat tot den oorspronkelijken stand, aan den basalen dwarswand, zou weer de negatieve geotropie doen optreden, welke de oprichting der stengels na afloop van het winden en het aandrukken der windingen tegen het steunsel veroorzaakt.

De stengeltorsies, welke als bijkomend verschijnsel vaak optreden, en die wellicht ook op den zwaartekrachtprikkel berusten, moeten hier onbesproken blijven.

B. Prikkeling door zwaartekracht en licht.

Vele plantendeelen krommen zich onder den invloed van ongelijke belichting, omdat deze een ongelijkheid in den lengtegroei aan verschillende zijden van het plantendeel veroorzaakt (heliotropie). Omdat het hier wederom verschijnselen van lengtegroei betreft, moeten deze bewegingen hier beschouwd worden als veroorzaakt door zwaartekracht en licht beide.

Het is bekend dat licht bepaalde bewegingen van het protoplasma kan te voorschijn roepen: de zwermsporen begeven zich naar de lichtbron toe (positieve phototaxis), waarbij het, volgens de proeven van Engelmann, het ongekleurde deel der zwermspore is, dat den prikkel ontvangt; wanneer groene cellen, na in het donker verkeerd te hebben, aan het licht worden blootgesteld, ondergaan de bladgroenkorrels een plaatsverandering, om in het donker wederom tot den oorspronkelijken stand terug te keeren.

Een invloed van het licht op de ligging van het statisch apparaat zoude reeds om die redenen verre van onaannemelijk zijn, maar zulk een invloed moet nog waarschijnlijker worden wanneer uit verschillende voorbeelden zal blijken dat het aannemen van een gelijksoortige verplaatsing van het apparaat, dus in de richting naar de lichtbron toe, kan leiden tot een eenvoudige verklaring van zeer verschillende bekende verschijnselen.

a. Positieve en negatieve heliotropie.

In den vertikalen stand zoude, zooals vroeger gezegd werd, bij hoofdstengel en hoofdwortel het middenveld van het statisch apparaat tegen den ondersten dwarswand van de statocyst aanliggen; worden deze plantendeelen daarna door zijdelingsch licht getroffen en de apparaten daardoor, zooals wij zooeven onderstelden, in de richting naar de lichtbron toe verschoven, dan kunnen die deelen niet meer in evenwicht zijn, en dan kan de stengel den nieuwen evenwichts-

stand slechts bereiken, d.w.z. de zetmeelkorrels zullen eerst dan weer komen te rusten op het meest prikkelbare middenveld van het apparaat, wanneer de stengel zich naar het licht toe, de wortel daarentegen zich van het licht afbeweegt; de bekende positief- en negatief-heliotropische krommingen dus.

Wordt de plant daarna weder in het donker geplaatst dan keeren de plantendeelen tot hun vertikalen stand terug, waaruit dus zou moeten worden afgeleid dat, na het ophouden van den lichtprikkel, de apparaten uit zich zelf hunne vroegere plaats aan den ondersten dwarswand hernemen. Ditzelfde ziet men trouwens gebeuren met de chlorophylkorrels, in de zooeven genoemde gevallen: zij worden uit hun evenwichtsstand gebracht door het licht om daarna, in het donker, weer daartoe terug te keeren; PFEFFER acht dit van zelf sprekend [1]).

b. Het is bekend dat verscheidene rhizomen ook voor licht gevoelig zijn, in dien zin nl. dat, wanneer hun top door het licht getroffen wordt, deze zich positief-geotropisch omlaag gaan krommen; wanneer het daardoor weder in den bodem indringt, en zoo aan den invloed van het licht onttrokken wordt, dan treedt de transversaal-geotropie wederom op.

Ook deze bewegingen laten zich op de eenvoudigste wijze uit onze voorstellingen afleiden: in het normale rhizoom zou, zooals wij zagen (blz. 22), het statisch apparaat tegen den ondersten langswand moeten aanliggen; wordt nu door het licht het apparaat wederom naar de lichtbron toe verschoven, dus in de richting naar den apicalen dwarswand toe, dan moet de top zich wel omlaag richten opdat de zetmeelkorrels wederom het middenveld zouden bereiken, juist de beweging dus die het rhizoom inderdaad uitvoert. In het donker teruggekeerd zoude dan het apparaat, en daardoor ook het rhizoom, zijn vroegeren stand hernemen, evenals in het voorgaand geval dus.

c. De slaapbewegingen der bladeren staan, zooals bekend is, in zóó hooge mate onder den invloed van het licht, dat men lang gemeend heeft dat het licht alléén daartoe de aanleiding verschafte. Later hebben echter uitgebreide onderzoekingen, vooral van PFEFFER, aangetoond dat ook de zwaartekracht er een rol bij speelt. Het duidelijkst kwam dit wel uit bij de proef met *Phaseolus*, waarbij de bladstelen der beide eerste bladeren over dag in den normalen stand gefixeerd waren, zóó dat alleen de bladgewrichten de slaapbeweging konden uitvoeren. Werd nu de plant omgekeerd, dan had de slaapbeweging 's avonds wel plaats, maar juist omgekeerd

[1]) Pflanzenphysiologie, 1904, Bd. 2, p. 780.

als in den normalen stand: in het licht stonden de bladschijven nu vertikaal omhoog, in de duisternis daarentegen horizontaal uitgespreid. Tegenover de zwaartekracht bewogen de bladeren zich dus in onveranderde richting, tegenover het licht daarentegen juist op tegengestelde wijze als normaal, waaruit blijkt dat het de zwaartekracht was die in de eerste plaats de beweging regelde en den evenwichtsstand van het blad bepaalde.

Daar er thans nog zoo goed als niets bekend is omtrent de ligging der statocysten in de bladeren is het, evenals vroeger (blz. 25), moeilijk reeds nu vermoedens te uiten omtrent eventueele verschuivingen welke die statische apparaten onder den invloed van het licht zouden ondergaan, te meer nog omdat er bij de slaapbewegingen een zoo groote verscheidenheid heerscht. Belangrijk is het in dit opzicht intusschen voor eene verklaring in den zin als hier bedoeld, dat het bleek dat het voornaamste hulpmiddel, het statisch apparaat zelve, ook in bladeren die slaapbewegingen uitvoeren, voorhanden moet zijn.

d. Hetzelfde wat omtrent de slaapbewegingen gezegd werd, is eigenlijk ook van toepassing op de bewegingen die veroorzaken dat de bladeren hun natuurlijken stand innemen: schijnbaar ondergaan zij daarbij uitsluitend den invloed van het licht, maar wederom hebben de proeven van Pfeffer aangetoond dat ook hier aan de zwaartekracht een zeer belangrijke rol toekomt; zoo bv. kunnen vele bladeren, wanneer zij uit hun normalen stand gebracht zijn, daartoe ook in het duister terugkeeren, hetgeen dus slechts door tusschenkomst van den zwaartekrachtprikkel plaats zou moeten hebben.

Ook hier echter belet het gemis aan gegevens omtrent de ligging der statocysten in de bladeren, om thans reeds deze bewegingen in verband met onze voorstellingen nader te onderzoeken.

C. Prikkeling door licht alléén.

Auxotonische krommingen worden slechts zelden door den lichtprikkel alléén veroorzaakt; het best onderzochte geval daarvan is dat der „transversaal-heliotropie", tengevolge waarvan bepaalde bladeren zich loodrecht op den invallenden bundel plaatsen. Haberlandt [1]) trachtte reeds dadelijk deze beweging te verklaren door aan te nemen dat het middenveld van dat gedeelte der buitenlaag, dat tegen den onderwand der prikkelbare opperhuidscellen aanligt, meer gevoelig is voor licht dan diens omgeving. Wanneer nu het blad langs den kortsten weg den gewenschten stand tracht te bereiken

[1]) Die Lichtsinnesorgane der Laubblätter, 1905, p. 127.

moet dit gepaard gaan met de snelste stijging der prikkelingsintensiteit, juist hetzelfde dus als hierboven bij het gehoorzamen aan den zwaartekrachtprikkel werd aangenomen.

De prikkeling van een zintuig veroorzaakt allerwege een bepaalde gewaarwording of beweging, waarbij echter de *aard* der gewaarwording of der beweging *uitsluitend* bepaald wordt door de inrichting die de onderdeelen van het organisme, welke *buiten* het percipieerende zintuig liggen, bezitten; dientengevolge kan de aard van den prikkel geen invloed uitoefenen op het effect dat het organisme vertoont.

Wanneer deze conclusie ook voor de plant geldt, hetgeen uit den aard der zaak zeer waarschijnlijk is, en wanneer men daarbij in aanmerking neemt dat alle auxotonische bewegingen op dezelfde wijze tot stand komen, dan zou daaruit volgen dat de plant ten bate van al die bewegingen slechts één prikkelbaar orgaan zou behoeven te bezitten.

Zelfs voor de transversaal-heliotropie zoude dan geen uitzondering behoeven gemaakt te worden: wanneer men toch bedenkt dat een statisch apparaat zonder statolithen (zetmeelkorrels) niet voor zwaartekracht prikkelbaar kan zijn, maar zijn lichtgevoeligheid onveranderd kan behouden, dan zou het lichtgevoelig apparaat van Haberlandt, waarin steeds de zetmeelkorrels ontbreken, zeer goed met dat statisch apparaat (mits het in dit geval niet verschuifbaar is) identiek kunnen zijn, want beide oefenen op de groeiverschijnselen in de gewrichten enz. een volkomen gelijken invloed uit.

Uit het bovenstaande moge blijken dat de voorstelling van het voorkomen van een, verplaatsbaar, statisch apparaat in de statocysten een zóó groot voordeel oplevert bij de beschouwing en de groepeering der auxotonische bewegingen, dat deze als onderzoekingshypothese recht van bestaan heeft, en tevens dat er, wellicht, bij de plant (en bij het dier?) een algemeen streven tot versterking van de prikkeling bestaat, dat later bij een verklaring van het tot stand komen der doelmatige bewegingen van dienst zou kunnen zijn.

Leiden, 23 Januari 1923.

Geologie. — H. A. Brouwer en L. F. de Beaufort: „*Tertiaire mariene afzettingen met fossiele visschen van Zuid-Celebes.*"

Het geologisch voorkomen en de ouderdom der afzettingen door H. A. Brouwer.

Bij den wegaanleg in Zuid-Celebes werd in 1919 bij het schieten in kalkrotsen bij Patoenoeang Asoe E aan de oppervlakte van een der losgekomen blokken een fossiele visch gevonden, waarvan slechts de helft met den staart in het blok voorkomt. De bij den wegaanleg werkzame ingenieur der B. O. W., A. Huisman, zond mij onlangs deze helft toe met de mededeeling, dat alle moeite om ook het andere gedeelte met den kop te vinden tevergeefs was geweest. De door hem opgegeven vindplaats is Patoenoeang Asoe E, Afdeeling Maros, aan den voet van steile rotsen op een hoogte van ongeveer 50 Meter boven zee.

Bij het formatiseeren [1]) werd in het mij toegezonden stuk van dezen vrij gemakkelijk volgens het laagvlak splijtenden kalksteen nog een tweede veel vollediger vischrest gevonden. Beide werden door Dr. L. F. de Beaufort onderzocht en de resultaten van zijn onderzoek zijn hieronder nader beschreven.

Het gesteente, dat de *Clupea* en *Lutjanus* bevat is een witte tot zwak bruinachtig getinte, wat afgevende en dichte kalksteen, gelijkend op sommige typen van lithographischen kalksteen, welke zooals bekend in de nabijheid van Solnhofen en Eichstätt in Franken de beroemde vindplaatsen van boven-jurassische fossielen hebben geleverd, waaronder ook talrijke visschen voorkomen. Microscopisch onderzochte praeparaten van den kalksteen vertoonen een dichte calcietmassa, waarin geen organische resten, ook geen foraminiferen voorkomen.

Ook wat het geologisch voorkomen betreft vertoonen de gesteenten van Celebes veel overeenkomst met de lithographische kalksteenen van den boven-jura in Franken. Laatstgenoemde gesteenten komen voor met rifkalken, welke als gescheiden riffen rusten op de oudere lagen, terwijl de tusschengelegen depressies met gelaagde afzettingen zijn opgevuld.

Bij Solnhofen, etc., waar tevens de beste lithographische kalk-

[1]) Door Dr. P. Kruizinga, conservator te Delft.

steenen gevonden worden, zijn in deze gelaagde afzettingen zeer verschillende en fraai bewaarde organische resten gevonden. Resten van zoet- of brakwaterdieren ontbreken, de resten en loopsporen van landbewoners komen echter veelvuldig in de formatie voor, waaruit mag worden afgeleid, dat hier in den boven-jura een zee met koraaleilanden en riffen (waarvan gedeelten tijdelijk werden drooggelegd) aanwezig was.

Soortgelijke verhoudingen gelden voor het gedeelte van Zuid-Celebes, waarvan de hier beschreven gesteenten afkomstig zijn. Uit eigen aanschouwing zijn mij de kalkrotsen bij den waterval Bantimoeroeng, niet ver van de vindplaats Patoenoeang Asoe E bekend, en de talrijke auteurs, die over andere gedeelten van Zuid-West-Celebes hebben geschreven, vermelden allen deze kalkrotsen, welke dikwijls met verticale wanden plotseling uit het omgevende terrein omhoogrijzen en een typische rifvorming voorstellen.

Aan den opbouw dezer rifkalksteenen nemen talrijke foraminiferen deel, doch ook koralen en schelpen komen voor. Ook gesteenten met oölietische structuur worden vermeld en met de thans bekend geworden kalksteenen, welke de fossiele visschen bevatten en misschien een lagunaire afzetting voorstellen, zien we dus ook hier verschillende sedimenten vereenigd, waarvan de facies de kenmerken van afzettingen in een zee met riffen en lagunen vertoont.

Over den juisten ouderdom dezer gesteenten zijn vooral door Bücking[1]) en Verbeek[2]) en later door 't Hoen[3]) gegevens bekend geworden. We weten thans, dat hieronder zoowel eoceene kalksteenen met nummulieten en discocyclinen als mioceene met lepidocyclinen voorkomen.

Uit de directe omgeving van de vindplaats der fossiele visschen zijn tot nu toe geen foraminiferenhoudende kalksteenen beschreven; de het dichtst in de nabijheid onderzochte gesteenten zijn die van de rotsen bij den waterval van Bantimoeroeng ten Oosten van Maros, waarin cycloclypeën te zamen met alveolinen voorkomen, welke misschien aan de grens van eoceen en oligoceen werden afgezet. We vermeldden reeds, dat op verschillende plaatsen met de oud-tertiaire gesteenten ook oligo-mioceene kalksteenen voorkomen.

---

[1]) H. Bücking. Beiträge zur Geologie von Celebes. Samml. d. geol. Reichsmus. in Leiden. Ser. I. Bd. VII. I. 1902. blz. 118 e.v.

[2]) R. D. M. Verbeek. Molukken Verslag. Jaarb. Mijnwezen 1908. Wetensch. Ged. blz. 52 e.v.

[3]) C. W. A. P. 't Hoen. Verslag over de resultaten van geol. mijnbouwk. verkenningen en opsporingen in Zuidwest-Celebes. Jaarb. Mijnwezen 1915. Verhand. I. blz. 244 e.v.

Voor de twee thans bekend geworden fossiele visschen bestaan zeer weinig aanknoopingspunten met de fauna van andere gebieden om den ouderdom met nauwkeurigheid te kunnen vaststellen. De gevonden *Clupea* (*Sardinella*) is zeker en de *Lutjanus* is vermoedelijk nauw verwant met recente soorten. In verband hiermede zou men dus geneigd zijn, om tot een jongen ouderdom der afzettingen te besluiten. Maar onder de vele haringen bv., welke uit het tertiair van Europa en Amerika zijn beschreven zijn er geene bekend, welke met *Sardinella* nadere verwantschap vertoonen. Dit kan in verband staan met de accentuatie der klimaatgordels; Verbeek[1]) heeft hierop gewezen in verband met het feit, dat de eoceene vischsoorten der Padangsche Bovenlanden verschillend zijn van de tertiaire soorten in Europa, terwijl ze een groote overeenstemming vertoonen met de nu nog in den Oost-Indischen archipel levende soorten, zoodat ze meer een mioceen dan een eoceen karakter hebben. Hieruit zou volgen, dat de tertiaire visschen der tropen weinig voor ouderdomsbepaling geschikt zijn en dat de hier beschreven soorten zeer goed uit een gewijzigde facies der boven vermelde rifkalksteenen van eoceenen en oligo-mioceenen ouderdom afkomstig kunnen zijn.

Wij willen er ten slotte op wijzen, dat deze geisoleerde vondst van fossiele visschen, waaromtrent nog zeer weinig in den Oost-Indischen archipel bekend is, doet verwachten, dat bij een nauwkeurig onderzoek der vindplaatsen meerdere vondsten zullen worden gedaan. De lithographische kalksteen van Solnhofen is arm aan fossielen en slechts als gevolg van het zeer intensieve steengroevenbedrijf en van de aandacht aan het voorkomen van versteeningen besteed, is geleidelijk de merkwaardige fauna dezer formatie bekend geworden.

Beschrijving der fossiele visschen door L. F. de Beaufort.

Prof. H. A. Brouwer vertrouwde mij de bewerking toe van twee visch-fossielen, in kalksteen van tertiairen ouderdom ingesloten, die bij gelegenheid van een wegaanleg in Zuid-Celebes gevonden werden.

Het kleinste en meest volledige fossiel is dadelijk als dat van een *Clupeide* te herkennen. Daar het voorste gedeelte van den kop zoowel als pectoralen, ventralen en anale ontbreken, zou een nadere determinatie zeer twijfelachtig zijn geweest, indien de schubben niet bijzonder goed bewaard waren gebleven. Deze schubben, althans het meerendeel daarvan, vertoonen in hun achterste helft een aantal kleine gaatjes, terwijl het voorste deel meer of minder duidelijke

[1]) R. D. M. Verbeek. Topographische en Geologische Beschrijving van een gedeelte van Sumatra's Westkust. Batavia 1883, blz. 355.

dwarsgroeven bezit, die in het midden onderbroken zijn. Voor zoover mij bekend, worden dergelijke geperforeerde schubben slechts gevonden bij een viertal nauw verwante recente haring-soorten, die in den Indo-Australischen Archipel leven.

Deze soorten behooren tot het geslacht *Clupea* sensu latiore en zijn door WEBER en mij (Fishes of the Indo-Australian Archipelago II, 1913, p. 68) in navolging van BLEEKER met een aantal andere soorten, die evenwel de genoemde kenmerken niet vertoonen, tot het subgenus *Harengula* gebracht. TATE REGAN (Ann. Mag. Nat. Hist. (8) XIX, 1917, p. 377) heeft dit subgenus tot den rang van een genus verheven en daarvan als *Sardinella* die soorten afgescheiden, welke behalve in eenige andere kenmerken van *Harengula* afwijken door de struktuur der schubben. In *Harengula* loopen de dwarsgroeven der schubben van boven tot onder door, in *Sardinella* zijn zij in het midden onderbroken. De bovenbedoelde soorten met geperforeerde schubben hebben, evenals mijn fossiel, ook onderbroken dwarsgroeven op de schubben en worden dan ook door TATE REGAN tot zijn genus *Sardinella* gerekend. Het is duidelijk, dat daartoe ook het onderhavige fossiel behoort. TATE REGAN vermeldt in zijn korte beschrijving de gaatjes in de schubben niet en ik weet dus niet, of bij sommige der overige soorten, die hij tot *Sardinella* brengt, en die voorkomen in de Atlantik, Middellandsche en Zwarte Zee, Indik en Pacifik, dergelijke doorboorde schubben gevonden worden. Uit het voorgaande zal evenwel duidelijk zijn, dat de soorten met dergelijke schubben een natuurlijke groep vormen en dat daartoe ook het fossiel gebracht dient te worden, dat ik thans zal beschrijven onder den naam van

Clupea (*Sardinella*) *brouweri* n.sp.

De totale lengte van het exemplaar is niet aan te geven, zoowel doordat het praeorbitale gedeelte van den kop ontbreekt, alsook omdat de wervelkolom op verschillende plaatsen gebroken is, sommige wervels over elkaar zijn geschoven en andere uiteen geraakt zijn. Naar schatting zal de lengte 150 mM. bedragen. Het aantal wervels laat zich ook moeilijk tellen. Ik meen er 42 te kunnen onderscheiden, wat iets minder is dan de getallen, door TATE REGAN l.c. voor *Sardinella* opgegeven. DELSMAN (Bijdragen tot de Dierkunde, Afl. XXII 1922, p. 29) geeft voor *Clupea fimbriata*, een der soorten met doorboorde schubben, 45 als het aantal der wervels op.

Van den schedel is eigenlijk alleen het kieuwdeksel en een deel der orbitalia goed bewaard gebleven. Het operculum vertoont in

zijn ventrale deel fijne vertikale streepen, door huidzintuig-kanalen veroorzaakt en die o.a. ook, ofschoon in eenigszins anderen vorm, bij *Clupea fimbriata* en *perforata* worden aangetroffen. Ook het praeoperculum vertoont eenig relief. Onder gunstige belichting zijn op dit beenstuk fijne van uit één punt uitstralende lijnen te ontdekken, die ik bij de recente soorten niet in die mate aantref. Het operculum is niet geheel twee maal zoo hoog als lang.

De stralen van de dorsale zijn niet met zekerheid te tellen, doordat een gedeelte van de schubben van den rug over deze vin zijn gegleden. Ik meen er 15 te kunnen onderscheiden. Ook de ligging van de rugvin is niet precies aan te geven, daar, zooals boven gezegd, de wervelkolom verwrongen is. De oorsprong van de dorsale ligt ongeveer in het midden tusschen snuit en basis van de caudale en boven den 27sten wervel, van den staart af gerekend. De langste D. straal is ongeveer gelijk aan de hoogte van het operculum.

De geheele ventrale helft van den visch is zwaar beschadigd, zoodat over de anale en de ventralen niets te zeggen valt. Van de pectoralen en van den schoudergordel zijn slechts eenige resten over.

Zooals boven reeds gezegd, is het schubkleed goed geconserveerd, ofschoon de meeste schubben van hun plaats verschoven zijn in dorsale richting en sommige geheel geisoleerd zijn, wat hunne bestudeering evenwel vergemakkelijkt.

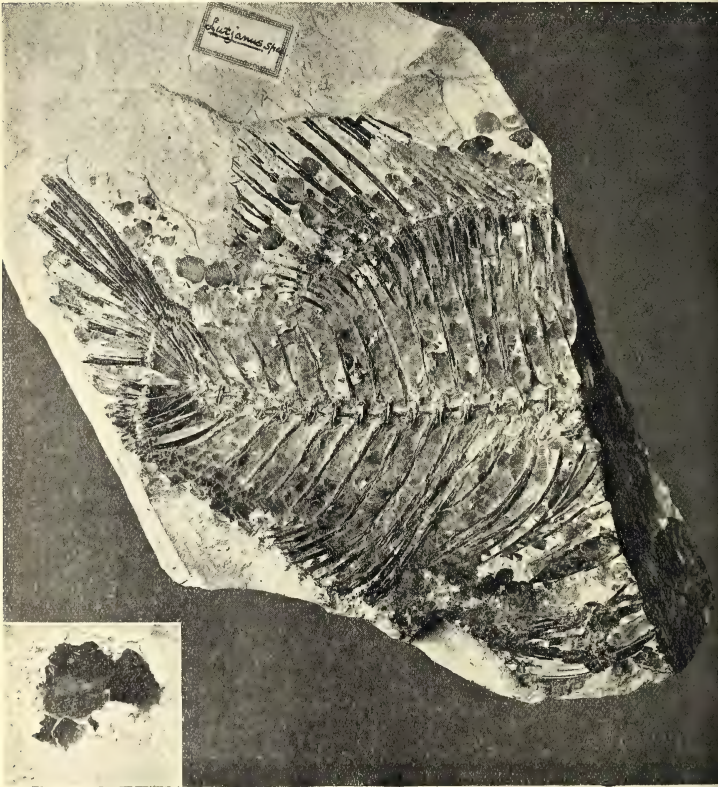
Wanneer wij de schubben vergelijken met die van de naast verwante recente soorten, vinden wij de grootste overeenkomst met die van *Clupea perforata* en *fimbriata,* welke echter doorboringen van grootere afmetingen hebben. Ook is de achterrand der schubben in deze soorten meer gerafeld. De eerste, doorloopende dwarsgroef is op alle schubben van mijn exemplaar zichtbaar, de volgende onderbroken groeven (ongeveer 3 in getal) zijn vooral op de schubben van den staart ontwikkeld. Overigens zijn de schubben nagenoeg glad; slechts hier en daar zijn wat fijne evenwijdige streepjes zichtbaar.

Zooals te verwachten viel, zijn er geen gekielde rugschubben. De gekielde buikschubben zijn gedeeltelijk zeer goed bewaard gebleven maar alle zijn van hun plaats gerukt en verspreid, zoodat hun aantal niet is na te gaan. De dorsaal gerichte uitloopers van de buikschubben of buikdoorns zijn hier en daar zeer fraai te zien. Zij schijnen mij korter toe dan bij de recente soorten. Mogelijk zijn zij afgebroken.

C. (*S.*) *brouweri* komt het meest overeen met *C. fimbriata* en *perforata,* doch wijkt daarvan af door andere skulptuur op de kieuwdeksels en door kleine verschillen in de schubben.

De determinatie van het tweede fossiel is minder zeker. Dit bestaat

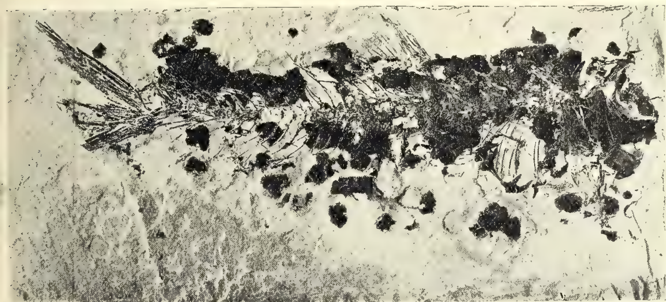
uit het achterste deel van een visch, die ongetwijfeld tot de *Perciformes* behoort. Het grootste gedeelte van de staartvin, alle staartwervels, eenige ribdragende rompwervels, alle pterygophoren van



a Schubben van *C. (S.) brouweri* × 2.   *b* *Lutjanus* spec. × 1/2.

de anale zoowel als die van het achterste deel van de dorsale zijn prachtig en in situ bewaard gebleven. De anale zelf is afgebroken. Van de dorsale is het gedeelte, hetwelk uit zachte stralen bestaat, behouden gebleven, daarentegen zijn slechts eenige stekels van het

voorafgaande deel aanwezig. Het voorste deel van den visch ontbreekt. De ventralen en een deel van het bekken zijn nog juist gespaard. Van den schoudergordel is het caudale deel van het postcleithrum



Clupea (Sardinella) brouweri n. sp. × 1.

zichtbaar. De rompwervels dragen lange parapophysen, waaraan de ribben zijn bevestigd. Er zijn 14 caudaalwervels. De caudale heeft 17 stralen, waarvan vermoedelijk 2 ongedeeld zijn. De dorsale heeft $x + 3$ stekels en 17 weeke stralen, de anale 11 en de ventrale 6 stralen.

De schubben zijn gedeeltelijk buitengewoon goed geconserveerd. Zij zijn min of meer rechthoekig, met convexen achterrand. Van het centrum loopen een 10 tal groeven divergeerend naar den voorrand. Naar den achterrand loopen een groot aantal evenwijdige dichtopeenstaande rijen van uiterst fijne platte stekeltjes. Overigens wordt het oppervlak van de schub bedekt door fijne, concentrisch om het middelpunt gerangschikte lijntjes, die telkens tusschen de groeven naar buiten uitbuigen.

Met deze weinige gegevens nu moest een nadere determinatie beproefd worden. Een eerste aanwijzing was daarbij het groote verschil in aantal weeke stralen van dorsale en anale. Daardoor vielen een aantal vormen weg, waarin tweede dorsale en anale van ongeveer gelijke lengte zijn. De struktuur van de schubben bracht mij nu verder op den goeden weg, tot ik aanlandde bij het recente genus *Lutjanus.* Wel is waar hebben de meeste soorten van dit genus minder D-stralen dan mijn exemplaar, maar bij enkele is dit ongeveer gelijk, o.a. bij *Lutjanus sebae*, die ik nu voor verdere vergelijking koos. Een skelet, van deze soort vervaardigd, vertoonde tot in bijzonderheden zulk een overeenkomst met mijn fossiel, dat

ik er nauwelijks aan twijfel, of ook dit behoort tot het genus *Lutjanus*.

Wat kunnen deze beide fossiele visschen ons nu leeren omtrent den ouderdom der afzettingen, waarin zij gefossiliseerd zijn?

Voor zoover mij bekend, zijn uit onzen Archipel geen andere fossiele tertiaire Teleostei bekend, dan die uit een zoetwaterafzetting in tertiaren tijd van de Padangsche Bovenlanden, door GÜNTHER (Geol. Mag. (2) III, 1876) indertijd beschreven. Ook uit de naaste omgeving is niets bekend geworden, wat een aanknooping aan onze fossielen zou kunnen geven. Noch onder de visschen, uit het Tertiair van Australië bekend (CHAPMAN en PILCHARD, Pr. Roy. Soc. Victoria (2) XX 1907), noch onder die van Siam (ANDERSSON, Upsala Bull. Geol. Inst. XIII, 1916) komt een *Lutjanus* of een *Sardinella* voor. De Clupeide, die JORDAN (Proc. Cal. Acad. of Sciences IX, 1919) onlangs uit Japan beschreef, is met de onze niet verwant. Het is zelfs twijfelachtig, of het een haringachtige visch is.

Ook onder de vele haringen, uit het tertiair van Europa en Amerika beschreven is er mij geen bekend, die tot *Sardinella* nadere verwantschap vertoont. Van *Clupea numidica*, van het boven mioceen van Algiers, geeft SMITH Woodward (Cat. Fossil Fishes British Mus. IV, 1901, p. 152) op: „Scales sometimes pitted in their exposed portion". Dit is evenwel nog wat anders dan doorboord. Daarenboven heeft *C. numidica* 55 wervels.

Van het genus *Lutjanus* is geen andere fossiele vertegenwoordiger bekend dan een twijfelachtige soort *Lutjanus hagari* door JORDAN en GILBERT (Stanford University Publications 1919) uit het mioceen van Californië beschreven en later door JORDAN tot het verwante genus *Neomaenis* gebracht.

Een oordeel over den ouderdom van de beide vischresten kan daarom niet anders dan een gissing zijn. Wanneer wij bedenken, dat in het mioceen de meeste recente genera nog niet aanwezig zijn, waarop JORDAN (Stanford Univer. Publ. Biological Sciences I, 1921, p. 237) onlangs nog gewezen heeft en wanneer wij verder bedenken dat de in Celebes gevonden *Sardinella* zeker, en de *Lutjanus* vermoedelijk nauw verwant is met recente soorten, dan zou ik op die gronden geneigd zijn hun ouderdom niet hooger dan mioceen te stellen.

De beide visschen werden in één steen van ongeveer 40 × 20 × 6 cM. gevonden. Daarenboven komen er nog enkele vischschubben van andere soorten in voor, aan de determinatie waarvan ik mij niet waag. Dit wijst er op, dat deze lagen vermoedelijk rijk aan vischresten zijn. Een verdere exploratie daarvan zou dan ook zeker loonend zijn en ons vastere gegevens kunnen verschaffen over den ouderdom en den aard dier afzettingen.

Geologie. — H. A. Brouwer: „*Breuken en verschuivingen nabij de oppervlakte van bewegende geanticlinalen.* III. *De horizontale beweging van den Middel-Atlantischen rug*".

Vele verklaringen, welke voor den tektonischen bouw zijn en worden gegeven zijn onvolkomen door de geometrische behandeling der vraagstukken en door een, onze beschouwingswijze eigen, voorkeur voor vertikale bewegingen. De geometrische behandeling brengt mede, dat de verplaatsing en niet de beweging op den voorgrond wordt gesteld, waarbij dus het tijdsbegrip geheel of gedeeltelijk wordt verwaarloosd. Bij de voorkeur voor vertikale bewegingen worden de natuur onze vooroordeelen opgelegd, totdat de waargenomen feiten bewijzen, dat verplaatsingen in een andere richting moeten hebben plaats gehad.

In gebieden, die niet voor directe waarneming toegankelijk zijn, dat zijn dus b.v. de door zee bedekte gedeelten der aardkorst, zien wij dan ook verklaringswijzen voor het bestaande relief door rijzende of dalende bewegingen onder verwaarloozing van het tijdsbegrip door vele onderzoekers gegeven. De verbrokkeling van continenten en het verzinken van landbruggen zijn veel gebruikte uitdrukkingen, die het bovenstaande illustreeren. Snelheid en richting der beweging komen bij deze onvolkomen verklaringen van dynamische verschijnselen weinig of niet ter sprake. De reden ligt voor de hand, de krachten, welke de beweging veroorzaken, zijn onbekend en de snelheid der beweging is niet te meten.

Een andere methode ter behandeling dezer vraagstukken is de vergelijkend-tektonische. Het doel dezer mededeeling is om na te gaan, tot welk resultaat de toepassing dezer methode ons voert voor de beweging van een gebied, dat bijna geheel door zee is bedekt, waarvan de morphologie ons in groote trekken bekend is en waarvan wij door talrijke bevingen weten, dat het thans in beweging verkeert. Het is de S vormige rug, waarvan het bestaan door loodingen is aangetoond, en waarvan gedeelten zich boven het zeeniveau verheffen, zooals b.v. de Azoren en de eilanden St. Paul en Tristan da Cunha. In vorige mededeelingen [1]) is door ons op de beteekenis

---

[1]) Deze Verslagen XXVII, blz. 1155 en XXXI, blz. 403.

H. A. Brouwer. The horizontal movement of geanticlines and the fractures near their surface. Journ. of Geology. 1921, XXIX, blz. 560—577.

gewezen van de buigpunten der horizontale projectie eener geanticlinaalas voor de beoordeeling der horizontale beweging van geanticlinalen. Transversale breuken, welke meer of minder gapend kunnen zijn, ontstaan nabij de oppervlakte door snelheidsverschillen in horizontale richting, horizontale transversaalverschuivingen langs gesloten breukvlakken treden op grootere diepte meer op den voorgrond, terwijl bij toeneming der plasticiteit vormverandering en beweging zonder breukvorming plaats vinden. Zijn deze tektonische dieptezones alle aan de oppervlakte zichtbaar, dan maken zij het mogelijk de beweging gedurende een langen tijdsduur te vervolgen, daar dan verschillende phasen der beweging voor waarneming toegankelijk zijn. Duren ook thans de bewegingen nog voort, dan zullen de epicentra van aardbevingen nabij de plaatsen met sterke snelheidsverschillen zijn opgehoopt en langs min of meer transversale breuken kunnen zijn gerangschikt. We wijzen op de omgeving van Straat Soenda tusschen Java en Sumatra, de aardbevingslijnen nabij het buigpunt tusschen Alpen en Karpathen, Cooks Straat tusschen het Noord- en het Zuid eiland van Nieuw-Zeeland en vele andere meer.



Fig. 1. 2978 etc. Zeediepten in meters op den Middel-Atlantischen rug.

Indien nu een onderzeesche rug een buigpunt vertoont, dan kan de vorm van den rug een gevolg zijn van snelheidsverschillen in horizontale richting, waardoor een oorspronkelijk eenvoudiger vorm

zich tot den sterker gebogen vorm heeft ontwikkeld. Waar de snelheidsverschillen het grootste zijn, zullen de epicentra van aardbevingen zich ophoopen en omgekeerd kan uit een ophooping van epicentra nabij een buigpunt worden afgeleid, dat snelheidsverschillen in horizontale richting een kenmerk zijn der thans plaatsvindende beweging.

De Middel-Atlantische rug vertoont een duidelijk buigpunt tusschen het eiland St. Paul en het Romanche diep en een zone van hoogste seismische activiteit bevindt zich juist in de nabijheid. Bij verdere toepassing der vergelijkende methode zou dit tot de gevolgtrekking leiden, dat de Middel-Atlantische rug zich niet alleen thans, maar ook reeds langen tijd met snelheidsverschillen in horizontale richting beweegt. De bouw van den rug is niet voor waarneming toegankelijk, zoodat deze gevolgtrekking niet door de tektoniek kan worden bevestigd. Maar er zijn toch aanwijzingen, dat de vergelijkende methode hier verder kan worden toegepast. Al is ook de morphologie nog weinig bekend, toch hebben de loodingen het plaatselijk voorkomen van zeer groote zeediepten aangetoond, nl. in het Romanche diep, waar tot 7370 Meter is gelood.

Deze diepte wordt wel als een merkwaardigheid en als een voor den Atlantischen Oceaan vreemdsoortig verschijnsel betiteld. De ligging *in de nabijheid van het buigpunt* maakt een ontstaanswijze mogelijk, zooals die door ons reeds vroeger is gegeven voor abnormaal diepe zeestraten nabij de buigpunten van eilandenreeksen, waarbij dus evenals b.v. bij Straat Manipa tusschen Ceram en Boeroe, gapende breuken, ontstaan door snelheidsverschillen in horizontale richting, tot het ontstaan der zeediepte hebben medegewerkt.

We vinden slechts de gevolgen der snelheids*verschillen* in horizontale richting, over de absolute horizontale beweging kan ook met behulp der vergelijkende methode niet worden geoordeeld. We weten niet of de Middel-Atlantische rug oorspronkelijk een meer rechtlijnig verloop heeft gehad. Ook weten we niet of het sterk uitgebogen gedeelte tusschen de Azoren en St. Paul thans nog verder wordt uitgebogen, of dat het zuidelijke stuk met Ascension en Tristan da Cunha met geringere snelheid dan het noordelijke in westelijke richting, of in oostelijke richting beweegt, of misschien thans in een min of meer stabiele phase verkeert.

Voor het ontstaan van den Middel-Atlantischen rug zijn vele en sterk uiteenloopende verklaringen gegeven. Sommige auteurs[1]) beschouwen den rug als een rijzende geanticlinaal, als een ketenge-

---

[1]) E. Haug, Traité de Géologie I, 1907, blz. 164.

bergte in statu nascendi. Van horizontale bewegingen, welke, zooals wij reeds vroeger aantoonden, bij rijzende geanticlinalen de vertikale beweging dikwijls verre overtreffen, was bij deze verklaringswijze tot nu toe geen sprake. Ook is de rug verklaard [1]) als een vroegere slenkbodem, waarbij wordt aangenomen, dat de Atlantische Oceaan door horizontale beweging der begrenzende continenten uit een betrekkelijk smalle spleet is ontstaan, waarvan de opvulling bij de verdere opening der spleet te zamen bleef en steeds ongeveer in het midden tusschen beide continenten.

Beide verklaringen, ook de eerste, veronderstellen voor den rug bewegingen, die met snelheidsverschillen in horizontale richting kunnen plaats vinden. Andere verklaringen, zooals het ontstaan als vulkanische vorming of als de meer of minder diep verzonken rest van een vroegere landmassa, dus als horst, houden geene rekening met horizontale bewegingen. Vertikale bewegingen kunnen zeer goed plaats vinden en plaats gevonden hebben, misschien op sommige plaatsen in stijgende op andere in dalende richting en wisselend voor verschillende tijden, omdat geen beweging der aardkorst gedurende langeren tijd nauwkeurig loodrecht op het schietlood zal staan, zooals ze evenmin nauwkeurig met het schietlood zal samenvallen.

De vergelijkend-tektonische methode stelt ons niet in staat om de beweging van den Middel-Atlantischen rug vanaf zijn vroegste ontwikkelingsstadiën te vervolgen. Ze leert ons echter, dat de verklaringen met behulp van vertikale bewegingen, welke zoowel in rijzende als in dalende richting voor de verklaring van het ontstaan van den rug zijn gegeven, in hun eenvoudigen vorm niet kunnen worden gehandhaafd.

---

[1]) A. Wegener, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. 1922, blz. 42.

Scheikunde. — O. DE VRIES (Correspondent der Afdeeling): „*Over de coagulatie van Hevea latex.*"

(Aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

I. *Invloed van de mengverhouding van latex, water en zuur; onregelmatige reeksen.*

Uit enkele vroegere onderzoekingen was bekend, dat de coagulatie van Hevea latex met zuren onregelmatigheden vertoont. De waarnemingen van verschillende onderzoekers, die wij in een latere paragraaf (§ 9) in het kort zullen bespreken, waren echter slechts te hooi en te gras gedaan en gaven geen behoorlijk inzicht in de verschijnselen; het leek ons daarom wenschelijk door een systematisch onderzoek over het volledige menggebied latex-water-zuur een samenvattend beeld van de verhoudingen te verkrijgen.

§ 1. *De latex.*

Hevea latex is een melkachtige vloeistof, die onder het microscoop blijkt te bestaan uit ½ tot 2 μ groote, ovale bolletjes, die levendige Brownsche beweging vertoonen; af en toe komen deeltjes van wat minder eenvoudigen vorm voor. Het feit dat men niet met bolvormige deeltjes te doen heeft wijst er op dat latex niet een systeem vloeibaar: vloeibaar, een emulsie in den zin van WO. OSTWALD's indeeling is. Aan den anderen kant mag men ook niet van vloeibaar: vast (suspensie) spreken; de eigenschappen van het onder verschillende omstandigheden verkregen coagulum maken het waarschijnlijk dat de rubberdeeltjes in latex een boterachtige consistentie hebben, dus tusschen vloeibaar en vast in. Of men daarbij te denken heeft aan een min of meer vloeibare kern besloten in een vaster oppervlaktehuidje, zooals door sommige onderzoekers wordt aangenomen, moge hier in het midden gelaten worden. Past men FREUNDLICH's indeeling der colloiden op latex toe, dan is deze ongetwijfeld een lyophiel colloid, getuige het bij coagulatie verkregen waterhoudende volumineuze gel en het gedrag van de latex tegenover wateronttrekkende en uitzoutende stoffen; aan den anderen kant is het waterbindend vermogen van de rubberbolletjes zeker slechts beperkt, en doet het

melksap in zijn gedrag tegenover een-, twee- en driewaardige anionen sterk aan lyophobe colloiden denken. Ook bij deze indeeling neemt latex dus een tusschenplaats in. De tamelijk gecompliceerde eigenschappen van het melksap zijn trouwens begrijpelijk wanneer men bedenkt, dat het een plantensap is, waarin behalve de rubberkoolwaterstof ook eiwitten, harsen en andere colloiden een rol spelen en elk op hun beurt op den voorgrond kunnen treden.

Hevea latex is niet constant van samenstelling. Het rubbergehalte en het gehalte aan bijbestanddeelen hangen van vele factoren af, die veranderingen in den physiologischen toestand van den boom veroorzaken; bovendien is het tapsysteem van grooten invloed. Voorts heeft men te bedenken, dat de latex, na het tappen, voornamelijk door bacterieele omzettingen, in zuurgraad toeneemt, zelfs zoozeer, dat na een half etmaal „spontane" coagulatie intreedt.

Kiest men echter de omstandigheden met de noodige zorg, dan kost het weinig moeite om van dag tot dag een geregelden aanvoer van latex van een bepaalde samenstelling te krijgen. Men beperkt zich daartoe tot een bepaalde groep boomen, waarvan men dagelijks volgens een bepaald tapsysteem latex verzamelt, die ook overigens steeds op dezelfde wijze behandeld wordt. De weersomstandigheden, de eenig overgebleven wisselvallige factor, zijn dan van geen beteekenis, wanneer men de latex uitzondert van dagen, dat de stammen 's ochtends nog nat waren na nachtregens, of dat de latex verregent door een vroeg gevallen bui.

Door deze voorschriften strikt in acht te nemen konden wij bij series waarnemingen, die over meerdere weken liepen, bij de hier te beschrijven coagulatie-proeven zeer behoorlijk constante resultaten verkrijgen. Komt men echter later op zulke waarnemingen terug met latex van een andere groep boomen, of een ander tapsysteem, dan kloppen de kwantitatieve gegevens niet meer precies, al blijft het algemeen verloop der verschijnselen hetzelfde. Enkele voorbeelden van de daardoor ontstaande verschillen, en ook van den invloed van den gaandeweg toenemenden zuurgraad van de latex, zullen wij in § 8 geven.

Men heeft de hier te bespreken resultaten dus zoo op te vatten, dat de hoofdtrekken van het beeld algemeen geldig zijn, maar dat de grenzen der verschillende gebieden zich eenigszins kunnen verschuiven naarmate van de latex, waarmee men werkt.

Tegenover dit nadeel, dat men met een niet constant en niet naar willekeur reproduceerbaar materiaal werkt, staat als groot voordeel het feit, dat Hevea latex in alle verhoudingen met water mengbaar is. Men kan dus alle rubbergehalten van het oorspronke-

lijke gehalte (30 à 40 %) tot de laagste toe gemakkelijk bereiden, en door seriebepalingen met afdalende hoeveelheden meer of minder verdunde latex en opklimmende hoeveelheden al of niet verdund zuur kan men zonder veel moeite het geheele gebied der mengverhoudingen doorkruisen en systematisch afzoeken. Daar de „onregelmatige reeksen" alleen bij de lagere rubbergehalten gevonden worden, lukte het om het gebied, waar deze voorkomen, geheel vast te leggen; in de meeste in de literatuur beschreven gevallen zijn de onregelmatige reeksen maar bij een of enkele concentraties onderzocht, omdat de hoogere of lagere concentraties van het colloid niet toegankelijk waren.

De latex, die voor de meeste van de hier te beschrijven waarnemingen gebruikt werd, was afkomstig van een groep vijftienjarige boomen in den proeftuin aan de overzijde van de Tjiliwoeng te Buitenzorg. De boomen werden dagelijks getapt met twee sneden over $^1/_4$ van den stamomtrek en de latex werd tusschen 10 en 12 uur v.m. voor het onderzoek gebruikt. Het rubbergehalte (bij coagulatie) wisselde van 31.0 tot 32.8 en was gemiddeld 31.8 %; de zuurgraad was 0.02—0.04 N (vergel. § 8), de aanwezige zuren zijn voornamelijk koolzuur, melkzuur en wat boterzuur[1]).

In 1922 werden aanvullende waarnemingen gedaan met latex van eenige groepen boomen in den Cultuurtuin.

§ 2. *De coagulatieverschijnselen*

Bij de verhoudingen, zooals men die in de praktijk van de rubberbereiding kiest, verloopt de coagulatie van Hevea latex langzaam; de vloeistof is na een kwartier dik geworden als een dunvloeibare pap, gaandeweg komt er meer samenhang in, en na een uur heeft zich een samenhangende koek gevormd, echter nog met melkachtig serum; pas na eenige uren is de scheiding in een stevigen koek en waterhelder serum volkomen. In andere gevallen laat men, door toevoeging van meer zuur, de coagulatie sneller verloopen, zoodat men na een uur een handelbaar coagulum verkrijgt; of wel men spaart op zuur, zoodat pas na eenige uren de eerste verschijnselen optreden en men pas den volgenden ochtend het coagulum kan verwerken. Somtijds gebruikt men de latex onverdund, maar meestal wordt met water tot een rubbergehalte van 20 of 15 % verdund, waardoor het coagulum weeker wordt en gemakkelijker te verwerken

---

[1]) Voor de samenstelling van Hevea latex in het algemeen moge verwezen worden naar „Estate Rubber, its preparation, properties and testing" door Dr. O. de Vries (Ruygrok en Co., 1920), Hoofdstuk 1 en 2.

is. Hoe meer men de latex verdunt, des te slapper wordt het coagulum en des te sterker trekt het zich na de coagulatie samen, zoodat meer serum vrij komt. Pas bij zeer sterk verdunde latices krijgt men afscheiding van een vlokkig coagulum, dat geen samenhangenden koek vormt, of pas na een of meer dagen gaandeweg samenbalt. Gebruikt men minder zuur, dan treedt de coagulatie langzaam in; maar bij afnemende hoeveelheid zuur gaat een steeds grooter rol spelen de spontane coagulatie, veroorzaakt door bacteriën, die de suikers en eiwitten ontleden onder zuurvorming. Gewone, niet gesteriliseerde latex coaguleert ook zonder eenige zuurtoevoeging steeds gedurende den eersten nacht na het tappen; het coagulum is dan sponsachtig door de gevormde gassen, en de aan de lucht blootgestelde oppervlakte is bedekt met een gele, kwalijk riekende laag van papperig afgescheiden rubber gemengd met eiwitontledingsproducten. In het gebied van zeer weinig zuur heeft men dus geen mengsels, die op den duur vloeibaar blijven; men kan de waarneming „vloeibaar" wel na een kwartier of na twee uur doen, maar men vindt na 24 uur het mengsel gecoaguleerd. De vloeibare mengsels met meer zuur, dus in wat men het tweede vloeibare gebied kan noemen, blijven onbeperkten tijd vloeibaar; soms treedt na dagen lang rustig staan een scheiding in van zeer fijne vlokjes, drijvende op een bijna helder of wittig serum, maar in ieder geval kan men na 24 uur de waarneming „vloeibaar" controleeren en bevestigen. Dit vloeibare gebied gaat in de coagulatiegebieden over door een overgangsstrook, die vooral naar de zijde van de hoogere zuurconcentraties breed is en duidelijk verschillende stadiën vertoont. Het eerste begin van coagulatieverschijnselen is, dat aan het oppervlak van de vloeistof, door verdamping aan de lucht, een dun wit vlies ontstaat, dat bij omroeren met een glasstaaf zich daaraan als een sliert vasthecht of oprolt. Nadert men het coagulatiegebied iets meer, dan wordt deze sliert dikker en klonteriger; nog verder komt men tot klontering of schifting van een grooter deel van de latex, vorming van een brij, en ten slotte van een samenhangend coagulum. Bij langer staan schrijdt de coagulatie in dit overgangsgebied verder; wat na twee uur een brij was, kan na 24 uur een coagulum geworden zijn, en een mengsel dat na twee uur slechts een dikke sliert vertoonde, is den volgenden ochtend in een brij veranderd of soms zelfs gecoaguleerd. Wat vloeibaar is in het midden van het tweede gebied blijft ook na dagen nog vloeibaar, maar „vloeibaar" op de grens van „sliertig" kan na 24 uur in sliertig veranderd zijn. „Gecoaguleerd" blijft natuurlijk na een of meer dagen zoo, behalve dan, dat het coagulum zich gaandeweg wat contraheert en harder wordt.

Het zal duidelijk zijn, dat men bij deze geleidelijke overgangen nooit scherpe grenzen voor de verschillende gebieden zal kunnen vaststellen. De gewone beoordeeling, door zacht schudden of roeren, kan niet anders dan globaal zijn. Wij hebben nagegaan of met het microscoop misschien scherpere criteria konden gevonden worden, maar het bleek, dat de vorming van klompjes van eenige of vele rubberbolletjes ook zeer geleidelijk zonder scherpe overgangen verliep, en dat het afnemen en tot stilstand komen van de Brownsche beweging evenmin een scherpe afgrenzing mogelijk maakte.

Wij hebben ons dus bij de meeste serieproeven tot beoordeeling op het oog, met de roerstaaf, beperkt, en dit alleen hier en daar door microscopische waarnemingen aangevuld. Korten tijd, ongeveer een kwartier, na het toevoegen van het zuur, werd de eerste beoordeeling gedaan, die in sommige gebieden al afdoende is. De hoofdwaarneming volgde twee uur nadat het mengsel gemaakt was, en deze werd den volgenden ochtend gecontroleerd, namelijk of dan een zooveel verder gevorderd stadium bereikt was als men van den toestand, zooals die twee uur na de zuurtoevoeging was, mocht verwachten. Om een voldoende overzichtelijk geheel te krijgen hebben wij in de volgende paragrafen de waarnemingen eenigszins vereenvoudigd weergegeven; aan de klassificaties „slierten", „geschift", „brij" en „coagulatie" is dus de beteekenis toe te kennen van geleidelijk in elkaar overgaande afscheidingstoestanden zooals die boven geschetst zijn.

In den regel werd met 50 cc. vloeistof per bepaling gewerkt, die in een bekerglaasje open aan de lucht bleef staan tot den volgenden dag, voor de laatste controle-waarneming. Bij zeer kleine hoeveelheden zuur werd het mengsel van latex en water met een maatcylinder afgemeten en het zuur uit een buret toegevoegd; de aflezing van de verdunde latex behoefde dan niet nauwkeuriger dan op $^1/_2$ of 1 cc. te geschieden, maar het zuur moest nauwkeurig tot op een druppel afgemeten worden, vooral bij de zeer verdunde latices waar de coagulatiestrook smal en scherp begrensd is. Bij mengsels met grootere hoeveelheden zuur werd steeds de al of niet verdunde latex met het al niet verdunde zuur gemengd in zoodanige hoeveelheden, dat het totaalvolume 50 cc. was, terwijl de vloeistof, die meer dan de helft van het totaalvolume uitmaakte, het eerst werd ingeschonken en de andere daarbij gevoegd. Vooral in het gebied van zeer veel zuur, of bij het gebruik van sterk zuur, moet men direct zeer krachtig roeren, zoodat niet plaatselijk coagulatie plaats heeft, daar hierdoor zuur ingesloten zou worden, dat bij verder roeren niet meer vrij komt, zoodat men een verkeerd beeld zou krijgen. Door een-

4

zelfde eindmengsel te bereiden, uitgaande van latices van verschillende verdunningen en zuren van verschillende sterkte, kan men de waarnemingen echter op bevredigende wijze controleeren.

Het is, door den toenemenden eigen zuurgraad van de latex, niet wenschelijk deze langer dan een uur of twee voor de waarnemingen te gebruiken: wij deden alleen bepalingen tusschen 10 en 12 uur v.m., maar in dien tijd kan men gemakkelijk eenige series, in totaal een dertig- tot vijftigtal mengsels gereed maken, zoodat men in vrij korten tijd door vele honderden waarnemingen het geheele menggebied in alle richtingen kan afzoeken.

Het werken in kleine bekerglaasjes, die open aan de lucht bleven staan, geeft natuurlijk een zekere verdamping en daardoor dikwijls de vorming van een oppervlaktehuidje van gecoaguleerde rubber, dat zich bij het omroeren als een vlies of klompje aan de roerstaaf hecht. Oogenschijnlijk geeft dit een ongewenschte complicatie; maar voor het onderscheiden van verschillende vloeibare mengsels bleek deze vliesvorming juist een gemak, omdat men de vloeistoffen met een neiging tot uitvlokken er door herkennen kan. Door eenige series te herhalen in Erlenmeyer-kolfjes, die met een kurk afgesloten werden, hebben wij ons overtuigd, dat deze vliezen inderdaad door verdamping aan de oppervlakte ontstaan.

§ 3. *Zoutzuur.*

Het makkelijkste overzicht over de verschijnselen bij verschillende verdunningen en verschillende hoeveelheden zuur verkrijgt men door deze in te schetsen in de bekende driehoekfiguur. Als hoekpnnten (componenten) kiezen wij daarbij water, sterk zoutzuur (9.14 N) en onverdunde latex, dat is dus een vloeistof met 31.8 °/₀ coaguleerbare rubber, ongeveer 35 °/₀ totaal vaste stof en ongeveer 65 °/₀ water, en met een zuurgraad van ongeveer 0,03 N. Een omrekening van de uitkomsten, zoodat die uitgedrukt worden als hoeveelheid zuur resp. rubber tegenover de totale vloeistof (verdunningswater plus serum) kan toch nooit nauwkeurig zijn door de adsorptieverschijnselen en heeft, wat rubber betreft, weinig beteekenis, daar coaguleerbare rubber een stof is, die zoovele bijbestanddeelen in kleine hoeveelheid bevat.

In bijgaande figuur 1 geven de lijnen aan hoe de verschillende mengsels ontstaan zijn door latex en zoutzuur van verschillende verdunningen bij elkaar te voegen. Met een kruisje zijn aangegeven de mengsels waarin na twee uur een behoorlijk samenhangend coagulum gevormd was. Zooals men ziet, beslaat dit gebied bijna

den geheelen driehoek; alleen in een smalle strook langs de latex-waterzijde vindt men mengsels die door een omcirkelde punt (brij

Fig. 1.

of schifting) of een cirkeltje (vloeibaar) zijn weergegeven, en men kan daar, zij het bij de gebruikte schaalgrootte onduidelijk, onregelmatige reeksen vloeibaar: coagulatie herkennen. Deze smalle strook, het gebied van kleine hoeveelheden zuur, is bij zoutzuur het eenig interessante; de rest van den driehoek vertoont niets bijzonders, het coagulum is harder naarmate het mengsel minder water bevat, terwijl in mengsels met weinig water en veel zoutzuur het serum een violette tint aanneemt.

De smalle strook langs de latex-waterzijde is in Fig. 2 op vergroote schaal afgebeeld, waarbij het zuur loodrecht, als ordinaat, is uitgezet en uitgedrukt in normaliteit (grammoleculen HCl per Liter eindmengsel).

Voor zeer kleine zuurconcentraties komt men bij alle verdunningen eerst in de vloeibare strook, waar na twee uur nog geen coagulatie ingetreden is; dit gedeelte vertoont na 24 uur spontane

coagulatie. Bij hooger zuurconcentratie (ongeveer vanaf 0,007 N) vindt men na 2 uur min of meer sterke schifting of brijvorming en na 24 uur coagulatie. De grens waarbij na twee uur volkomen

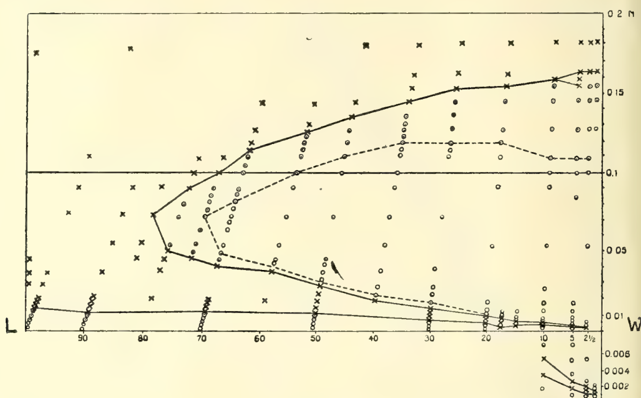


Fig. 2.

coagulatie met een helder serum heeft plaats gevonden ligt bij mengsels boven de 50 °/₀ latex vrijwel constant bij 0,012 N; te bedenken is, dat hiermee de zuurgraad aan toegevoegd zoutzuur bedoeld is, waarbij dan nog de oorspronkelijke zuurgraad van de latex, op het eindmengsel omgerekend, komt. Voor mengsels, die minder dan 50 °/₀ latex bevatten, valt deze onderste coagulatiegrens regelmatig lager. De waarnemingen konden door de boven besproken oorzaken niet zoo scherp gedaan worden, dat het verband tusschen rubberconcentratie en zuurgrens met zekerheid te voorschijn trad, maar vooral bij de lagere concentraties mag men de kleine onregelmatigheden aan waarnemingsfouten toeschrijven en aannemen, dat deze grens omgekeerd evenredig aan de latexconcentratie daalt.

Voegt men meer zuur toe, dan krijgt men bij mengsels met meer dan 80 °/₀ latex steeds een stevig coagulum en bevindt zich dus van het begin af aan in het coagulatiegebied, dat vrijwel den geheelen driehoek van Fig. 1 beslaat. Bij 75 °/₀ latex krijgt men de eerste aanwijzingen, dat een ander verschijnsel gaat optreden, doordat het coagulum eerst stevig, bij meer zuur (ca. 0.05 N) echter week of zelfs brijachtig, en pas bij nog meer zuur weer hard is. Een duide-

lijk vloeibaar gebied treedt pas op bij mengsels met 65 °/₀ latex en minder.

De coagulatiestrook tusschen de beide vloeibare gebieden, het onderste coagulatiegebied, neemt bij lagere latexconcentraties regelmatig in breedte af, maar blijft zelfs bij de laagste concentraties (1 °/₀ latex) nog duidelijk waarneembaar. In die zeer verdunde vloeistoffen scheidt de rubber zich niet als een samenhangend coagulum af, maar in den vorm van witte vlokken; de afscheiding gaat veel sneller dan bij hooger concentraties en doet bij de vloeistoffen met 1 en 2½ °/₀ latex denken aan een titratie van warm zilvernitraat met zoutzuur. Het coagulatie-gebied is bij die lage concentraties zoo smal, dat men in een aangezuurde, maar nog onveranderde vloeistof met een enkelen druppel verdund zuur de witte vlokken zich ziet afscheiden, en bij een toevoeging van enkele druppels meer de oorspronkelijke melkachtige vloeistof onveranderd ziet blijven. Bij mengsels met 5 °/₀ latex kan men met een kleine hoeveelheid zuur eerst een vlokkige afscheiding krijgen, die zich vrij spoedig tot een coagulum vereenigt; bij toevoeging van iets meer zuur kan direct een zeer slap coagulum ontstaan. Mengsels met 2½ en 1 °/₀ latex geven vlokkige afscheidingen, die langen tijd onveranderd kunnen blijven en zich te moeilijker tot een coagulum vereenigen, naarmate het mengsel minder latex bevat.

Bij hooger concentraties, vlak boven 5 °/₀, scheidt de vloeistof zich soms nog opvallend snel in een coagulum en helder serum, maar het momentane uitvlokken vindt men daar niet meer; bij nog hoogere concentraties gaat de afscheiding van het coagulum langzamer.

Het hier beschreven onderste coagulatie-gebied is aan de onder zijde begrensd door een overgang tot spontane coagulatie, zooals wij dat boven reeds bespraken; aan de bovenzijde ligt een smal overgangsgebied, waar het mengsel na 2 uur brijig of schifterig is (na 24 uur meest gecoaguleerd). Deze strook wordt naar de hoogere latex-concentraties toe pas gaandeweg wat breeder, en buigt zich bij ca. 65 °/₀ latex naar boven om, den top van het vloeibare gebied begrenzend en overvoerend in de breede strook, die het vloeibare gebied van het bovenste coagulatie-gebied scheidt. Zoo is dus het vloeibare gebied aan boven- en onderzijde geheel begrensd, tenminste tot aan de laagst onderzochte concentratie (1 °/₀ latex, dus 0.3 °/₀ rubber in het mengsel); of de onderste coagulatiestrook bij nog kleinere concentraties doorloopt, dan wel of daar een verbinding van de beide vloeibare gebieden bestaat, werd nog niet nagegaan. De grenzen van de verschillende gebieden liggen bij de volgende normaliteiten van het toegevoegde zuur in het eindmengsel:

TABEL I.

Latex in het mengsel.	Onderste coagulatie gebied.	Bovengrens eerste coagulatie-gebied.	Bovengrens vloeibaar gebied.	Benedengrens tweede coagulatiegebied.
65 %	0.012	0.04	0.08	0.10
50 %	0.011	0.029	0.10	0.13
40 %	0.009	0.019	0.11	0.14
30 %	0.007	0.013	0.12	0.15
20 %	0.005	0.009	0.12	0.155
10 %	0.0035	0.0055	0.11	0.16
5 %	0.0018	0.0027	0.11	0.155
2½ %	0.0009	0.0018	0.11	0.16
1 %	0.0008	0.0011	0.14 ?	0.16

Deze cijfers worden geillustreerd door figuur 2.

Wij geven nu nog een korte beschrijving van het verloop der verschijnselen bij eenige typische concentraties. Bij het latex-water mengsel werd 10 % zoutzuur (0.914 N) uit een buret gevoegd; de hoeveelheden werden zoo gekozen, dat het eindmengsel steeds 50 cc. was, zoodat de latexconcentratie bij grooter hoeveelheden zoutzuur iets afnam en de seriebepalingen in fig. 2 op scheefstaande lijnen liggen.

Bij een mengsel met 70 % latex gaf de opneming 2 uur na de zuurtoevoeging (vergelijk fig. 2): (zie tabel volgende pag.)

Na drie uur staan was natuurlijk de coagulatie verder voortgeschreden; $2^1/_2$ was nu een brij geworden, $2^3/_4$ een dikke vloeistof met veel vliezen, $3—4^1/_4$ bleven vloeibaar, $5^3/_4$ was slap gecoaguleerd. De mengsels in de overgangsstrooken vertoonen een verder voortgeschreden coagulatie, maar de echt vloeibare mengsels blijven vloeibaar, ook na 24 uur. Er vormt zich daarin echter, bij staan in open bekerglaasjes, een vel aan de oppervlakte, blijkbaar door verdamping, want in gesloten Erlenmeijer kolfjes ontstond dit niet. De grenzen van de gebieden verplaatsen zich dus eenigszins naarmate men den tijd van waarneming later stelt, naar het verschijnsel gecoaguleerd-vloeibaar-gecoaguleerd blijft bestaan. Opvallend is dat de overgang aan de benedenzijde van het vloeibare gebied zoo plotseling is, en aan den bovenkant veel meer geleidelijk. De vliesjes, die men bij roeren krijgt, stammen deels van verdamping

cc. 10 % HCl per 50 cc mengsel	BESCHRIJVING.
0.1	vloeibaar.
0.3	vloeibaar.
0.4	dikke brij; begin overgangsstrook.
0.5	dikvloeibaar, wat klompjes.
0.6	idem
0.7	dikke brij, die bij roeren vast wordt; begin van het coagulatiegebied.
0.8 en 0.9	stevig coagulum, serum wat wit.
1	gecoaguleerd, serum vrijwel helder (toegevoegd zuur 0.018 N).
2	gecoaguleerd, serum vrijwel helder.
2¼	gecoaguleerd, serum wit. Bovengrens eerste coagulatiegebied.
2½	vloeibaar, wat klompjes bij roeren. Scherpe overgang dus.
2¾	vloeibaar met iets vlies.
3	vloeibaar; benedengrens vloeibare gebied.
3½, 3¾, 4, 4¼	vloeibaar, geen vlies.
4½	vloeibaar, bij roeren iets vlies of sliert. Bovengrens vloeibare gebied.
4¾	vloeibaar, een flink stukje vlies (dus onregelmatigheid).
5, 5¼	vloeibaar, wat vlies.
5½	vloeibaar, vrijwat vlies.
5¾	brijig (een ander maal alleen vrijwat slierten).
6	zeer weeke brij, bijna gecoaguleerd.
6¼	gecoaguleerd, maar serum zeer wit, dus verre van volledig. Benedengrens tweede coagulatiegebied.
6½	gecoaguleerd, vrij stijf, serum wit.
7	gecoaguleerd, serum wit.
8	gecoaguleerd, serum wit. Het latexgehalte in dit mengsel is 58.8 %.

aan de oppervlakte of van latex, die tegen den wand van het bekerglas opdroogt; maar toch wijzen deze vliezen op een grootere neiging tot coaguleeren, daar zulke mengsels na 3 of 24 uur verder gecoaguleerd zijn dan de zuiver vloeibare.

Een ander voorbeeld met 30 % latex:

cc 10 % HCl per 50 cc mengsel	BESCHRIJVING.
0.1	vloeibaar.
0.2	vloeibaar.
0.3	vloeibaar, iets dikkig, klompje coagulum.
0.4	gecoaguleerd, vrij stijf, serum vrij helder, ondergrens eerste coagulatiegebied.
0.5	gecoaguleerd, serum helder.
0.6	gecoaguleerd, serum volmaakt waterhelder.
0.7	goed gevormd, maar slap, flabbig coagulum, serum vrijwel helder. Bovengrens eerste coagulatiegebied.
1	geheel vloeibaar, slechts iets sliert. Benedengrens vloeibare gebied. Scherpe overgang.
1¼, 1½, 2, 4	geheel vloeibaar.
6	geheel vloeibaar met iets sliert, als 1 (latere bepaling vloeibaar zonder sliert).
6¼	vloeibaar.
6½	vloerbaar met iets sliert; bovengrens vloeibare gebied.
7	vloeibaar met vrijwat sliert.
8	grootendeels vloeibaar, vrij veel sliertig slap coagulum.
8½	slap coagulum, serum wit. Ondergrens tweede coagulatiegebied.
9	slap coagulum, serum wit.
10	goed gevormd maar slap coagulum, serum zeer wit.
11	idem idem.
12	idem serum bijna helder.

Het coagulum is natuurlijk steeds slap omdat de mengsels slechts 30 % latex dus ca. 10 % rubber bevatten.

Zeer typisch zijn de scherpe overgangen bij het eerste coagulatiegebied van zeer verdunde latices. B.v. bij 1 % latex (0.3 % rubber in het mengsel), zie fig. 2 onderaan, vergroot gedeelte.

Het microscopisch beeld van de vloeistof in het tweede vloeibare gebied is b.v. voor een mengsel met 2 % latex als volgt. Bij kleine zuurconcentratie zijn bijna alle rubberbolletjes nog los van elkaar en flink in Brownsche beweging; men ziet maar zeer enkele klompjes

van eenige tegen elkaar liggende bolletjes. Vanaf een zuurconcentratie van ca. 0.02 N begint het aantal klompjes iets toe te nemen,

cc 1 % HCl	BESCHRIJVING.
0.25	vloeibaar, iets vlokjes er in drijvend.
0.4	vloeibaar met iets vlokjes.
0.45	na ca $^{1}/_{4}$ uur scheiden zich vlokken af, die rijzen, zoodat na 1 uur het serum bijna helder is.
0.5	coaguleert bijna momentaan tot vlokken, die in een laag boven komen drijven, serum bijna helder.
0.55	scheidt langzaam vlokken af, serum blijft wit.
0.6	vloeibaar.
1.0	vloeibaar.

maar verreweg de meeste deeltjes zijn nog los en in levendige Brownsche beweging. Pas bij ongeveer 0.11 N, dus bij de bovengrens van het vloeibare gebied (zie fig. 2) komen er wat meer klompjes en neemt de Brownsche beweging af, en bij 0.13 N liggen bijna alle deeltjes stil en zijn er nog maar enkele die Brownsche beweging vertoonen. Bij 0.14 N begint de ontrooming, die bij 0.15 N in het coagulatiegebied overvoert. Van 0.10 tot 0.15 N is er dus een geleidelijke overgang van losse deeltjes met Brownsche beweging tot klompvorming, stil liggende nog losse deeltjes en ontrooming. Of de weinige klompjes, die men in het tweede vloeibare gebied aantreft, wellicht ontstonden door een plaatselijke overmaat bij de zuurtoevoeging, werd niet nagegaan.

Bewaart men een vloeistof uit het midden van het tweede vloeibare gebied, b.v. 2 % latex met 0.06 N zoutzuur, in een hoog cylinderglas, dan vindt in de eerste weken geen ontrooming plaats. Wel neemt de Brownsche beweging gaandeweg af. Na twee maanden hebben de meeste deeltjes zich tot klompjes vereenigd, enkele van twee of drie, de meeste van een groot aantal bolletjes, zoodat er na dien tijd maar vrij weinig losse deeltjes in Brownsche beweging overblijven; toch is er maar een gedeelte van de rubber ontroomd en is de vloeistof op het oog nog gelijkmatig wit.

Tot onze spijt konden wij niet onderzoeken of in het tweede vloeibare gebied de negatieve lading, welke de rubberbolletjes in de oorspronkelijke latex vertoonen, had plaats gemaakt voor een posi-

tieve, zooals de theorie der omlading [1]) dat verlangt. Eenige proeven over het uitvlokken met verschillende zouten zullen in een volgende mededeeling beschreven worden.

Enkele voorbeelden van den invloed van den oorspronkelijken zuurgraad van de latex op de ligging van de grenzen der gebieden bespreken wij in § 8.

§ 4. *Salpeterzuur.*

Wij hebben eveneens seriebepalingen gedaan met salpeterzuur en zwavelzuur, maar minder uitvoerig, zoodat de grenzen der verschillende gebieden slechts globaal werden vastgesteld. Voor deze proeven werd latex van een andere groep boomen gebruikt, die 28 °/₀ rubber bevatte. Fig. 3 geeft de bepalingen voor salpeterzuur. Het algemeene beeld is volkomen hetzelfde als bij zoutzuur, maar het vloeibare en brijige gebied zijn kleiner. Fig. 3 loopt maar tot mengsels met 70 °/₀

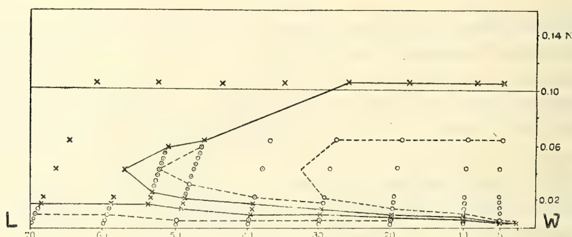


Fig. 3.

latex; de top van het brijige gebied, die bij zoutzuur bij 75 °/₀ latex en ongeveer 0.07 N lag, wordt hier bij iets minder dan 60 °/₀ latex en ongeveer 0.04 N gevonden. De top van het geheel vloeibare gebied is naar verhouding nog meer naar links verschoven, zoodat er tusschen deze beide toppen een zeer breed „brijig" gebied ligt, waarin wij door een stippellijn het gedeelte, waar na twee uur een dikke of vrij dikke brij ontstaan is, hebben gescheiden van het deel, dat nog tamelijk vloeibare mengsels met slierten of beginnende schifting vertoont. De bovengrenzen liggen bij salpeterzuur ongeveer op de helft van de normaliteit van die bij zoutzuur.

---

1) Vergelijk F. Powis, Z. Phys. Chem. 89 (1915), 105.
H. R. Kruyt, Deze Verslagen 23 (1914), I, 252 en 25 (1917), II, 1038.

In § 7 zullen wij de cijfers voor de vier zuren nog nader met elkaar vergelijken en ook de data voor mengsels met 5 en 2 °/₀ latex uitvoeriger vermelden.

§ 5. *Zwavelzuur.*

De gegevens, die wij voor coagulatie met zwavelzuur verzamelden, zijn in Fig. 4 bijeen gebracht. Het groote coagulatiegebied bij zuursterkten van meer dan 0.1 N (normaal = 42 gr. H_2SO_4 per

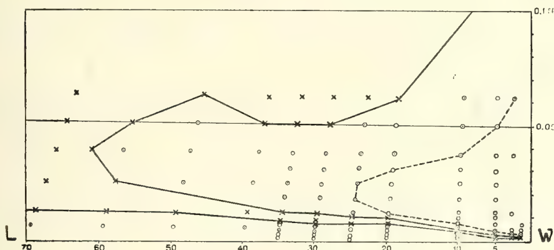


Fig. 4.

Liter) is weer geheel weggelaten, en evenzoo de mengsels met meer dan 70 °/₀ latex, waar steeds coagulatie plaats vindt, zoodra meer dan 0.01 N zuur wordt toegevoegd. Door het kleiner aantal waarnemingen lijkt het verloop der grenzen in Fig. 4 wat onregelmatig, maar de gegevens zijn toch voldoende om te concludeeren dat het brijige en het vloeibare gebied, vergeleken met zoutzuur en salpeterzuur, nog meer ingekrompen zijn. Vergelijkende cijfers vindt men weer in § 7.

Vermeld moge nog worden, dat men, uitgaande van een mengsel met 70 °/₀ latex, een duidelijke aanwijzing krijgt omtrent het bestaan van de „onregelmatige reeksen", ofschoon alle mengsels coaguleeren: het mengsel met 0.04 N zuur geeft een merkbaar slapper coagulum dan die met 0.025 of 0.05 N zuur.

§ 6. *Azijnzuur.*

Voor azijnzuur — het op rubberondernemingen algemeen gebruikelijke coagulatiemiddel — blijkt het verloop der verschijnselen in algemeene trekken hetzelfde te zijn als in de vorige gevallen, maar zijn de proporties van de verschillende gebieden geheel andere. Terwijl bij de drie vorige zuren het heele gebied der onregelmatige

reeksen ligt in een smalle strook langs de latex-water zijde, die in een voorstelling als fig. 1 bijna niet te onderscheiden is, breiden de onregelmatige reeksen zich bij azijnzuur tot veel hooger zuurconcentraties uit en krijgt men uit een driehoekfiguur als Fig. 5 het beste algemeene overzicht. Ook hier beslaat het coagulatiegebied verreweg het grootste deel, n.l. bijna $^3/_4$ van den driehoek; maar in de buurt van het water-hoekpunt vindt men ruim $^1/_4$ van den driehoek ingenomen door het vloeibare en brijige gebied, terwijl dicht langs de latex-waterzijde natuurlijk ook in dit geval een eerste vloeibare gebied gevonden wordt, dat bij zeer kleine zuurtoevoeging geen coagulatie, maar bij bewaren spontane coagulatie door bacteriënwerking vertoont.

Het eigenlijke vloeibare gebied is in Fig. 5 weer door een stippellijn begrensd; het brijige gebied is door een iets grovere stippellijn in twee gedeelten, een tamelijk vloeibaar en een meer brijig, verdeeld. Vorming van een samenhangend coagulum vindt plaats in de smalle strook parallel aan de latex-waterzijde en naar de zijde van het hoekpunt Latex; het heele gebied naar den kant van het hoekpunt Azijnzuur geeft een volkomen afscheiding, maar in den vorm

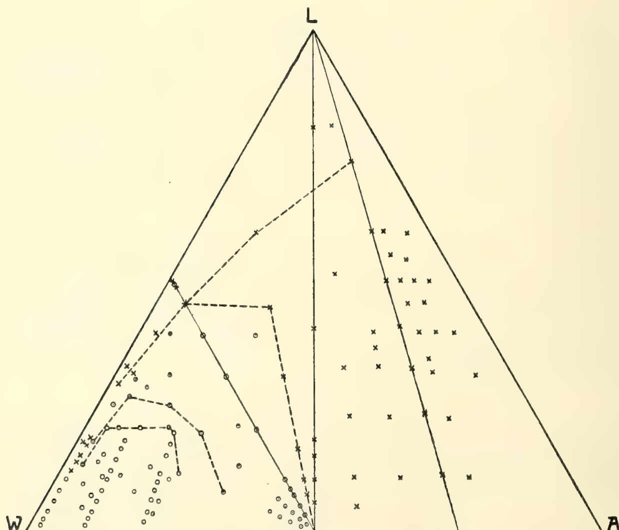


Fig. 5.

van vlokken of als brij en niet als een samenhangende koek. Deze twee coagulatiegebieden zijn in Fig. 5 globaal door een stippellijn gescheiden. Op dit punt bestaat dus ook een belangrijk verschil tusschen azijnzuur en de drie andere zuren, bij welke het heele coagulatiegebied een samenhangend coagulum oplevert.

Wij hebben de coagulatie met azijnzuur weer door een zeer groot aantal bepalingen nagegaan, en wel in de latex van de beide boven besproken groepen van boomen; in Fig. 5 zijn de resultaten weergegeven verkregen met de 28 °/₀ latex van de tweede groep (zie § 4). De normaliteit aan toegevoegd azijnzuur is voor de grenzen der verschillende gebieden in tabel 2 vermeld.

TABEL 2.

	Latexgehalte in het mengsel in °/₀.									
	100	80	60	50	40	30	20	10	5	2½
Grens onderste vloeibare gebied.	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	—	0.003	0 0015	—	—
Begin onderste roomig gebied.	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	—	0.009	0.003	—	—
Ondergrens coagulatiegebied.	0.017	0.024	0.031	0.030	0.028	—	0.016	0.006	0.0015	0.0012
Bovengrens eerste coagulatiegebied.	—	—	—	0.52	0.35	0.21	0.13	0.08	0.05	0.026
Ondergrens tweede vloeibaar gebied.	—	—	—	—	—	—	0.8	0.24	0.16	0.10

Bij een vergelijking van deze cijfers en van Fig. 5 met de in § 3—5 beschreven resultaten ziet men duidelijk het groote verschil in den afstand tusschen de grenzen. Een vergelijkend overzicht wordt in § 7 gegeven.

Bij de beoordeeling van bovenstaande cijfers heeft men te bedenken, dat de verschijnselen in het verband, waarin wij ze hier beschouwen, niet geheel dezelfde zijn als in de ondernemingspraktijk. Zoo nemen wij hier als onderste grens van het coagulatiegebied die mengsels, waar na 2 uur een samenhangend coagulum ontstaan is, terwijl men bij de coagulatie op de ondernemingen tevens den eisch stelt dat het serum helder of bijna helder is, en het coagulum vol-

doende stijf om gemangeld te worden. Bij onverdunde latex zal de ondergrens van het coagulatiegebied, zooals die hier beschreven is (0.017 N of ca 1 gram azijnzuur per liter latex), lager liggen dan de in de praktijk gebruikelijke dosis, wanneer men eenige uren na de coagulatie wil mangelen; bij 50 % latex (dus 1 : 1 verdund) is de dosis (0.030 N. = 1.8 gr. azijnzuur per liter) hooger, omdat men bij verdunde latex pas den volgenden dag mangelt, en er zich dan bij veel kleiner azijnzuur-dosis een bruikbaar coagulum gevormd heeft.

Wij voegen hieraan toe de resultaten van een minder volledige waarnemingsreeks, gedaan in November 1922 met latex uit den Cultuurtuin te Buitenzorg, waar eenige groepen van boomen met een snede over $^1/_4$ omtrek getapt werden. Deze latex bevatte 37 % rubber en vertoonde een zuurgraad van ca 0.025 N. Men ziet dat het algemeene beeld hetzelfde is, de onderste grenzen vrijwel samenvallen, maar er bij andere grenzen vrij belangrijke verschillen optreden, die deels aan het verschil in samenstelling en zuurgraad van de latex, ten deele ook, bij de vaag te definieeren grenzen, aan het verschil in opvatting tusschen de waarnemers toe te schrijven is. Dit voorbeeld illustreert, met de in § 8 te bespreken gevallen, de restrictie die wij reeds in § 1 maakten over de kwantitatieve waarde der resultaten.

TABEL 3.

	Latexgehalte van het mengsel in %.							
	80	60	40	20	10	5	2	1
Begin onderste roomig of brijig gebied.	0.009	0.010	0.009	0.006	0.0026	—	—	—
Ondergrens eerste coagulatiegebied.	0.018	0.022	0.017	0.009	0.0053	0.0026	0.0020	0.0016
Bovengrens coagulatiegebied	—	—	0.40	0.20	0.083	0.04	0.033	0.023
Ondergrens tweede vloeibare gebied.	—	—	—	0.5	0.17	0.066	0.059	0.040

§ 7. *Vergelijking der vier zuren.*

Wij willen nu de resultaten, verkregen met de vier zuren, nog eens onderling vergelijken. Terwijl in groote trekken het verloop volkomen hetzelfde is, zijn er in kwantitatief opzicht interessante verschillen en overeenkomsten te constateeren.

Nemen wij allereerst den top en bovengrens van het vloeibare

gebied, dan kunnen wij daarvoor de in § 3—6 vermelde gegevens gebruiken, hoewel die op twee verschillende latices betrekking hebben en de hoofdwaarnemingen over een tijdsverloop van meer dan een half jaar verspreid lagen, omdat deze grenzen toch slechts globaal vast te stellen zijn. Wij krijgen dan:

TABEL 4.

	HCl	HNO_3	H_2SO_4	$C_2H_4O_2$
Top vloeibaar gebied, bij mengsels met latex	70%	35%	25%	25%
Top brijig gebied, bij mengsels met latex	77%	57%	65%	57%
Bovengrens vloeibaar gebied voor 20% latex, bij zuurgehalte	0.12 N	0.06 N	0.03 N	3–4 N
Bovengrens brijig gebied (ondergrens tweede coag. gebied) voor 20% latex, bij zuurgehalte	0.155 N	0.10 N	0.06 N	7—8 N

De grens waarbij geen onregelmatige reeksen meer optreden — de top van het brijige gebied — ligt voor salpeterzuur, zwavelzuur en azijnzuur bij bijna hetzelfde latexgehalte, maar voor zoutzuur wat hooger. Men moet daarbij bedenken, dat bij salpeterzuur in een mengsel met 60 %, bij zwavelzuur in een met 70 % nog duidelijk een onderbreking in de reeks is waar te nemen doordat het coagulum ter hoogte van bovenbedoelden top slapper is dan bij hooger of lager zuurgehalte. Een sprekend verschil in ligging van dezen top valt er dus bij de vier zuren niet te constateeren.

Daarentegen bestaat er een onmiskenbaar verschil bij den top van het werkelijk vloeibare gebied, dat zich bij zoutzuur tot veel hooger latexconcentraties uitstrekt dan bij de drie andere zuren.

In de bovengrens van het vloeibare gebied, dus het begin van het bovenste schifterige gebied, en evenzoo bij de bovengrens van dit gebied, dus de ondergrens van het tweede coagulatiegebied, is het verschil eveneens zeer sprekend. Bij azijnzuur liggen deze grenzen verreweg het hoogst, dan volgt zoutzuur, ongeveer de helft lager salpeterzuur en weer de helft lager zwavelzuur. Neemt men aan, dat in het tweede vloeibare gebied de colloidale rubberdeeltjes zijn omgeladen van negatief tot positief, dan zou de sterker uitvlokkende werking van het tweewaardige sulfaation volkomen verklaard zijn; eenwaardige ionen zouden dan een geprononceerd verschil vertoonen in de volgorde nitraat-, chloor-, acetaation.

Bijzonder interessant scheen ons een vergelijking van de werking der vier zuren in het eerste coagulatiegebied, en wel bij kleine latexconcentraties, waar men met een kleine verhooging van het zuurgehalte bij de drie anorganische zuren zoo scherp het in § 3 beschreven verschijnsel vloeibaar-snelle uitvlokking-vloeibaar krijgt. Wij hebben daarom deze grenzen voor alle vier zuren naast elkaar nog eens voor eenzelfde latexmengsel bepaald, om strikt vergelijkbare cijfers te krijgen (welke cijfers dus niet volkomen met die in § 3—6 overeenkomen, zooals in § 1 werd uiteengezet en in § 8 nog nader zal worden besproken).

De cijfers waren voor het zuurgehalte in normaliteit:

TABEL 5.

	HCl	HNO_3	H_2SO_4	$H_2C_2O_4$
5 % latex, ondergrens	0.0011	0.0011	0.0011	0.0015
id. , bovengrens	0.00265	0.00265	0.0029	—
2 % latex, ondergrens	0.0007	0.0007	0.0007	0.0010
id. , bovengrens	0.0013	0.0013	0.0014	—

De benedengrens van het coagulatiegebied ligt bij de drie sterke anorganische zuren precies gelijk, en zeer fraai demonstreert zich hier, dat het de positieve H-ionen zijn die, tenminste in dit gebied van sterk verdunde latices, het verschijnsel beheerschen; azijnzuur werkt iets zwakker.

De bovengrens ligt bij zoutzuur en salpeterzuur weer precies gelijk; ook de overgangsstrooken (die bij deze sterk verdunde latices zeer smal zijn) vertoonen bij eenzelfde hoeveelheid toegevoegd zuur precies dezelfde verschijnselen; zoutzuur en salpeterzuur werken dus in het onderste coagulatiegebied precies gelijk, terwijl de grens van het bovenste coagulatiegebied, zooals wij zooeven zagen, bij salpeterzuur belangrijk lager ligt. Bij zwavelzuur ligt de bovengrens van het eerste coagulatiegebied iets hooger; het verschil is niet groot, maar kon bij deze strikt vergelijkende proef toch duidelijk vastgesteld worden, ook doordat in de boven het coagulatiegebied liggende overgangsstrook zich overeenkomstige verschillen vertoonden. Bij azijnzuur ligt de bovengrens veel hooger (bij ca. 0.05 en 0.026 N, zie tabel 2) en werd in deze proef niet opnieuw bepaald.

Een bepaling van de waterstof-ionen concentratie in deze verschillende vloeistoffen, die voor een zuivere beoordeeling der verschijnselen noodig zou zijn, kon nog niet plaats hebben; wij willen

er alleen nog op wijzen, dat de volgorde der vier zuren bij de bovengrens van het eerste coagulatiegebied (zoutzuur en salpeterzuur-zwavelzuur-azijnzuur) niet dezelfde is als bij de ondergrens van het tweede coagulatiegebied (zwavelzuur-salpeterzuur-zoutzuur-azijnzuur).

§ 8. *Invloed van den zuurgraad van de latex zelf.*

Zooals wij in § 1 al bespraken is latex zwak zuur en neemt bij staan gaandeweg in zuurgraad toe. De zuurgraad van de latex, die voor het onderzoek gebruikt wordt, is natuurlijk van invloed op de verkregen cijfers, ofschoon het verband niet zuiver additief behoeft te zijn, daar de zuurgraad in latex door koolzuur en organische zuren (waaronder, na bacteriënwerking, melkzuur, azijnzuur en boterzuur) veroorzaakt wordt.

Wij hebben in de eerste plaats eenige waarnemingen gedaan in gewone latex en in dezelfde latex, na neutralisatie met kaliloog, en wel weer voor de scherp vast te stellen grenzen van het eerste coagulatiegebied in mengsels met weinig latex. Een mengsel met 5 % latex (rubbergehalte 1.43 %) verbruikte bij de neutralisatie (phenol-phtaleïne als indicator) 16.6 cc. $^1/_{10}$ N kaliloog per Liter en was dus 0.00166 normaal; voor de oorspronkelijke latex berekent men hieruit een zuurgraad van 0.033 N. Een mengsel met 2 % latex (rubbergehalte 0.54 %) verbruikte 6.6 cc. kaliloog en was dus 0.00066 normaal (berekend voor oorspronkelijke latex dus ook 0.033 N).

De grenzen van het eerste coagulatiegebied bleken bij zoutzuur te zijn:

TABEL 6.

	Eigen zuurgraad	Toevoeging zoutzuur in Normaal	
		Ondergrens	Bovengrens
5 % latex, oorspronkelijk	0.00166	0.0015	0.0032
id. , geneutraliseerd	—	0.0030	0.0048
2 % latex, oorspronkelijk	0.0066	0.0013	0.0020
id. , geneutraliseerd	—	0.00195	0.0027

Men ziet, dat het neutraliseeren de benoodigde zuurtoevoeging verhoogd heeft met ongeveer het bedrag van den eigen zuurgraad van de latex. Bij de beoordeeling der cijfers moet niet vergeten worden, dat de geneutraliseerde latex door het neutraliseeren een

5

kleine hoeveelheid kaliumzouten bevat, die de grens der gebieden eenigszins kunnen verschuiven.

Een tweede proef had betrekking op het toenemen van den eigen zuurgraad van de latex bij staan. De hiervoor gebruikte latex titreerde bij onverdund bewaren om 10 uur 0.026, om 12 uur 0.030 en om 1.45 uur 0.032 N. De waarnemingen gaven:

44½ cc. 70°/₀ latex, om 10 uur verdund met 5½ cc. 10°/₀ HCl (dus mengsel 0.1 normaal, vallende in het bovenste brijige overgangsgebied, zie Fig. 2): na een uur nog vloeibaar, maar een flink klompje van slierten er in, en na drie uur een dikke brij, vrijwel gecoaguleerd, met zeer wit serum;

hetzelfde mengsel, maar pas om half één gemaakt uit de onverdunde latex, was na een uur staan reeds gecoaguleerd, hoewel het coagulum nog zeer slap was. De invloed van den grooteren eigen zuurgraad van deze latex was dus zeer merkbaar.

43 cc. 40°/₀ latex, om 10 uur bereid met 7 cc. 10°/₀ HCl (dus ca. 0.13 N, weer in het midden van het bovenste brijige overgangsgebied, zie Fig. 2) gaf na een uur een kleine klomp van vliesjes, en was na drie uur nog vloeibaar met een flink klein vlies;

hetzelfde mengsel, om 12.30 uur gemaakt, was na een uur nog vloeibaar met een klompje van vliezen dat wat grooter was dan in bovenstaand mengsel na een uur. Het verschil was in dit geval dus merkbaar, maar niet groot.

Uit deze proeven blijkt, zooals te verwachten was, dat men door de latex later in bewerking te nemen de hoeveelheid zuur, die

TABEL 7.

	Mei 1920	8 Oct. 1920	9 en 12 Oct. 1920	14 Oct. 1920	Mei 1922
Eigen zuurgraad onverdunde latex	0.026—0.030	—	0.041—0.044	0.033	0.022
Bovengrens 5 °/₀ latex	0.0027	0.0025	0.00265	0.0032	0.0044
Ondergrens id.	0.0018	0.0012	0.0011	0.0015	0.0020
Bovengrens 2½ °/₀ latex	0.0018	—	—	—	—
Ondergrens id.	0.0009	—	—	—	—
Bovengrens 2 °/₀ latex	—	0.0014	0.0013	0.0020	0.0026
Ondergrens id.	—	0.0007	0.0007	0.0013	0.0014
Bovengrens 1 °/₀ latex	0.0011	—	—	—	0.0020
Ondergrens id.	0.0008	—	—	—	0.0014

toegevoegd moet worden om een bepaald stadium te bereiken, iets kleiner vindt.

Wij geven nu nog eenige voorbeelden hoeveel de gevonden zuurgehalten kunnen uiteenloopen, wanneer men latex van diverse herkomst gebruikt, en wel weer voor zoutzuur en voor de grenzen van het eerste coagulatiegebied bij mengsels met 5 en 2 °/₀ latex.

Berekent men de verschillen in eigen zuurgraad van de verdunde latices, dan ziet men, dat de verschillen in zuurgehalte voor de grenzen vrij sterk daarvan afwijken, hoewel een algemeen verband wel te herkennen is. Een strikte kwantitatieve overeenkomst was ook niet te verwachten, daar de latices niet alleen in zuurgraad, maar ook in rubbergehalte en in bijbestanddeelen verschilden.

§ 9. *Onderzoekingen van anderen.*

Zooals wij in de inleiding vermeldden, zijn in de literatuur verscheidene onderzoekingen te vinden, die op het bestaan van onregelmatige reeksen bij Hevea latex duiden.

J. PARKIN, een der eerste onderzoekers, die zich met zuurcoagulatie van Hevea latex bezig hield[1]), gebruikte bij zijne proeven tienvoudig verdunde latex en constateerde daarbij den overgang vloeibaar-gecoaguleerd-vloeibaar. Het tweede coagulatiegebied merkte PARKIN, die zich tot kleine zuurtoevoegingen beperkte, niet op. Als verklaring nam PARKIN aan, dat het in latex aanwezige eiwit in een neutrale vloeistof onoplosbaar is, maar in basen of zuren oplost. PARKIN meende, dat Hevea latex alkalisch is; toevoeging van zuur zou dus eerst neutralisatie geven met neerslaan van het eiwit en daardoor ook van de rubber, terwijl bij hooger zuurgraad het eiwit weer zou oplossen. PARKIN constateerde voorts, dat het coagulatiegebied bij azijnzuur breeder is dan bij andere zuren en zag daarin een beslist voordeel voor de praktijk, omdat men niet zoo gauw door toevoeging van te veel zuur de coagulatie zou missen.

Aangezien men in de ondernemingspraktijk het rubbergehalte van de latex niet beneden 15 of 12 °/₀ laat dalen (dus, in onze terminologie, mengsels met niet minder dan 50 à 50 °/₀ latex gebruikt), waarbij met azijnzuur geen onregelmatige reeksen voorkomen, was er voor deze verschijnselen langen tijd verder geen belangstelling. W. CROSSLEY[2]) gaf weer eens eenige cijfers voor boven- en benedengrens van het eerste coagulatiegebied bij een mengsel met 7 °/₀ rubber (dus ongeveer 50 °/₀ latex), dat met formaline geconserveerd

[1]) Circulars Royal Botanic Gardens Peradeniya Vol. I (1899), 149.
[2]) India Rubber Journal 41 (1911), 1206.

was. Hij vond de benedengrens bij 0,014 N azijnzuur, de bovengrens bij 0,29 N, terwijl de eigen zuurgraad van de verdunde latex 0.015 N was. Deze cijfers komen met de onze (tabel 2 en 3) tamelijk goed overeen. CROSSLEY's benedengrens ligt wat lager en zijn bovengrens wat hooger, waarbij de nog onbekende werking van formaline een rol kan gespeeld hebben. CROSSLEY bepaalde voorts de benedengrens van het eerste coagulatiegebied voor verdunningen van de boven besproken latex met 7 % rubber, en vond, dat tot honderdvoudige verdunning toe de totale zuurgraad (toegevoegd azijnzuur plus berekende eigen zuurgraad) met groote nauwkeurigheid evenredig aan het latexgehalte afnam. Voor gedialyseerde latex met een gehalte van 12 % totaal vaste stof (dus een mengsel met ongeveer 40 % latex) vond CROSSLEY[1]) de volgende cijfers voor de beneden- en bovengrens van het eerste coagulatiegebied:

TABEL 8.

	Ondergrens	Bovengrens
Azijnzuur	0.02 N	0.18 N
Trichloorazijnzuur	0.005	0.026
Mierenzuur	0.008	0.022
Zoutzuur	0.004	0.016
Zwavelzuur	0.005	0.018

De gedialyseerde latex was slechts 0.001 N zuur; de grenzen liggen alle (behalve de bovengrens bij zwavelzuur) lager dan wij voor normale latex vonden, zoodat de dialyseerbare serumbestanddeelen in natuurlijke latex anticoaguleerend zouden werken.

Als een critiek op deze onderzoekingen publiceerde B. J. EATON[2]) eenige series waarnemingen met zoutzuur, salpeterzuur, zwavelzuur en azijnzuur, die echter zeer onvolledig zijn en niet veel klaarheid in de verschijnselen brachten; EATON vond mengsels die vloeibaar bleven, maar schreef dit aan een vertraging van de coagulatie door groote verdunning toe, of aan een insluiten van het zuur in de klompjes bij gedeeltelijke coagulatie. EATON ontkent het bestaan van een maxiumgrens voor het (eerste) coagulatiegebied, zooals CROSSLEY die vastgesteld had; uit het vorenstaande blijkt duidelijk, dat deze critiek geheel zonder grond is, en dat de door PARKIN en CROSSLEY

[1]) India Rubber Journal 42 (1911), 1345.
[2]) Bull. of the Dept. of Agric., Fed. Malay States No. 17 (1912), pag. 10.

beschreven maximumgrens wel degelijk bestaat; maar alleen bij mengsels met een latexgehalte beneden zekere grens.

G. S. WHITBY [1]) was de eerste, die nadrukkelijk op het bestaan van het tweede coagulatiegebied boven het tweede vloeibare gebied wees en eenige volledige series vloeibaar-gecoaguleerd-vloeibaar-gecoaguleerd beschreef. WHITBY stelde voor deze verschijnselen de verklaring op, dat kleine hoeveelheden zuur activeerend werken op een in latex aanwezig enzym, coagulase, dat bij kleinen zuurgraad de coagulatie zou bewerken, maar bij grooteren zuurgraad onwerkzaam zou worden; het tweede coagulatiegebied zou dan een directe eiwitpraecipitatie door grootere hoeveelheden zuur zijn.

Wij willen de waarnemingen van de laatste twee onderzoekers ook nog even met de onze vergelijken.

1. *Zoutzuur*. In Fig. 6 zijn de grenzen uit Fig. 2 overgenomen en daarin geschetst de door EATON en WHITBY gedane waarnemingen.

Uitgaande van onverdunde latex vond EATON met 10 °/₀ zuur (lijn 1 in fig. 6) een onafgebroken serie coagulaties, maar met 1 °/₀ zuur (lijn 2) kwam hij in het vloeibare gebied. Twee series met

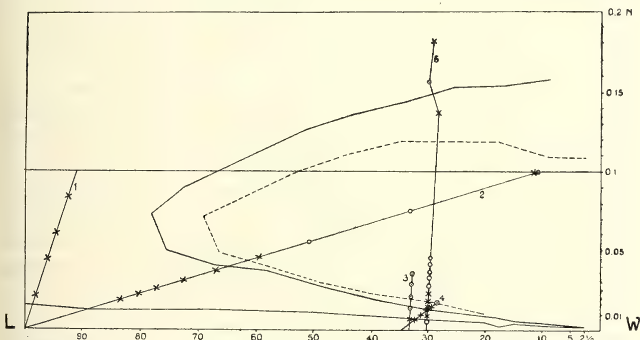


Fig. 6.

1 : 2 verdunde latex (ons 33¹/₃ °/₀) gaven hem den overgang van gecoaguleerd tot brijig te zien, maar maakten niet duidelijk, dat hij weer in het tweede vloeibare gebied was aangeland (lijn 3 en 4). Het bovenste coagulatiegebied nam EATON niet waar.

[1]) Zeitschr. Koll. Chem. 12 (1913), 156, India Rubber Journal (London) 45 (1913), 945; verder Agric. Bull. of the Dept. of Agr. F.M.S. (Kuala Lumpur) 6 (1918), 381.

WHITBY maakte een volledige serie bij ca 30°/₀ latex; zijn grenzen vallen niet volkomen met de onze samen, wat om de reeds besproken redenen (eigen zuurgraad latex enz.) niet te verwonderen is, en ook aan verkeerde reproductie kan liggen, omdat WHITBY het juiste titer van zijn zoutzuur niet vermeldt. Behoudens kleine verschillen passen de waarnemingen van beide onderzoekers dus bevredigend in onze overzichtsfiguur (zie fig. 6 en 2).

2. *Salpeterzuur*. EATON deed twee series waarnemingen, uitgaande van onverdunde latex, en vond bij toenemenden zuurgraad steeds coagulatie, overeenkomstig Fig. 3. Verder een serie met 1°/₀ zuur bij 1 : 2 verdunde latex, waarbij hij van het coagulatiegebied in een brijig gebied („incomplete coagulation") over ging, wat hij weer aan de boven besproken oorzaken (insluiten van zuur in de klonters) toeschrijft.

WHITBY beschreef ook voor salpeterzuur een volledige serie, en wel voor een latex met 12°/₀ rubber (overeenkomende met een mengsel met 40°/₀ latex); hij vond bij 0.016 N coagulatie, bij 0.021 een brij, 0.032 en 0.052 vloeibare mengsels, bij 0.063 weer een brij, 0.105 en 0.21 coagulatie. Deze waarnemingen kloppen met de onze (zie Fig. 3), behalve de twee vloeibare mengsels (WHITBY vermeldt alleen „coagulation failed to occur", wat wel met onze mengsels met een weinig schifting kan overeenkomen).

3. *Zwavelzuur*. EATON deed een serie met onverdunde latex, die (zooals te verwachten was) bij alle zuurgraden coagulatie vertoonde; verder een bij 1 : 3 verdunde latex, waar op het coagulatiegebied eenige mengsels met onvolledige coagulatie volgden, en een serie bij 1 : 10 verdunde latex, waar gecoaguleerd-onvolledig gecoaguleerd-vloeibaar geconstateerd werd. Het vloeibaar blijven schrijft EATON weer toe aan een vertraging van de coagulatie bij sterk verdunde latex, maar heldert niet op hoe hij dan de in deze serie gevonden gecoaguleerde mengsels met minder zuur verklaart.

WHITBY geeft alleen een korte aanwijzing omtrent een serie vloeibaar-gecoaguleerd-onvolledig gecoaguleerd (brij) -gecoaguleerd, zonder de zuurgehalten en het rubbergehalte te vermelden. Vermoedelijk is dit dezelfde verdunde latex met 10°/₀ rubber (30°/₀ latex) geweest als in zijn proeven met zoutzuur, en was WHITBY dus bij een concentratie gebleven tot waar het vloeibare gebied niet reikt (vergel. Fig. 4).

4. *Azijnzuur*. EATON vermeldt weer eenige series bij onverdunde en verdunde latices, waarin voor de verdunde latices het brijige, vliezige of vloeibare gebied bereikt werd bij zuurgraden, die met de door ons gevondene behoorlijk overeenkomen. WHITBY geeft voor dit

zuur geen kwantitatieve data, maar vermeldt alleen, dat het eerste coagulatiegebied veel breeder is dan bij de vorige zuren en dat daarna vloeibare mengsels bereikt worden. Bij 30 $^0/_0$ latex vonden wij geen vloeibare mengsels (top bij 25 $^0/_0$ latex), maar vermoedelijk was Whitby's mengsel door het toevoegen van verdund azijnzuur op lager rubbergehalte gekomen. Whitby vond geen bovengrens van het vloeibare gebied, zooals (zie Fig. 5) bij verdunnen van 30 $^0/_0$ latex met azijnzuur van minder dan 50 $^0/_0$ ook niet het geval kon zijn.

Zooals men ziet, passen de data van deze beide onderzoekers op bevredigende wijze in onze overzichtsfiguren en worden hunne ten deele verward schijnende waarnemingen verklaard door het samenstel van gebieden, zooals die nu bekend geworden zijn.

SAMENVATTING.

Mengsels van Hevea latex en water vertoonen bij toevoeging van zuren het verschijnsel der onregelmatige reeksen. Voor zoutzuur, salpeterzuur, zwavelzuur en azijnzuur werden de grenzen der gebieden (eerste en tweede vloeibare gebied, eerste en tweede coagulatiegebied, overgangsstrooken) volledig voor alle mengverhoudingen van latex, water en zuur vastgesteld (zie Fig. 1—5), en de ligging der grenzen bij deze vier zuren vergeleken.

Buitenzorg, December 1922.

Natuurkunde. — W. H. Keesom en J. de Smedt. „*Over de diffractie van Röntgenstralen in vloeistoffen.*" II. (Mededeeling N°. 12 uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool.)

(Aangeboden door de Heeren H. Kamerlingh Onnes en W. J. de Haas.)

§ 1. *Inleiding.* De in Meded. N°. 10 [1]) vermelde proeven betreffende de diffractie van Röntgenstralen zijn alle verricht met K_α-stralen van koper. Het leek wenschelijk eenige dier proeven te herhalen met stralen van korter golflengte. In het bijzonder was dit van belang, wijl het niet optreden van een diffractiering, die afkomstig zou zijn van de interferentie van stralen verstrooid door de afzonderlijke atomen in het molecuul, b.v. in dat van zuurstof, zou kunnen te wijten zijn aan de omstandigheid, dat de afstand van de centra der om de beide atoomkernen gegroepeerde electronenstelsels te klein is om met stralen van die golflengte een interferentiering te geven (nl. kleiner dan 0.95 Å voor $\lambda = 1.54$ Å).

Wij hebben nu een aantal opnamen gedaan met K_α-stralen van molybdeen ($\lambda = 0.71$ Å).

§ 2. Voor de methode en de apparatuur zij verwezen naar Meded. N°. 10. De door de molybdeen-antikathode uitgezonden stralen werden gefiltreerd door 0.35 mm. zirconium.

§ 3. *Waarnemingsresultaten betreffende den hoofddiffractiering.* Geëxponeerd zijn nu vloeibare zuurstof, argon en stikstof, zoomede water en zwavelkoolstof.

Voor zuurstof, argon, water en de nu voor het eerst onderzochte stikstof wordt bevestigd gevonden, dat de hoofdring afkomstig is van de samenwerking van naburige moleculen, waarbij deze gerangschikt kunnen gedacht worden ongeveer als zoo dicht mogelijk opeengepakte bollen, die in de door de vloeistof ingenomen ruimte zouden passen.

Zwavelkoolstof, waarvan nu ook een diffractiering verkregen is,

---

[1]) Deze Verslagen, **31**, p. 87, 1922.

geeft echter eene afwijkende waarde voor den afstand der diffracteerende deeltjes, zooals blijkt uit de volgende tabel, waarin wederom φ de halve tophoek van den door de afgebogen Röntgenstralen gevormden kegel voorstelt, M en d moleculairgewicht en dichtheid beteekenen, en

$$a = \frac{7{,}72\,\lambda}{4\pi \sin \frac{\varphi}{2}}$$

voorstelt den afstand der diffracteerende deeltjes, wanneer men uitgaat van de onderstelling, dat de waargenomen diffractiering afkomstig is van de samenwerking van naar willekeur georienteerde systemen telkens van twee deeltjes op dien afstand van elkander.

TABEL I.

Stof	φ ($\lambda = 0.71$ Å)	a	$1.33 \sqrt[3]{\frac{M}{d}}$
Zuurstof (9 opnamen)	12.50°	4.0 Å	4.0 Å
Argon (1 opname)	13.0	3.85	4.1
Water (1 „)	13.44	3.73	3.6
Stikstof (1 „)	11.34	4.42	4.4
Zwavelkoolstof (1 „)	13.23	3.8	5.2

In plaats van omtrent het afwijkende gedrag van CS_2 eene bepaalde onderstelling naar voren te brengen, zullen wij liever het onderzoek naar andere stoffen, die eene overeenkomstige afwijking vertoonen, afwachten.

De nu verkregen diffractieringen zijn scherper dan de vroegere, wijl de vloeistoffen nu bestraald zijn in een buisje van 1 m.m. diameter.

§ 4. *Waarnemingsresultaten betreffende den tweeden ring.* De tweede ring is bij 6 opnamen van zuurstof en bij die van argon en stikstof duidelijk te meten. De andere vertoonen dezen ring niet, vermoedelijk wijl de verkregen films minder gezwart zijn. Ook bij argon is die ring zeer zwak.

TABEL II.

	φ	a
Zuurstof	19.5°	2.57 Å
Argon	18.9	2.65
Stikstof	17.0	2.95

Deze waarden van a vertoonen eene opvallende overeenkomst met de in Meded. N°. 6a [1]) verkregen waarden voor den diameter [2]) van het molecuul, n.l. voor zuurstof $\sigma = 2.65$ Å, voor stikstof $\sigma = 2.98$ Å. Dit steunt de in Meded. N°. 10 uitgesproken meening, dat deze diffractiering zou te danken zijn aan de samenwerking van twee tegen elkander aan liggende moleculen.

Voor water werd ook met deze golflengte aansluitend aan den hoofdring eene vrijwel uniforme zwarting waargenomen, die betrekkelijk scherp begrensd is, bij $\varphi = 24°$, wat beantwoordt aan een afstand $a = 2.1$ Å.

§ 5. *Bij zuurstof en stikstof geen diffractie door afzonderlijke atomen in het molecuul.* Op een flink gezwarte film voor zuurstof en op die voor argon werden aanduidingen gevonden van een derde zwartingsmaximum, bij $\varphi = 29°$ voor zuurstof, en bij $\varphi = 30.5°$ voor argon. Wij achten hiermede het bestaan van dit derde maximum nog niet met zekerheid vastgesteld. Intusschen volgt uit het feit, dat, indien dit derde maximum in werkelijkheid aanwezig is, dit dan ook bij argon het geval is, dat dit maximum niet is toe te schrijven aan de interferentie van stralen, die door afzonderlijke atomen in het molecuul als zoodanig worden afgebogen.

Hoewel in verschillende films de hoofddiffractiering zeer intensief gezwart is, is dus van een interferentiefiguur afkomstig van de afzonderlijke atomen in het molecuul bij deze proeven niets gebleken, niettegenstaande bij de hier gebruikte golflengte bij een afstand van de diffracteerende deeltjes grooter dan 0,43 Å een interfentiering zou verkregen moeten zijn [3]).

[1]) Deze Verslagen, Nov. 1920, p. 718.

[2]) Feitelijk den kleinsten afstand waarop de centra van twee moleculen in het gas tot elkander kunnen naderen.

[3]) Op grond van de discussie der bandenspectra zouden de afstanden der atoomkernen bij zuurstof en stikstof bedragen resp. 0,85 en 1,12 Å: A. Eucken, Z.S. f. Elektrochemie 26, p. 377, 1920. Vergel. W. Lenz, Verh. D. physik. Ges. 21, p. 632, 1919.

Ter gedeeltelijke verificatie van bovenstaande is nog eene belichting van 10 uren gedaan met Cu-K_α-stralen (9 mA, ± 25 KV). Niettegenstaande deze film flink gezwart is, is geen verdere ring dan de vermelde verkregen.

Men zou nog kunnen meenen, dat de bij deze proeven waargenomen ringen alle afkomstig zijn van atomen, die telkens tijdelijk min of meer regelmatig als in een kristalnet gegroepeerd zijn. De in deze Meded. voor de diameters dier ringen gevonden waarden sluiten eene rangschikking in een kubisch net uit[1]). Voor de beoordeeling of die tijdelijke groepeeringen tot eene kristalstructuur uit eene andere symmetrieklasse zouden kunnen behooren, zijn de gegevens niet voldoende[2]). Intusschen schijnen ons het optreden van een plotseling stolpunt, en de mogelijkheid van onderkoeling niet gunstig voor de onderstelling van het optreden van zoodanige tijdelijke kristalgroepeeringen.

Naar aanleiding van deze overwegingen hebben wij nog met Custralen eene opname van water gedaan bij ongeveer 0,5° C. De daarbij verkregen interferentiefiguur was volkomen overeenkomstig die, welke vroeger bij kamertemperatuur werd verkregen. Alleen bleek aan den buitenrand van de in § 4 genoemde vrijwel uniforme zwarting de intensiteit der zwarting wat grooter te zijn, zoodat zich daar een tweede ring afteekent, wat wijst op het aanwezig zijn van meer dubbelmoleculen bij die lagere temperatuur. Voor het aanwezig zijn van meer of grootere kristalgroepen was geen aanwijzing voorhanden.

---

[1]) Vergl. Meded. N°. 10, p. 91, noot 2.

[2]) Stikstof en argon kristalliseeren kubisch: W. Wahl, Proc. Roy. Soc. A 87, p. 371, 1912; zuurstof is beneden het smeltpunt eerst hexagonaal: W. Wahl, Proc. Roy. Soc. A 88, p. 61, 1913.

Scheikunde. — H. J. BACKER en J. H. DE BOER: *„Het n.α-sulfoboterzuur en zijne optisch actieve componenten.”*

(Aangeboden door de Heeren F. M. JAEGER en P. VAN ROMBURGH.)

Nadat gebleken was, dat het α-sulfopropionzuur zich in zijne optisch actieve componenten liet scheiden [1]), trachtten wij deze splitsing ook bij het norm. α-sulfoboterzuur te bewerken. Tevens werd de gelegenheid aangegrepen om dit zuur, hetgeen reeds sedert 1875 bekend is, maar tot dusverre nog niet in zuiveren gekristalliseerden toestand was verkregen, nader te leeren kennen.

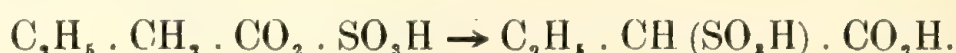
Het zuur ontstaat bij directe sulfureering van het n.α-boterzuur of van boterzuuranhydride [2]).

Evenals bij het propionzuur komt de sulfonzuurgroep aan het α-koolstofatoom, hetgeen wordt bewezen door de verwantschap met α-broomboterzuur, waarvan de structuur vaststaat.

HEMILIAN heeft den ester van dit zuur laten reageeren met ammoniumsulfiet en wij hebben deze reactie toegepast op het vrije α-broomboterzuur; in beide gevallen ontstond hetzelfde sulfoboterzuur als bij de directe sulfureering.

Bovendien verkregen we het sulfoboterzuur in goede opbrengst (70 %) uit het aethylmalonzuur, hetgeen bij de sulfureering een molecuul kooldioxyde verliest. Ten overvloede kan deze vormingswijze als argument voor de structuur dienen, daar het actieve waterstofatoom van het aethylmalonzuur de meeste kans heeft door de sulfonzuurgroep te worden vervangen.

Als bereidingsmethode diende ons de sulfureering van het zorgvuldig gefractioneerde n. boterzuur met zwavelzuuranhydride. In de koude ontstaat het butyrylzwavelzuur, dat bij verhitting overgaat in het sulfoboterzuur:



$$C_2H_5 . CH_2 . CO_2 . SO_3H \rightarrow C_2H_5 . CH (SO_3H) . CO_2H.$$

Het zuur werd afgescheiden in den vorm van zijn baryumzout, dat door kristallisatie gezuiverd werd en waaruit zwavelzuur het organische zuur weder in vrijheid stelde.

---

[1]) FRANCHIMONT en BACKER, Versl. dezer Akad. **17**, 653 (1914); Recueil d. trav. chim. **39**, 751 (1920).

[2]) HEMILIAN, Ann. d. Chemie **176**, 2 (1875). FRANCHIMONT, Recueil d. trav. chim. **7**, 27 (1888). VAN PESKI, Recueil **40**, 736 (1921).

Het sulfoboterzuur was tot dusverre slechts bekend als een dikke stroop. Het is ons gelukt het zuur in gekristalliseerden toestand te verkrijgen, door een geconcentreerde zuivere oplossing geruimen tijd in vacuo boven phosphorpentoxyde te laten staan.

Het α-sulfoboterzuur vormt kleurlooze harde kristallen. Evenals sulfoazijnzuur en sulfopropionzuur bevat het één molecuul kristalwater en is het buitengewoon hygroscopisch. Het smeltpunt, met behulp van een vroeger beschreven apparaatje[1]) bepaald, bleek te zijn 66°. Daar sulfoazijnzuur smelt bij 84—85° en sulfopropionzuur bij 100.5°, heeft men hier misschien het begin van een alterneerende reeks van smeltpunten, zooals die bij de vetzuren wordt aangetroffen.

Van het sulfoboterzuur hebben we eenige zouten met aromatische aminen bereid.

Het zure sulfobutyraat van aniline vormt kleine glinsterende kristalplaatjes van het smeltpunt 175°. Het zure sulfobutyraat van p-toluidine, hetgeen uit alcoholische oplossing door aether als aethergel wordt afgescheiden, kan worden verkregen als een witte gekristalliseerde stof van het smeltpunt 163°.

De zure zouten van p-anisidine en p-phenetidine werden wel gekristalliseerd verkregen, maar niet in zuiveren kleurloozen toestand.

Verhit men deze sulfobutyraten met een overmaat van de betreffende aminen, dan wordt de carboxylgroep onder waterverlies geamideerd, terwijl de sulfonzuurgroep gebonden blijft aan een molecuul van het amine.

Met aniline ontstond aldus het *butyranilide-α-sulfonzuur aniline*



$$(C_2H_5)(CONHC_6H_5)CH . SO_3H \ldots NH_2C_6H_5,$$

hetgeen uit water kristalliseert in concentrisch gegroepeerde vedervormige naalden van soms 5 cM. lengte, die omstreeks 253—256° smelten.

Ook van de overige bovengenoemde aromatische aminen werden goed gekristalliseerde amiden verkregen, n.l.:

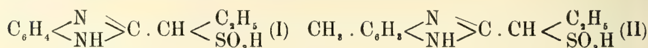
butyro-p-toluidide-α-sulfonzuur p-toluidine, smp. 260—263°,
butyro-p-anisidide-α-sulfonzuur p-anisidine smp. 242°,
butyro-p-phenetedide-α-sulfonzuur p-phenetidine, smp. 264—266°.

Bij verhitting met aromatische o-diaminen geeft het sulfoboterzuur, evenals sulfopropionzuur, onder verlies van twee moleculen water, derivaten van benzimidazol.

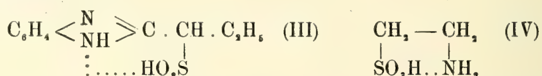
Het sulfobutyraat van o-phenyleendiamine b.v. vormde bij ver-

[1]) Chem. Weekbl. **16**, 1564 (1919).

hitting op 180° het *benzimidazol-2-propylsulfonzuur* (I), terwijl uit het sulfobutyraat van 3,4-diaminotoluol op dezelfde wijze ontstond het *methylbenzimidazol-2-propylsulfonzuur* (II).



Deze imidazolen werden verkregen als witte kristallijne stoffen. Ze zijn nagenoeg onoplosbaar in de gewone oplosmiddelen, hebben een zeer hoog smeltpunt en ondanks de aanwezigheid van een sulfonzuurgroep, binden ze zich niet met aromatische aminen en zijn ze niet hygroscopisch. Al deze eigenschappen wijzen er op, dat de sulfonzuurgroep met de basische functie van het imidazol een inwendig zout vormt (III) en herinneren volkomen aan de eigenschappen van het taurine, waarvoor een dergelijke structuur wordt aangenomen (IV).



Met sterke basen, zooals baryt, geven deze imidazolsulfonzuren goed gekristalliseerde zouten. Uit het baryumzout en kopersulfaat ontstaat wel een groene oplossing, maar deze ontleedt zich bij verwarming dadelijk en op den duur ook bij de gewone temperatuur, zoodat het koperzout niet in gekristalliseerden, zuiveren toestand kon worden afgezonderd.

Het verdient de aandacht, dat men, ondanks vele pogingen, evenmin van taurine een koperzout heeft verkregen.

De splitsing van het racemische α-sulfoboterzuur werd beproefd met behulp van strychnine, op grond van de ervaringen met het sulfopropionzuur.

Hiermede werd inderdaad het doel bereikt.

Evenals bij het sulfopropionzuur, is ook hier het zure strychninezout van het d-zuur minder oplosbaar dan het zout van het l-zuur.

Na drie- of viermalige kristallisatie is het strychninezout van het d-sulfoboterzuur geheel vrij van den anderen component. Het kristalliseert met twee moleculen water in glinsterende naaldjes.

De eerste moederloog geeft bij concentratie langzaam een kristallisatie van het zure strychninezout van het l-sulfoboterzuur, hetgeen door herhaalde kristallisatie uit alcohol zuiver wordt verkregen.

Door ontleding der strychninezouten met baryt ontstaan de baryumzouten der actieve zuren.

Deze actieve baryumzouten kristalliseeren uit water in lange

naalden, die $2\frac{1}{2}$ mol. water bevatten, in afwijking van het racemische baryumzout, dat zich afscheidt in kleine glinsterende blaadjes met twee moleculen kristalwater.

De richting der draaiing van de neutrale baryumzouten is, evenals bij het sulfopropionzuur, tegengesteld aan die van de vrije zuren.

Het moleculaire draaiingsvermogen hangt af van de concentratie, bij verdunning stijgt het iets. De baryumzouten geven bv. in een oplossing van $2\frac{1}{2}$ °/₀, voor natriumlicht, een moleculaire draaiing van 32.2° en in een oplossing van 5°/₀ een draaiing van 29.9°. In een oplossing van $2\frac{1}{2}$ °/₀ doet de aanwezigheid van 10°/₀ baryumchloride de moleculaire draaiing dalen tot 29.3°.

Dit wijst er op, dat de stijging der moleculaire draaiing bij verdunning zou kunnen worden toegeschreven aan een toeneming der ionisatie, een verschijnsel, dat wellicht verband houdt met het feit, dat de draaiingsrichting der neutrale zouten tegengesteld is aan die der vrije zuren.

De moleculaire draaiing der vrije zuren bedraagt voor natriumlicht 7.8°.

De zure zouten draaien het polarisatievlak in dezelfde richting en omstreeks even sterk als de vrije zuren. Ook in dit opzicht gedraagt het sulfoboterzuur zich dus analoog aan het sulfopropionzuur.

Het onderzoek wordt voortgezet en zal later uitvoeriger worden gepubliceerd.

Groningen, 13 Jan. 1923. *Org. Chem. Lab. der Rijks-Univ.*

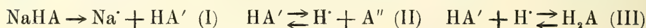
Scheikunde. — H. J. BACKER: *„De tweede dissociatieconstante van sulfoazijnzuur en α-sulfopropionzuur."*

(Aangeboden door de Heeren F. M. JAEGER en P. VAN ROMBURGH).

Het ligt voor de hand de tweede dissociatieconstante van een tweebasisch zuur H_2A af te leiden uit de concentratie der waterstofionen in de oplossing van een zuur zout.

A. A. NOYES [1]) heeft echter aangetoond, dat men hiermede in het algemeen niet kan volstaan.

Aangenomen dat de ionisatie van het zure natriumzout (reactie I) nagenoeg volledig is, en dat dus de concentratie der HA' ionen, die volgens reactie II ten deele verder worden gesplitst, mag worden gelijkgesteld aan de concentratie van het zure zout dat men heeft opgelost, dan toch moet men bedenken, dat het aantal waterstofionen zal afnemen door de vereeniging met de ionen HA' (reactie III).



$$NaHA \rightarrow Na^{\cdot} + HA' \quad (I) \qquad HA' \rightleftarrows H^{\cdot} + A'' \quad (II) \qquad HA' + H^{\cdot} \rightleftarrows H_2A \quad (III)$$

Deze laatste reactie zal zich vooral merkbaar maken, wanneer het zuur zwak is, een omstandigheid die zich voordeed bij alle organische zuren, die in dit opzicht zijn onderzocht.

Bij de sulfocarbonzuren daarentegen heeft men voorbeelden van sterke tweebasische zuren, die reeds bij geringe verdunningen goed zijn geioniseerd. Derhalve mag men verwachten, dat het verbruik van waterstofionen voor de vorming van het vrije zuur slechts geringen invloed zal hebben, zoodat uit de concentratie der waterstofionen de dissociatiegraad van reactie II mag worden afgeleid en vervolgens de evenwichtsconstante.

De algemeene formule welke NOYES voor de zure zouten van tweebasische zuren heeft afgeleid, luidt:

$$k_2 = \frac{(k_1 + c + H)\, H^2}{k_1\,(c - H)}\,.$$

k_1 en k_2 zijn de eerste en tweede dissociatieconstanten van het zuur, c is de oorspronkelijke concentratie van het zure zout (in grammoleculen per liter) en H is de concentratie der waterstofionen (in gramionen per liter).

[1]) Z. f. physik. Chemie **11**, 495 (1893).

Indien k_1 groot is ten opzichte van c en H, dan kan men schrijven :

$$k_2 = \frac{H^2}{c - H}.$$

Deze uitdrukking nu is identiek met de verdunningswet van Ostwald $k = \alpha^2/(1-\alpha)v$, zooals blijkt bij substitutie van $\alpha = H/c$ en $v = 1/c$.

Deze vereenvoudiging zal geoorloofd zijn bij het sulfoazijnzuur en het sulfopropionzuur, waarvan blijkens een vorige verhandeling [1]) de eerste dissociatieconstanten bedragen 0.58 en 0.57.

De oplossingen der zure zouten van deze verbindingen werden nu in verschillende concentraties, met behulp van indicatoren, bij kamertemperatuur vergeleken met de „buffervloeistoffen" van Sörensen en van Clark.

In onderstaande tabel is v het aantal liters, waarin 1 grammomolecuul van het zure zout voorhanden is, p de waterstofexponent ($p = -\log H$), H is de concentratie der waterstofionen in gramionen per liter, α is de dissociatiegraad van reactie II ($\alpha = Hv$) en de hieruit afgeleide evenwichtsconstante is $k_2 = \alpha^2/(1-\alpha)v$.

	v	p	H	α	k_2
Sulfo-azijnzuur	16	2.65	0.00224	0.0358	8.3×10^{-5}
	32	2.8	0.00158	0.0506	8.4
	64	2.95	0.00112	0.0717	8.5
	128	3.05	0.00089	0.114	11.5
	256	3.25	0.00056	0.143	9.4
	512	3.4	0.00040	0.205	10.3
Sulfo-propionzuur	16	2.7	0.00200	0.0320	6.6×10^{-5}
	32	2.85	0.00141	0.0451	6.7
	64	3.0	0.00100	0.0640	6.8
	128	3.2	0.00063	0.0806	5.5
	256	3.4	0.00040	0.102	4.5
	512	3.55	0.00028	0.144	4.7

De overeenstemming der constanten bij verschillende verdunningen is zeer bevredigend, daar men met de methode der indicatoren niet een groote nauwkeurigheid kan bereiken.

[1]) Versl. dezer Akad. **31**, 378 (1922).

Toch zou men voor de groote concentraties nog een correctie kunnen aanbrengen volgens de formule van NOYES. Hiertoe moeten de waarden van k_2 worden vermenigvuldigd met $(k_1 + c + H)/k_1$. Deze correctie heeft alleen invloed bij de verdunningen 16, 32 en 64. Men vindt aldus de volgende waarden:

		$v =$ 16	32	64	128	256	512	gemiddeld:
sulfoazijnzuur	$k_2 =$	9.1	8.9	8.8	11.5	9.4	10.3	9.7
sulfopropionzuur	$k_2 =$	7.2	7.1	7.0	5.5	4.5	4.7	6.0

Kleine verschillen in de colorimetrische bepaling van p hebben bij deze methode een grooten invloed op de waarde van k_2.

Eenvoudiger kan men de tweede dissociatieconstante van een tweebasisch zuur bepalen door het onderzoek van een mengsel van een zuur en een neutraal zout[1]).

Wanneer α'' de dissociatiegraad is van het neutrale zout Na_2A en α' de dissociatiegraad van het zure zout NaHA, dan kan voor de tweede dissociatieconstante van het zuur worden geschreven:

$$k_2 = \frac{\alpha'' \times [Na_2A]}{\alpha' \times [NaHA]}.$$

Daar deze dissociatiegraden voor zouten niet veel kleiner zijn dan 1, kan de factor α''/α' bij een eerste benadering verwaarloosd worden.

Voor den eenvoud werd een oplossing genomen, die een gelijk aantal moleculen van het zure en het neutrale zout bevatte, zoodat $k = H$ en deze oplossing werd bij verschillende verdunningen onderzocht.

De concentratie van de waterstofionen werd weder volgens de indicatorenmethode bepaald.

In de volgende tabel is v het aantal liters, waarin zich bevinden een molecuul van het neutrale zout benevens een molecuul van het zure zout.

De veranderingen der constante bij verdunning zijn niet groot, maar toch is het opmerkelijk dat ze alle in dezelfde richting zijn. Bij verdunning wordt de zuurgraad der oplossing geringer.

Dit is trouwens in overeenstemming met de theorie, want bij het natriumzout van een tweebasisch zuur stijgt de dissociatiegraad door verdunning sneller dan bij het natriumzout van een eenbasisch zuur, dus de waarde van α''/α', die voor oneindige verdunning 1 moet worden, is voor grootere concentraties kleiner.

---

[1]) Aldus heeft I. M. KOLTHOFF de tweede dissociatieconstanten van een aantal dicarbonzuren bepaald. (Der Gebrauch von Farbenindicatoren, blz. 102).

	v	p	$H = k_2$
Sulfo-azijnzuur	32	4.0	10.0×10^{-5}
	64	4.05	8.9
	128	4.1	7.9
	256	4.15	7.1
	512	4.25	5.6
Sulfo-propionzuur	32	4.25	5.6×10^{-5}
	64	4.3	5.0
	128	4.35	4.5
	256	4.4	4.0
	512	4.4	4.0

De waarde van α'' volgt uit het in de vorige verhandeling gepubliceerde geleidingsvermogen van het neutrale natriumzout bij verschillende verdunningen en voor α' kunnen de reeds medegedeelde waarden worden genomen.

Na het aanbrengen dezer correctie vindt men voor de constanten

	$v = 32$	64	128	256	512	gemiddeld:
sulfoazijnzuur	$k_2 = 8.7$	7.9	7.3	6.7	5.4	7.2
sulfopropionzuur	$k_2 = 4.8$	4.4	4.1	3.7	3.8	4.2

In het vorige artikel zijn de tweede dissociatieconstanten der beide zuren uit de metingen van het geleidingsvermogen der zure zouten berekend.

Thans zijn deze constanten afgeleid vooreerst uit den colorimetrisch bepaalden zuurgraad der zure zouten en vervolgens uit den zuurgraad van mengsels der neutrale en zure zouten.

De gemiddelde uitkomsten der verschillende methoden zijn in onderstaande tabel vereenigd.

Bij de beoordeeling dient men te bedenken, dat elk der hier gebruikte methoden slechts benaderde waarden geeft, zooals ook blijkt uit de onderlinge afwijkingen bij elke reeks bepalingen.

De orde van grootte is echter dezelfde voor de op verschillende wijzen bepaalde constanten.

Methoden	Sulfo-azijnzuur	Sulfo-propionzuur
I. Geleidingsvermogen der zure zouten.	$k_2 = 7.4 \times 10^{-5}$	$k_2 = 4.8 \times 10^{-5}$
II. Zuurgraad van mengsels van zure en neutrale zouten	7.2	4.2
III. Zuurgraad der zure zouten.	9.7	6.0

Uit het onderzoek mag dus als resultaat worden afgeleid, dat de tweede dissociatieconstante van het sulfoazijnzuur bedraagt omstreeks 1×10^{-4} en dat de constante van het sulfopropionzuur ongeveer een derde kleiner is.

Groningen, Jan. 1923. *Org. Chem. Lab. der Rijks-Univ.*

Dierkunde. — H. BOSCHMA: „*Experimenteele Knopvorming bij Fungia fungites*".

(Aangeboden door de Heeren C. PH. SLUITER en MAX WEBER).

Een groot aantal van de Fungia's, die men op de koraalriffen vindt, vertoonen onregelmatigheden, die meestal ontstaan zijn doordat oorspronkelijk een gedeelte van het levende weefsel te gronde ging. In vele gevallen worden zulke plaatsen waar de levende deelen afgestorven zijn aangetast door kleine algen, die tot een aanzienlijke diepte doordringen en door hun voortwoekeren steeds meer van het levende weefsel doen afsterven. Zulke afstervende plekken oefenen dikwijls een prikkel uit op het omgevende levende weefsel, waardoor dit een sterkeren groei vertoont dan gewoonlijk. Het resultaat is dan, dat een soort verhoogde wal ontstaat op de grens van het levende en het doode gedeelte. Deze vermeerderde groeikracht uit zich in vele gevallen zelfs in de vorming van knoppen. Een vorige publicatie handelt over deze knopvorming aan volwassen Fungia's [1]). Hierin werd er ook reeds op gewezen, dat kleine algen, die op de koraal parasiteeren, een der voornaamste oorzaken voor het tot stand komen van knoppen zijn. In het algemeen is het voldoende wanneer door een of andere oorzaak een deel van het levende weefsel vernietigd wordt, om de omgeving tot sterkeren groei te prikkelen.

Dit bracht mij er toe te trachten experimenteel knoppen aan Fungia's te doen ontstaan door een gedeelte van het levende weefsel te dooden. Het materiaal voor deze proef bestond uit exemplaren van *Fungia fungites* van het rif van het eiland Edam bij Batavia. De meest normale exemplaren zonder knoppen of andere onregelmatigheden werden hiervoor uitgezocht. Om een gedeelte van het weefsel te dooden, werd op 18 en 19 Augustus 1921 in het centrale gebied van de orale zijde van een vijftigtal exemplaren een propje stopverf geduwd, dat door de septa aan weerskanten van den mond voldoende vastgehouden werd. De zoo behandelde koralen werden nu weer op de oorspronkelijke plaats terug gelegd.

Bij deze proef verwachtte ik, dat de vernietiging van een gedeelte

---

[1]) H. BOSCHMA, Knopvorming en vergroeiing van knoppen bij Fungia fungites en Fungia actiniformis. Verslagen Kon. Ak. van Wetensch. Amsterdam. Deel XXX, 1922.

der weefsels in het centrale deel van de orale zijde zich bij de meeste exemplaren ook zou uitstrekken tot den mond. Daardoor was er veel kans, dat er een sterke reactie op de beschadiging zou volgen en dus spoedig knoppen zouden ontstaan. De voedselopneming van het dier werd op deze wijze wel eenigszins belemmerd. Maar in aanmerking genomen dat het voedsel van Fungia slechts gedeeltelijk uit andere organismen dan zooxanthellen bestaat en bovendien dat de basale deelen van de axiale groeve niet geheel bedekt waren, was de belemmering niet van zoo ernstigen aard. Deze manier van experimenteeren was voor mij de geschiktste om in korten tijd resultaten te bereiken.

Na bijna vier maanden was de stopverf in de meeste exemplaren nog onveranderd in vorm als een harde massa boven den mond aanwezig. Sommige koralen hadden reeds knoppen gevormd. Op 11 December 1921 werden vijf exemplaren meegenomen, waarvan een (N°. 464) op formaline en vier (Nos 460—463) droog bewaard zijn. De veranderingen door de proef teweeggebracht zijn in het kort de volgende:

N⁰. 462. Ongeveer een vijfde deel van de bovenoppervlakte is dood. Onder dit gedeelte zijn aan de onderoppervlakte knoppen ontstaan, kleinere aan den rand en grootere meer naar het midden toe.

N⁰. 463. De helft van de bovenoppervlakte is dood. Slechts enkele septa in dit doode gedeelte bezitten in hun randgedeelte nog resten van levend weefsel. Gedeelten van den rand van de onderoppervlakte, die zich onder het doode gedeelte van de bovenoppervlakte bevinden, zijn ook dood, verder is alles nog bedekt met levend weefsel. Aan de onderoppervlakte eenige groote knoppen en vele kleine knoppen aan het randgedeelte (Fig. 1—3).

N⁰. 464. Twee tegenover elkaar liggende vierde deelen van de bovenzijde zonder levend weefsel. Het afsterven van de weeke deelen heeft zich om den rand van de koraal voortgezet, zoodat ook hier gedeelten dood zijn. Aan de onderoppervlakte enkele groote knoppen en een paar kleinere in den rand.

N⁰. 460. Aan de bovenoppervlakte was het levende weefsel geheel verloren gegaan, aan de onderoppervlakte alleen op sommige plaatsen aan den rand. Hier bevinden zich enkele kleine knoppen, terwijl in het meer centrale gedeelte een paar grootere ontstaan zijn.

N⁰. 461. Bovenoppervlakte geheel dood, onderoppervlakte nog bedekt met levend weefsel. In den rand van de onderoppervlakte vele kleine knoppen, in het middengedeelte enkele grootere.

Bij alle exemplaren was eerst een gedeelte van het weefsel in de onmiddellijke nabijheid van de stopverf te gronde gegaan. Dit proces zette zich nu voort langs de septa naar de peripherie zoodat het doode gedeelte den vorm heeft van een cirkelsector. Het verval van het levende weefsel strekte zich nu om den rand heen verder uit aan de onderoppervlakte, en dit had ten gevolge, dat het omgevende

weefsel daar tot grootere activiteit geprikkeld werd, en daardoor dikwijls knoppen vormde.

Aan de levende koralen vielen het meest op de grootere knoppen, die zich op eenigen afstand van den rand bevonden (Fig. 3). De diameter van het basale gedeelte van deze knoppen varieerde tusschen ongeveer 2 en 12 mm. De mond was steeds klein en de hoogte gering. De stekels van de ribben van de oude koraal waren door de dunne levende deelen van den knop heen dikwijls zichtbaar. Bij deze groote knoppen is het skelet nog zeer onvolledig. De theca en de eerste septa zijn slechts zwak ontwikkeld; daarentegen is de columella in den vorm van een groot aantal onregelmatige trabeculae reeds duidelijk waarneembaar.

Bij de kleinere knoppen, die voornamelijk in de randgedeelten van de onderzijde ontstaan waren, is de ontwikkeling van het skelet gemakkelijk na te gaan, daar de ouderdom der knoppen onderling zeer verschillend is. Zij zijn veel regelmatiger van bouw dan de grootere.

In de jongste knoppen, met een diameter van ongeveer 0,5 mm., is van het skelet nog slechts de theca zichtbaar, als een dunne wand, die zich scheef naar boven uitstrekt, en daardoor de gedaante heeft van een afgeknotten kegel (Tekstfig. *a*). De theca is niet van openingen voorzien; deze ontstaan pas bij veel oudere knoppen. Spoedig

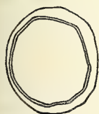


Fig. *a*. × 45.

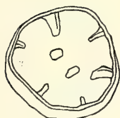


Fig. *b*. × 45.



Fig. *c*. × 45.

hierna ontstaat de eerste cyclus van zes septa, die van de theca af verder naar het midden van den knop uitgroeien (Tekstfig. *b*). De bovenrand van de theca steekt boven de septa uit. Ook de columella ontstaat op dit stadium als korte kalkstukjes in de basale deelen van den knop. Bij knoppen van deze grootte zijn nooit meer dan zes septa gevormd. Zij ontstaan ongeveer tegelijkertijd, daar knoppen met een geringer aantal septa zeer zelden te vinden zijn. Het aantal

van zulke knoppen met minder dan zes septa is te gering om te kunnen aangeven of de septa in een bepaalde volgorde ontstaan.

De volgende cyclus van septa is pas bij knoppen te zien, die een diameter van ongeveer 1 mm. bereikt hebben. De zes eerste septa zijn hier reeds aanmerkelijk in grootte en in dikte toegenomen, en bezitten reeds enkele tanden (Tekstfig. *c*). De columella heeft zich op dit stadium ook vergroot. De septa van den tweeden cyclus zijn op het eerste gezicht te onderscheiden van die van den eersten cyclus door hun geringere ontwikkeling en lengte. De knop heeft nu de grootte bereikt van het jongste door BOURNE[1]) beschreven stadium, en vertoont hiermede een groote gelijkenis. De verdere ontwikkeling van deze knoppen komt met die van de knoppen van een anthocormus overeen.

Met uitzondering van de vijf exemplaren, die in December 1921 meegenomen werden, bleef de rest van de Fungia's nog bijna negen maanden op het rif. Op 2 September 1922, toen de proef in het geheel dus iets langer dan een jaar geduurd had, werden de exemplaren die terug te vinden waren, verzameld. De stopverf bevond zich nog in het centrale gedeelte van de orale oppervlakte, in de meeste gevallen nog onveranderd van vorm. Van de meeste koralen had althans een gedeelte van de orale oppervlakte zijn levend weefsel verloren, slechts in enkele gevallen had de stopverfprop weinig of geen veranderingen veroorzaakt. Het uiterlijk van de Fungia's was nu als volgt:

Nos. 507. 510, 519 en 520. De koralen hadden een zeer normaal uiterlijk, zonder doode gedeelten. Geen knopvorming.

N⁰. 518. Levend weefsel normaal. De centrale gedeelten van enkele septa zijn hooger geworden en bezitten langere tanden. Dit komt door het optreden van nieuwe monden naast den ouden mond, zooals bij de volgende twee exemplaren duidelijker te zien was.

N⁰. 509. Geen gedeelten van het levende weefsel gestorven. De centrale uiteinden van vele septa zijn op de plaatsen, die in aanraking zijn met de stopverf hooger uitgegroeid en nieuwe monden zijn naast deze hoogere gedeelten van de septa ontstaan. De nieuwe monden zijn nu geheel door septa omgeven: aan den eenen kant lange regelmatige (de oude septa van de moederkoraal) en aan den anderen kant de kortere, pas gevormde hoogere gedeelten. Deze gedeelten zijn eenigszins onregelmatig van vorm, zij bezitten ook langere tanden dan de oorspronkelijke septa.

N⁰. 508. Geheel bedekt met levend weefsel. Aan elken kant van de oude mondspleet waren enkele jonge knoppen ontstaan, wier monden zich bevonden tusschen de normale, langere gedeelten van de septa, en de later ontstane hoogere onregelmatige deelen (Fig. 5). Dit exemplaar vertoont veel overeenkomst met N⁰. 509,

---

[1]) G. C. BOURNE, On the Postembryonic Development of Fungia. Transact. Roy. Dublin Soc. Vol. V, 1893.

de jonge septa tusschen de nieuwe monden en de stopverfprop zijn ook hier van langere tanden voorzien.

N⁰. 521. Weinig veranderingen. Slechts van de centrale gedeelten van enkele naast elkaar liggende septa is het levende weefsel verdwenen. Geen knopvorming.

N⁰. 506. Bovenoppervlakte met twee doode gedeelten, het grootste ongeveer een vijfde deel van de oppervlakte, het kleinste een smalle streep van den mond tot den rand van de koraal. Het grootste doode gedeelte strekt zich om den rand van de koraal heen uit over een kleiner gedeelte van de onderzijde. Aan den rand zijn twee gesteelde jonge knoppen ontstaan. De diameter van de schijf bedraagt resp. 2,5 en 3 m.m. In het doode gedeelte aan de onderoppervlakte bevinden zich een paar kleinere knoppen.

N⁰ 501. Bijna de helft van de bovenoppervlakte dood en een kleiner gedeelte van de onderzijde, voornamelijk de rand onder het doode deel van de bovenzijde, eveneens. Op de grens van het levende en het doode deel van de onderoppervlakte, nog geheel omgeven door levend weefsel van de oude koraal, zijn vijf knoppen ontstaan. Zij zijn zeer regelmatig en duidelijk gesteeld. De diameter van de schijf, die bij alle reeds breeder is dan de steel, bedraagt 6, 7.5, 10.5, 8.5 en 6 m.m. In het doode randgedeelte van de onderzijde bevinden zich enkele kleinere, jongere knoppen (diameter 1 tot 3 m.m.), die echter hunne levende deelen verloren hebben.

N⁰. 500. Loodrecht op de axiale groeve heeft een breede band van de bovenoppervlakte zijn levend weefsel verloren. In het levende gedeelte vertoonen sommige septa een sterkeren groei van het centrale gedeelte, nieuwe monden waren hier echter nog niet te zien. Van de onderoppervlakte hadden de gedeelten van den rand, die grenzen aan de doode deelen van de bovenoppervlakte hunne weeke deelen verloren. In de nabijheid hiervan waren in het levende gedeelte knoppen ontstaan, aan den eenen kant vijf en aan den anderen kant twee (Fig. 4). Deze knoppen zijn minder regelmatig van vorm dan die van N⁰. 501. Zij bevinden zich in verschillenden graad van ontwikkeling. De afmetingen zijn: 13×8, 7.5×7, 4.5×4, 6×5.5, 5×4, 13.5×8.5 en 10×7 m.m. Zij zitten met breede basis vast aan de oude koraal. De septa van de jongste knoppen, die nog weinig ontwikkeld zijn, zijn van de stekels van de ribben van de moederkoraal te onderscheiden door hun afgeplatten vorm. In de basale deelen van de meeste van deze knoppen zijn de stekels van de oude koraal nog onveranderd aanwezig. In het doode deel van den rand, waar de vijf knoppen voorkomen, is een gesteelde knop ontstaan (diameter van de schijf 4.5 m.m., van de steel 3.5 m.m., hoogte 3.5 m.m.). Behalve deze zijn er nog de resten van een aantal kleinere te zien, wier levend weefsel echter verloren gegaan is.

N⁰. 511. Slechts een derde gedeelte van de koraal was zoowel aan de boven- als aan de onderzijde nog bedekt met levend weefsel. In het doode gedeelte van de onderoppervlakte waren een groot aantal knoppen ontstaan, waarvan de meeste nog leefden. De middellijn van deze knoppen varieert tusschen 1 en 3 m.m.

N⁰. 502. Van de bovenoppervlakte was alleen een klein gedeelte van den rand nog bedekt met levend weefsel; van de onderoppervlakte was bijna nog een vierde deel levend. In dit deel bevinden zich, in de nabijheid van het doode gebied, vier groote knoppen, waarvan slechts twee goed ontwikkelde septa bezitten. De afmetingen zijn: 10×7, 7×6.5, 9.5×7.5 en 10×9 m.m. De knoppen zijn nog niet gesteeld, zoodat de basale deelen van de septa nog over hun geheele lengte vastgegroeid zijn aan het skelet van de moederkoraal. De septa van de jongste knoppen zijn alleen door hun afgeplatte gedaante te onderscheiden van de stekels der ribben van de oude koraal. Behalve deze groote knoppen bevinden zich aan den

rand, nu omgeven door het doode gebied, twee gesteelde knoppen met een schijfbreedte van 3 en 2.5 m.m. Bovendien zijn nog enkele kleinere in de randgedeelten zichtbaar.

N⁰. 514. Bovenoppervlakte zonder levende deelen, echter waren de weefsels van een vierde gedeelte pas kort geleden gestorven, daar het skelet van dit deel nog weinig begroeid is met algen en andere organismen, in tegenstelling met het overige gedeelte. Aan den rand van het deel, dat reeds lang dood was, zijn eenige jonge, gesteelde knoppen ontstaan, die echter eveneens hun levend weefsel verloren hebben. De onderoppervlakte bezat nog resten van levend weefsel onder dat deel van de bovenoppervlakte, dat nog het langst in leven gebleven was. Daarop volgt een breede zoom waarvan bijna alle weeke deelen verdwenen waren. Hierin zijn enkele groote knoppen ontstaan (middellijn tot 6.5 m.m.). Van het skelet van deze knoppen is nog weinig te zien. In het overige deel van de onderzijde, dat reeds langer dood was, zijn de resten van vele kleine knoppen zichtbaar, die geen van alle meer leefden.

N⁰. 516. Bovenoppervlakte zonder levende deelen, in de randgedeelten enkele kort gesteelde jonge knoppen. Onderoppervlakte nog bedekt met levend weefsel. In den rand enkele jonge knoppen van geringe afmetingen, nog geheel omgeven door levend weefsel van de moederkoraal.

N⁰. 513. Levende deelen van de bovenoppervlakte geheel verdwenen, aan de onderoppervlakte ongeveer een derde deel dood. In de randgedeelten, waar de weeke deelen verdwenen zijn, enkele jonge knoppen, waarvan de meeste gesteeld. Middellijn van de schijf van deze knoppen tot 3 m.m. In het gedeelte van de onderoppervlakte, dat nog met levend weefsel bedekt is, komen een groot aantal knoppen voor, in alle stadia van ontwikkeling. De grootte varieert van 0.5 tot 3.5 m.m. De op de tekstfiguren afgebeelde stadia zijn ook hier in vele knoppen terug te vinden.

N⁰. 505. Zoowel de boven- als de onderoppervlakte zonder levend weefsel. Aan den rand komen enkele knoppen voor, de schijf van de grootste hiervan heeft een doorsnede van 7 m.m. Aan de onderoppervlakte van de koraal vele jonge knoppen in verschillende stadia van ontwikkeling.

N⁰. 517. Dit exemplaar was door een toeval omgekeerd komen te liggen. Het had aan beide kanten zijn levend weefsel verloren. Aan de aborale zijde (nu dus de bovenoppervlakte) waren geen knoppen ontstaan, aan de orale zijde bevinden zich acht knoppen, waarvan sommige reeds gesteeld zijn. De middellijn van de schijf van deze knoppen varieert tusschen 2.5 en 5.5 m.m.

Zooals uit het bovenstaande blijkt, waren de resultaten zeer verschillend. In sommige gevallen had het vernietigen van een deel der levende weefsels alleen invloed op de onmiddellijke omgeving en werd hier het weefsel tot sterkere activiteit gebracht. Dit uitte zich dan in de vorming van nieuwe monden, naast de oude, die verloren gegaan was, en kleine septa tusschen de nieuwe monden en het doode gedeelte.

Meestal was echter ten gevolge van de proef een kleiner of grooter deel van het overige levende weefsel van de Fungia te gronde gegaan. Dit begon steeds aan de centrale deelen van een of

meer septa, dus naast de stopverf. Wanneer het centrale deel van een septum zijn levende deelen verloren heeft, zet zich dit proces voort naar de peripherie en vervolgens langs den rand naar de onderoppervlakte van de koraal. Van het afstervende weefsel blijven sommige geïsoleerde gedeelten in leven en hieruit ontstaan knoppen. Aan den rand van de oude koraal zijn deze klein en hebben een regelmatige gedaante; zij ontwikkelen zich als knoppen van een anthocormus.

Over de ontwikkeling van het skelet is nog het volgende op te merken. Volgens BOURNE[1]) zouden de twaalf eerste septa van Fungia tegelijkertijd ontstaan, evenals dit het geval is bij *Astroides.* In deze knoppen ontstaan echter eerst de zes septa van den eersten cyclus en daarna die van den tweeden. Daar de ontwikkeling van de knoppen een zoo regelmatige is en bovendien de oudere stadia geheel overeenkomen met die van de knoppen van een anthocormus, is ook te verwachten dat de eerste ontwikkeling van het skelet van de jonge Fungia's, die uit planulae ontstaan, op dezelfde manier plaats vindt als bij de jongste hier beschreven knoppen.

Bovendien bezitten de jongste stadia van *Fungia patella,* die door GARDINER[2]) beschreven zijn, niet meer dan zes septa, terwijl de oudere stadia een groote gelijkenis vertoonen met de jonge Fungia's die BOURNE beschreef. Ook VAUGHAN[3]) wijst er op dat het niet bewezen is, dat de eerste twaalf septa van Fungia tegelijkertijd optreden.

In de ontwikkeling van *Caryophyllia*[4]) komt een stadium voor, waarop het skelet met het in Tekstfig. *b* afgebeelde een groote gelijkenis vertoont. Echter zijn de voorafgaande processen bij beide koralen verschillend: terwijl bij *Caryophyllia* eerst de septa ontstaan en later de theca gevormd wordt, geschiedt dit bij *Fungia* omgekeerd. Bij *Caryophyllia* steken de septa dan ook reeds op een veel vroeger stadium boven de theca uit dan bij *Fungia.*

Terwijl dus aan den rand een aantal kleine knoppen en aan den onderkant verschillende groote knoppen ontstaan, sterft het weefsel verder af. Het resultaat hiervan is dan een dood exemplaar met een groot aantal levende knoppen van verschillenden ouderdom. Door

---

[1]) loc. cit.

[2]) J. STANLEY GARDINER, On the Postembryonic Development of Cycloseris. Willey's Zoological Results. Pt. II, 1899.

[3]) T. WAYLAND VAUGHAN, Recent Madreporaria of the Hawaiian Islands and Laysan. Smithsonian Institution, U. S. Nat. Museum, Bull. 59. 1907.

[4]) G. VON KOCH, Entwicklung von Caryophyllia cyathus. Mitt. Zool. Stat. Neapel, Bd. XII, 1897. (Het bedoelde stadium is afgebeeld in Fig. 14).

vele onderzoekers [1]) wordt aangenomen, dat dergelijke knoppen op doode exemplaren van dezelfde soort uit larven ontstaan zijn, die zich daar vastgehecht hebben. Reeds vroeger verdedigde ik mijn opvatting, dat deze jonge Fungia's knoppen zijn [2]). De proef leverde nu alle mogelijke tusschenstadia tusschen normale exemplaren en doode met knoppen.

De groote knoppen, die aan de aborale oppervlakte kunnen ontstaan, zijn in hun jongste stadia reeds zoo groot (tot 12 mm. in middellijn) dat het a priori onwaarschijnlijk is, dat deze uit larven ontstaan zijn. Bovendien staan de laterale weefsels van den knop in verbinding met die van het moederdier, terwijl de basale levende deelen van den knop direct over het skelet van de oude koraal liggen, wat volgt uit de manier, waarop de columella van deze knoppen gevormd wordt. De trabeculae hiervan ontstaan namelijk tusschen en op de onveranderde stekels van de ribben van de oude koraal.

In het bovenstaande zijn de jonge individuen, die als gevolg van de verwoesting van een deel der levende weefsels van de koraal ontstonden, knoppen genoemd. Theoretisch is echter geen van deze individuen als een knop te beschouwen. Bij de knopvorming blijft het moederdier intact, de knoppen ontstaan door een locale vermeerdering van groei aan het lichaam van het moederdier (Deegener [3])). Het dier, waaraan de jonge individuen ontstaan, is hier nu slechts een rest van wat het vroeger was. Het proces, waardoor de jonge individuen aan deze resten van dieren ontstaan, is daarom eerder te rangschikken onder fragmentatie, zooals dit door Korschelt en Heider [4]) gedefinieerd wordt. Kleine gedeelten van de lichaamsweefsels van willekeurige plaatsen krijgen namelijk een volledige zelfstandigheid en ontwikkelen zich tot nieuwe individuen. Dat deze

---

[1]) S. Stutchbury, An Account of the Mode of Growth of Young Corals of the Genus Fungia. Trans. Linn. Soc. London, Vol. XVI, 1833.

H. N. Moseley, Notes by a Naturalist on the Challenger. London, 1872.

L. Döderlein, Die Koralgattung Fungia. Abh. der Senckenb. naturf. Ges. Bd. XXVII, 1902.

Ook de jongste stadia van *Fungia patella*, die door Gardiner (loc. cit.) beschreven zijn, zijn waarschijnlijk knoppen van een exemplaar, waarvan de rest van het levende weefsel verloren gegaan was.

[2]) loc. cit. Ook Saville Kent (The Great Barrier Reef of Australia. London, 1893) acht het het meest waarschijnlijk, dat deze jonge Fungia's knoppen zijn, die uit de resten van het levende weefsel ontstonden.

[3]) P. Deegener, Versuch zu einem System der Monogonie im Thierreiche. Zeitschrift f. Wiss. Zoologie. Bd. 113, 1915.

[4]) E. Korschelt und K. Heider, Lehrbuch der vergleichenden Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere. 1 u. 2 Aufl. Allgemeiner Theil. 4 Lief. 2 Hälfte. 1910.

gedeelten zich niet van de rest van de oude koraal afsnoeren, maar aan het skelet vastgehecht blijven, doet aan de theoretische waarde van de afsnoering niets af.

Korschelt en Heider wijzen er op, dat de fragmentatie waarschijnlijk geen oorspronkelijk verschijnsel is, maar van processen van deeling of knopvorming af te leiden is. De hier behandelde processen bij Fungia staan zonder eenigen twijfel in verband met knopvorming. Men vindt soms dochterindividuen aan de aborale oppervlakte van exemplaren, wier orale oppervlakte geen onregelmatigheden vertoont. Deze dochterindividuen zijn dan echte knoppen. Zij hebben hetzelfde uiterlijk en zijn op dezelfde manier verbonden aan de oude koraal als de knoppen, die ten gevolge van de proef tot stand kwamen. Ook kunnen dochterindividuen zich ontwikkelen uit dat deel van het levende weefsel van een moederkoraal, dat grenst aan een klein gebied van den rand, waarvan het levende weefsel verloren gegaan is. Het moederdier bestaat dan nog als individu, hoewel het eenigszins beschadigd is, en de jonge individuen die uit een deel van de levende weefsels ontstaan, zijn ook in dit geval knoppen.

Uit de proef volgt verder, dat elk deel van het weefsel zich differentieeren kan tot een volledig individu. Dit komt echter pas tot uiting als de samenhang tusschen de levende deelen van het oorspronkelijke dier verloren gaat door vernietiging van een gedeelte van het weefsel.

De plaats, waar de jonge individuen zich ontwikkelen, is zeer verschillend. Zij kunnen op den top van de ribben of tusschen twee ribben ontstaan, of ook wel, als zij grooter zijn, op meerdere ribben tegelijk (Fig. 1). Bij koralen, die omgekeerd lagen, terwijl het weefsel te gronde ging, kunnen jonge individuen ontstaan tusschen de septa en in de omgeving van den mond, dus aan de orale oppervlakte.

Sommige exemplaren van de proefdieren zouden in staat geweest zijn in weinig veranderden vorm verder door te leven. Dit zijn de koralen, waarbij rondom het vernietigde centrale deel van de orale oppervlakte nieuwe monden ontstaan waren. Bij de meeste exemplaren was de vorm een geheel andere geworden: het eindresultaat zou steeds geweest zijn een doode schijf met een aantal jonge levende individuen, voornamelijk aan de onderoppervlakte en aan den rand De jonge individuen aan de onderzijde waren in ongunstige omstandigheden om zich verder te ontwikkelen, hoewel enkele reeds vrij groot waren (Fig. 4). De jonge Fungia's aan het randgedeelte zouden zich, wanneer de koralen op het rif gebleven waren, verder

ontwikkeld hebben tot een gesteelden vorm. Wanneer de schijf hiervan een bepaalde grootte bereikt heeft, valt deze af en aan het boveneinde van den steel ontwikkelt zich dan weer een nieuwe. Deze jonge Fungia's, ontstaan uit de laatste levende resten van een dood exemplaar, ontwikkelen zich dus verder zooals dit de jonge individuen doen, die uit de bevruchte eieren ontstaan.

Leiden, Januari 1923.

Zoölogisch Laboratorium der Universiteit.

---

ontwikkeld hebben tot een gesteelden vorm. Wanneer de schijf hiervan een bepaalde grootte bereikt heeft, valt deze af en aan het boveneinde van den steel ontwikkelt zich dan weer een nieuwe. Deze jonge Fungia's, ontstaan uit de laatste levende resten van een dood exemplaar, ontwikkelen zich dus verder zooals dit de jonge individuen doen, die uit de bevruchte eieren ontstaan.

Leiden, Januari 1923.

Zoölogisch Laboratorium der Universiteit.

Plaat I

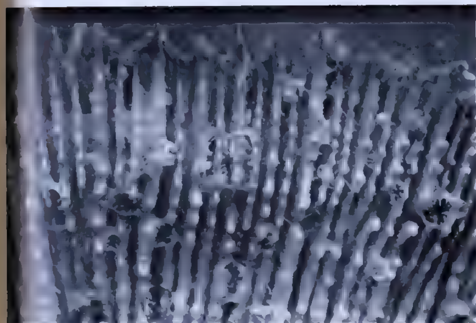


Fig. 1. Gedeelte van den rand van de aborale oppervlakte van *Fungia fungites* No. [illegible]3. Levende deelen verwijderd. Vele kleine knoppen en enkele grootere, minder regelmatige. 5½ × vergroot.



Fig. 2. Ander gedeelte van den rand van de aborale oppervlakte van hetzelfde exemplaar. Behalve enkele kleinere knoppen zijn een groot aantal onregelmatige skeletstukjes, voornamelijk gedeelten van de columella van grootere knoppen zichtbaar. 5⅓ × vergroot.

De photographieen voor de figuren 1 en 2 zijn genomen door den Heer G. C. J. Boss te Batoetoelis bij Buitenzorg.

Plaat II

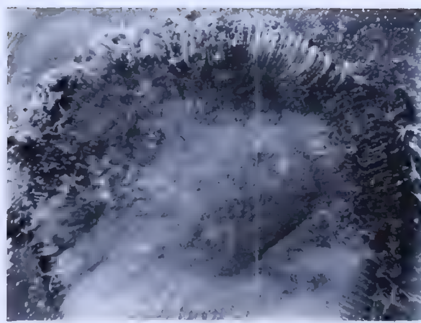


Fig. 3. Onder oppervlakte van *Fungia fungites* N°. 463 in levenden toestand. Een aantal groote knoppen, wier levende deelen in verbinding staan met het onveranderde weefsel van de onderzijde. Nat. gr.

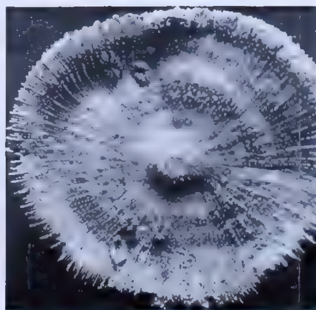


Fig. 4. Onder oppervlakte van *Fungia fungites* N°. 500. Knoppen in het aborale gedeelte dat grenst aan een deel van den rand, waar de weeke deelen gestorven zijn. ¾ nat. gr.

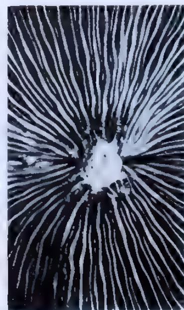


Fig. 5. Het centrale gedeelte van de orale oppervlakte van *Fungia fungites* N°. 508. Naast de stopverfprop waren nieuwe monden ontstaan, die naar het centrale deel van de oude koraal toe omgeven zijn door hoogere gedeelten van de oude septa met grootere tanden. ⅔ nat. gr.

ontwikkeld hebben tot een gesteelden vorm. Wanneer de schijf hiervan een bepaalde grootte bereikt heeft, valt deze af en aan

Anatomie. — KYOZO KUDO: „*Contributions to the knowledge of the brain of bony fishes.*" (Aangeboden door den Heer C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Deze mededeeling zal in extenso worden gepubliceerd in Vol. XXVI der „Proceedings").

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer F. A. F. C. WENT, namens den Heer A. C. J. VAN GOOR, aangeboden het manuscript van eene verhandeling getiteld: „*Die holländischen Meeresalgen.*"

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren J. C. SCHOUTE, G. VAN ITERSON Jr. en A. H. BLAAUW met verzoek om praeadvies, uit te brengen in de volgende vergadering.

Voor de boekerij worden de volgende boekwerken ten geschenke aangeboden:

1°. door den Heer J. BOEKE: „*Leerboek der beschrijvende ontleedkunde van den mensch*" door Prof. A. J. P. VAN DEN BROEK, Prof. Dr. J. BOEKE en Prof. Dr. J. A. J. BARGE, Deel 1, *Geschiedenis der ontleedkunde. Skelet en gewrichten.*

2°. door den Heer F. A. F. C. WENT eene dissertatie van den Heer F. L. RUTGERS getiteld: „*Embryosac and Embryo of Moringa Oleifera Lam.. The Female Gametophyte of Angiosperms*".

en een dissertatie van den Heer CHR. M. BERKHOUT getiteld: „*De schimmelgeslachten Monilia, Oidium, Oospora, Torula*".

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 24 FEBRUARI 1923.

DEEL XXXII.

N°. 2.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kantschrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d. d. 7 Februari j.l. N°. 665 Afd. K. W. ter toezending van een aantal gedrukte bescheiden, betrekking hebbend op de Pasteur-tentoonstelling te Straatsburg van Juni-October 1923.

Voor kennisgeving aangenomen.

2°. Eene circulaire d. d. Februari 1923 van het „Comité tot het verkrijgen van een verbodsbepaling tegen hypnotische demonstraties".

Eveneens voor kennisgeving aangenomen.

3°. Kantschrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d. d. 2 Februari 1923 N°. 620 Afd. K. W. ter begeleiding van een extract in duplo uit het „Journal officiel", bevattende een Presidentieel besluit betrekkelijk organisatie en werkwijze van het „Office National des Recherches scientifiques et industrielles et des inventions".

Eén exemplaar zal worden gezonden aan de W. A. C.-Commissie.

4°. Eene missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 5 Februari 1923 N°. 638 Afd. K. W. houdende mededeeling, dat het Rijkssubsidie over 1921 en 1922 aan Prof. STOMPS, toegekend voor zijne uitzending naar Buitenzorg, binnenkort zal worden uitgekeerd.

5°. Eene missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 2 Februari j.l. N°. 619 Afd. K. W., waarin de Minister aan de Afdeeling bericht en raad verzoekt omtrent een tot hem door den Minister van Buitenlandsche Zaken gericht verzoek om mede te deelen in hoeverre de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen eene Regeeringsvertegenwoordiging op het te Sydney te houden Pan-Pacific Congres gewenscht acht.

Op dit schrijven is bereids geantwoord, dat het, naar de meening van de Afdeeling, zeer gewenscht is dat Nederland op dat Congres vertegenwoordigd zal worden en dat de Heeren VAN ROMBURGH en MOLENGRAAFF bereid zijn als vertegenwoordigers der Regeering op te treden.

6°. Eene missive van den Minister van Koloniën d.d. 10 Februari j.l. 10e Afd. No. 16 met verzoek om het oordeel der Afdeeling te vernemen over een door den Heer A. GOUDSWAARD, militair apotheker te Plantersrust, ontdekte bereidingswijze van aloïne.

Deze stukken worden in handen gesteld van eene Commissie, bestaande uit de Heeren WENT, VAN ROMBURGH en BÖESEKEN, ter fine van prae-advies.

7°. Kantschrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 10 Februari j.l. No. 493 Afd. K. W., waarbij aan de Afdeeling ter kennisneming wordt gezonden het door den Heer H. Boschma uitgebracht verslag zijner onderzoekingen in Nederlandsch-Indië van October 1920—September 1922. Dit verslag is hierachter afgedrukt.

8°. Bericht van overlijden van het Buitenlandsch Lid der Akademie Prof. Wilhelm Conrad Röntgen te München.

Dit bericht is beantwoord met een brief van rouwbeklag.

De Voorzitter wijdt eenige waardeerende woorden aan de nagedachtenis van dezen geleerde.

9°. Eene missive van den Minister van Arbeid, Handel en Nijverheid d.d. 14 Februari j.l. Afd. Handel No. 2130, ter begeleiding van een afdruk van het rapport van den Heer Guillaume te Sèvres betreffende de vergelijking van de Nederlandsche meterstandaarden 19 en 27.

Voor kennisgeving aangenomen.

De Voorzitter doet daarna de volgende mededeelingen over de W. I. S.-Commissie.

De toetreding van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen tot den „*Conseil international des recherches*" heeft voor die Afdeeling verschillende gevolgen gehad; meer in het bizonder was het noodig de verhouding te bepalen tot de nieuw opgerichte internationale „*Unions*".

Het is bekend, dat onder de auspiciën van den „*Conseil*" een aantal internationale unies zijn of worden opgericht, die tot doel hebben de samenwerking op wetenschappelijk gebied van de volkeren voor al de verschillende wetenschappen. Vooral sedert de vergadering te Brussel in den zomer van het afgeloopen jaar, is het verband van die „*Unions*" met den „*Conseil*" nauwer geworden en wel om twee redenen: ten eerste zal in het vervolg in het Bestuur van den „*Conseil*" elke „*Union*" door een lid vertegenwoordigd worden, zoodat dientengevolge de „*Conseil*" in staat zal zijn internationale ondernemingen ter hand te nemen, waarvoor samenwerking van verschillende wetenschappen noodzakelijk is. Maar ten tweede is de bepaling gemaakt, dat alleen zulke landen kunnen toetreden tot de afzonderlijke „*Unions*", die toegang hebben tot den „*Conseil international des recherches*".

De Afdeeling van de Akademie heeft gemeend, dat het niet wel aanging, dat zij zelf zou toetreden tot de verschillende „*Unions*",

dat dit integendeel zaak moest zijn van de vertegenwoordigers der afzonderlijke wetenschappen in ons land, daartoe al of niet georganiseerd. Ten deele is dit dan ook reeds geschied. Zoo is er door de Nederlandsche Chemische Vereeniging een Chemische Raad voor Nederland opgericht, die zich aangesloten heeft bij de „*Union internationale de chimie*" en zoo is het ook in enkele andere gevallen gegaan.

Toch heeft de Afdeeling gemeend, dat zij zich niet geheel aan den arbeid van die „*Unions*" mocht onttrekken, dat zij trachten moest een zekeren band tot stand te brengen tusschen de beoefenaars der verschillende wetenschappen in Nederland met het oog op hun internationale samenwerking. De Afdeeling had daarbij nog een ruimer doel in het oog dan alleen het bijeenbrengen van de vertegenwoordigers der verschillende „*Unions*" en van den „*Conseil international*". Het leek immers gewenscht, dat allerlei vragen omtrent samenwerking op internationaal gebied zooveel mogelijk door de beoefenaars der wetenschap onder een gemeenschappelijk gezichtspunt werden beschouwd. Vooral in deze tijden, die ten dezen opzichte zooveel moeilijkheden opleveren, scheen een gedachtenwisseling op dit gebied aanbevelenswaardig om te komen tot het ideaal van allen: een zoo volkomen mogelijke samenwerking van *alle* volken op het gebied van wetenschap.

De hier genoemde overwegingen zijn aanleiding geweest, dat de Afdeeling een organisatie in het leven heeft geroepen, die zoo los mogelijk is, waarbij van klemmende banden geen sprake mag zijn. Die organisatie heeft den naam gekregen van *Wetenschappelijke Internationale Samenwerkingscommissie* (aan te duiden als W. I. S.-commissie). Zij bestaat uit het Bestuur van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling samen met een aantal voormannen, die ieder een afzonderlijke wetenschap vertegenwoordigen en uit een lid, tevens secretaris.

De voormannen zijn ten deele gekozen, omdat zij op het oogenblik reeds vertegenwoordigen een bestaande organisatie, zooals de reeds genoemde Chemische Raad, ten deele zullen zij het zich tot taak stellen zulk een organisatie voor de door hen vertegenwoordigde wetenschap tot stand te brengen. In verband met hetgeen boven gezegd werd, is voor elke „*Union*" een voorman gekozen, en, wanneer zulk een „*Union*" in secties gedeeld is, voor elke sectie een afzonderlijke voorman. Maar juist omdat wij ons niet te vast willen binden aan die organisatie der bestaande „*Unions*", hebben wij gemeend, dat het goed was, ook nog andere wetenschappen vertegenwoordigd te zien in de W. I. S.-commissie, zooals de geologie,

en aan den anderen kant hebben wij de mogelijkheid open gelaten, dat een voorman verzoekt van een gedeelte van zijn taak ontheven te worden, omdat zijn wetenschap te uitgebreid wordt.

In de vergadering, die hedenmorgen is gehouden, waren de voormannen bijeen met het Bestuur van de Afdeeling en met den nieuwen secretaris. Daar is o. a. besloten, dat nieuwe Raden door de voormannen kunnen worden tot stand gebracht, nadat zij hiervan kennis hebben gegeven aan het Bestuur van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Akademie.

De organisatie van de W. I. S.-commissie is nu als volgt:

Het Bestuur van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie, op het oogenblik dus de Heeren WENT, voorzitter, HOLLEMAN, onder-voorzitter, BOLK, secretaris; verder de volgende voormannen:

Aardrijkskunde: TH. F. A. DELPRAT, Amsterdam.

Biologie: *a.* Algemeene biologie en physiologie Prof. H. ZWAARDEMAKER, Utrecht.
b. Dierkunde Prof. J. F. VAN BEMMELEN, Groningen.
c. Plantkunde Prof. F. A. F. C. WENT, Utrecht.
d. Toegepaste biologie Prof. A. J. KLUYVER, Delft.

Chemie: Prof. H. R. KRUYT, Utrecht.

Geodesie en Geophysica: *a.* Geodesie Prof. J. J. A. MULLER, Zeist.
b. Geophysica Prof. E. VAN EVERDINGEN, de Bilt.

Geologie: Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF, Delft.

Medicijnen: Prof. H. BURGER, Amsterdam.

Natuurkunde: Prof. H. A. LORENTZ, Haarlem.

Radiotelegrafie: Prof. Jhr. G. J. ELIAS, Delft.

Sterrekunde: Prof. W. DE SITTER, Leiden.

Wiskunde: Prof. L. E. J. BROUWER, Laren.

Lid, tevens Secretaris: Prof. J. J. VAN LOGHEM, Amsterdam.

Vooral vragen, die betrekking hebben op de eerstvolgende bijeenkomst van den „*Conseil des recherches*" in 1925, zullen eerst nauwkeurig moeten worden nagegaan door de nieuwe organisatie. Maar, zooals van zelf spreekt, kunnen andere vraagstukken behandeld worden, ook wanneer deze van buitenaf ter sprake worden gebracht.

Dierkunde. — De Heer C. PH. SLUITER leest, namens de Commissie van uitvoering van het Zoölogisch Insulinde-Fonds, het volgende verslag.

Aan het Bestuur
der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Gevolg gevende aan de bepaling van artikel 8 van de statuten van het „Zoölogisch Insulinde-Fonds", hebben wij de eer verslag uit te brengen over de werkzaamheden der Commissie van uitvoering van genoemd fonds gedurende het jaar 1922.

In de samenstelling onzer Commissie had geenerlei verandering plaats.

Een enkele aanvraag om subsidie bereikte ons, maar moest van de hand gewezen worden als liggende buiten het gebied, waarop de bemoeienis van het Insulinde-fonds ligt.

Met genoegen vernamen wij, dat Dr. H. BOSCHMA, aan wien in het verslagjaar 1920 een subsidie vanwege het Insulinde-fonds was toegekend, behouden van zijn studiereis is teruggekeerd, die belangrijk langer geduurd heeft dan aanvankelijk het plan was, ook al omdat het geluk wilde, dat hij als assistent kon deelnemen aan de Deensche expeditie naar de Kei-eilanden. Van de wetenschappelijke resultaten van zijn reis zagen reeds verscheidene publikaties, ook in onze Akademie, het licht.

Tegen het eind van het jaar kwam een belangwekkende aanvraag om subsidie ter tafel, waarover evenwel eerst in het volgende jaar verslag zal kunnen worden uitgebracht, daar deze bemoeienis eerst in 1923 haar beslag kreeg.

Verdere werkzaamheden zijn door ons niet verricht.

De Commissie van uitvoering
voor het Zoölogisch Insulinde-Fonds.
MAX WEBER,
Voorzitter.
C. PH. SLUITER,
Secretaris.

Dierkunde. — Kort verslag van de onderzoekingen, door Dr. H. BOSCHMA in Nederlandsch-Indië verricht, van October 1920 tot September 1922.

In de eerste plaats had ik mij ten doel gesteld onderzoekingen te verrichten over de biologie van koraaldieren en voornamelijk over hun voeding. Daarmee begon ik dan ook spoedig na mijn aankomst in Indië (midden October 1920). Het eiland Edam, op korten afstand van Batavia, was een zeer geschikte plaats voor dit onderzoek, daar de levende koraaldieren zeer gemakkelijk te verkrijgen waren zonder dat groote tochten daarvoor behoefden ondernomen te worden en bovendien was de vuurtoren een zeer geschikte plaats om te overnachten, zoodat ik dan ook herhaaldelijk daar een week of langer verblijf hield. Van zooveel mogelijk soorten van rifkoralen ging ik na, wat de maaginhoud der levende dieren bevatte. Dit bleek nu eenigszins verschillend te zijn en voornamelijk af te hangen van de grootte der polypen. In de maag der koraaldieren met kleine polypen vond ik steeds een groot aantal zooxanthellen, waaronder in halfverteerden toestand. Behalve deze zooxanthellen, die altijd voorkwamen, bevatte de maag soms nog enkele diatomeeën of andere organismen, maar dit was slechts bij uitzondering het geval. De maaginhoud der koraaldieren met grootere polypen daarentegen bestaat steeds uit verschillende organismen of resten daarvan. Wel komen ook hier steeds zooxanthellen voor, maar bovendien nog diatomeeën, foraminiferen, copepoden en andere kleine planten of dieren. De zooxanthellen komen ook steeds in de levende weefsels van de rifkoralen in groote hoeveelheden voor. Voor zoover mogelijk werd aan versch materiaal de structuur der zooxanthellen nagegaan. Ook paste ik enkele kleurmethoden toe, o.a. met jodium, waardoor het assimilatieproduct, dat gewoonlijk in deze eencellige algen voorkomt, gekleurd werd. Bovendien werd van een groot aantal kolonies een gedeelte op verschillende manieren gefixeerd, om later hiermee de studie over de voeding der koraaldieren voort te zetten.

Een aantal volwassen exemplaren van de soorten van het geslacht Fungia, die ik op Edam vond, hadden knoppen gevormd. Dit bracht er mij toe te trachten de oorzaken op te sporen, waardoor deze knoppen tot stand komen. Het bleek nu dat het verschijnsel voor-

namelijk te wijten is aan het afsterven van een gedeelte der levende weefsels door een of andere oorzaak van buiten af. Dit heeft tot resultaat, dat het levende gedeelte rondom de doode plek tot sterkere activiteit geprikkeld wordt, waardoor op die plaatsen de groei vermeerdert, wat zich dikwijls uit in de vorming van knoppen. Het bleek, dat vooral microscopische algen, die in de afstervende gedeelten van de Fungia's leven, de omgevende, nog onaangetaste deelen tot vermeerderden groei aanzetten.

Om nu te bewijzen, dat de knoppen aan volwassen Fungia's ontstaan door het vernietigen van een gedeelte van het levende weefsel door een oorzaak van buiten af, nam ik een proef met normale Fungia's, waarvan ik in het centrale gedeelte van de orale oppervlakte een stopverfprop bracht en zoo dit gedeelte liet afsterven. Na eenige maanden hadden deze dieren inderdaad knoppen gevormd, die hetzelfde uiterlijk hadden als de knoppen, die ik vroeger gevonden had.

Verder nam ik enkele proeven om de vermeerdering in gewicht van het skelet van koralenkolonies in een bepaalden tijd na te gaan. Voor dit doel werd een aantal kolonies gewogen en met een merkteeken voorzien. Na eenigen tijd werd de toeneming van het gewicht bepaald. Het bleek nu dat de compacte kolonies procentsgewijze veel minder in gewicht toegenomen waren dan de sterk vertakte. De verhouding van de oppervlakte van het levende gedeelte tot het volume van de kolonie is bij de laatstgenoemde groep dan ook veel grooter.

Van enkele andere koraaldieren werden nog biologische bijzonderheden nagegaan, voornamelijk hun gedrag ten opzichte van omstandigheden van buiten af. In een enkel geval kon geconstateerd worden, dat twee beschreven soorten slechts standplaatsvariaties van een zelfde koralenkolonie zijn.

Behalve Edam bezocht ik nog de koraalriffen van Noordwachter, Poeloe Kelapa en omgeving, Sebesi en andere eilanden in Straat Soenda. Het rif dat bij Krakatau eenige jaren na de uitbarsting ontstaan was, bevindt zich daar niet meer, omdat het onder de geregeld terugkeerende puinafstortingen bedolven geraakt is.

Het tweede doel van mijn reis was het verzamelen van ontwikkelingsstadia van Anuren. In Buitenzorg kweekte ik de larven van een aantal soorten en fixeerde daarvan exemplaren van verschillende ontwikkeling. Een groot materiaal van Anurenlarven verzamelde ik bij Tjibodas, waar ik voor dat doel een maand vertoefde. Ook had ik daar gelegenheid de levenswijze van de eigenaardige larven van Megalophrys montana te bestudeeren. Behalve kikkerlarven verza-

melde ik in en bij Buitenzorg en in Tjibodas een aantal embryonen van verschillende soorten van reptielen.

Van Januari tot Juli 1922 nam ik deel aan de Deensche Expeditie naar de Kei-eilanden en had daardoor gelegenheid om tijdens dien tocht enkele verdere gegevens over de voeding der koralen te verkrijgen en voor mijn onderzoek naar de knopvorming bij Fungiden meer materiaal te verzamelen.

Plantkunde. — Verslag over het Centraalbureau voor Schimmelcultures 1922.

Het Centraalbureau heeft ook in dit jaar zijn werkzaamheden uitgebreid. De collectie werd met 110 soorten vermeerderd: enkele oudere vervielen, zoodat nu in de lijst 1060 soorten vermeld worden. Een honderdtal zijn nog in bewerking, of de gegevens hiervoor zijn niet voldoende gebleken, zoodat zij nog niet voor afgeven geschikt zijn. Het aantal uitgezonden schimmels bedroeg 513 (tegen 360 in het vorige jaar).

De nieuwe soorten, die de collectie verwierf, zijn ten deele plantenparasieten, geïsoleerd in het Phytopathologisch Laboratorium Willie Commelin Scholten, ten deele schimmels van medisch belang; verder saprophyten (Aspergillus, Penicillium e.a.) van Bainier en Sartory, en nieuwe in Amerika beschreven soorten.

De collectie breidt zich voortdurend uit; het aantal uitgezonden cultures neemt toe en doordat vele soorten reeds lang in cultuur zijn, wordt het werk steeds gecompliceerder. De klachten, die het vorige jaar geuit werden, moeten hier met klem herhaald worden. De achteruitgang, waarvoor wij toen vreesden, is reeds ingetreden, niettegenstaande de assistente nog meer dan verleden jaar haar werk beheerscht.

Om de cultures op peil te houden is het beslist noodzakelijk de schimmels éénmaal per jaar meer over te enten en een veel grooter aantal elke twee maanden van bodem te doen veranderen. Hiervoor ontbreekt echter zoowel de assistentie als de materieele voorzieningen. Een gedeelte van de cultures staat op tafels in de stof, omdat geen kast kon gekocht worden. Meer glaswerk is noodzakelijk, doch kan niet aangeschaft worden. De verzameling is absoluut noodlijdend.

Met de betaling voor schimmels gaat het zelden vlot. Vele onderzoekers kunnen, door lage valuta, niet betalen; anderen bieden materiaal en publicaties in ruil aan. Een deel van het verschuldigde geld van dit jaar is nog niet ingekomen en het blijft steeds de vraag, wat hier nog van terecht komt.

Een en ander doet ons de toekomst met zorg te gemoet zien. Zonder ruime middelen zal deze waardevolle collectie haar beteekenis verliezen.

LIST OF FUNGI.

The name of the botanist who originally sent the species, is mentioned next to the author's name.

The species of mucorineae indicated by *, occur as + and — mycelium; $n =$ neutral.

In the case of ascomycetes the * means masculine and feminine mycelium.

Mycologists and pathologists are invited to send cultures of species which the "Centraalbureau" does not yet carry. Transfers from such cultures may subsequently be obtained, free of charge, by those who originally sent them.

	Absidia coerulea. Bainier.	Thaxter.
*	,, *cylindrospora.* Hagem.	Hagem.
*	,, *glauca.* Hagem.	Hagem.
	,, ,, *var. paradoxa.* Namyslowsky.	Namyslowsky.
—	,, *Lichtheimi.* Lendner.	Lendner.
*	,, *Orchidis.* (Vuill.). Hagem.	Hagem.
	,, *septata.* v. Tieghem.	Lendner.
	,, *spinosa.* Lendner.	Lendner.
	Acanthorhynchus Vaccinii. Shear.	Shear.
	Achorion Gallinae. Sabrazès.	v. Ginneken.
	,, *Schönleinii* Lebert.	Inst. Pasteur.
	,, *Quinkeanum.* Zopf.	Baudet.
	Acladium Castellanii. Pinoy.	Joekes.
	Acremonium Potronii. Vuill.	Vuillemin.
	Acrostalagmus albus. Preuss.	Whetzel.
	,, *cinnabarinus.* Corda.	Doyer., Lab. Utrecht.
	Acrothecium lunatum. Wakker.	Went.
	Actinomucor repens. Schostacowitsch.	Naoumoff.
	Actinomyces aerugineus. Wr.	Wollenweber.
	,, *alboflavus.* Waksman & Curt.	Waksman & Curtis.
	,, *albosporeus.* Krainsky.	,, ,,
	,, *albus.* Krainsky.	,, ,, , Krainsky.
	,, ,, (R. D.) Gasp. var. cretaceus Wr.	Wollenweber.
	,, ,, (R. D.) Gasp. var. ochroleucus Wr.	Wollenweber.
	,, *annulatus.* Krainsky.	Krainsky, Wollenweber.
	,, *asteroides.* Gasperini.	Mc. Callum.
	,, *aureus.* Waksman & Curtis.	Waksman & Curtis.
	,, *Bobili.* ,, ,,	,, ,,
	,, *Bovis.* Harz.	Bartram.
	,, *californicus.* Waksman & Curtis.	Waksman & Curtis.
	,, *cellulosae.* Krainsky.	Krainsky.
	,, *chromogenus.* Gasperini.	Bartram, W. & C., Beyerinck

Actinomyces coelicolor. R. Müller.	Bartram.
„ *diastaticus.* Krainsky.	Waksman & Curtis.
„ *flavus.* Krainsky.	„ „
„ *Fradii.* Waksman & Curtis.	„ „
„ *griseus.* Krainsky.	„ „
„ *Halstedii.* Waksman & Curtis.	„ „
„ *incanescens.* Wr.	Wollenweber.
„ *intermedius.* Wr.	Wollenweber.
„ *Lavendulae.* Waksman & Curtis.	Waksman & Curtis.
„ *Lipmanii.* „ „	„ „
„ *madurae.* Lachner.	Sabouraud.
„ *microflavus.* Krainsky.	Krainsky.
„ *nigrificans.* Krüg.	Wollenweber.
„ *oligotrophus.* aut ?	Lab. Beyerinck.
„ *purpeochromogenus.* W. & Curt.	Waksman & Curtis.
„ *reticuli.* Waksman & Curtis.	„ „
„ *reticuli-ruber.* Waksm. & Curt.	„ „
„ *roseus.* Krainsky.	„ „, Wollenweber.
„ *ruber.* Krainsky.	„ „
„ *Rutgersensis.* Waksm. & Curt.	„ „
„ *scabies* Güssow.	Butler.
„ *tricolor.* Wr.	Wollenweber.
„ *tyrosinaticus.* Krainsky.	Beijerinck.
„ *verne.* Waksman & Curtis.	Waksman & Curtis.
„ *violaceus-Caesari.* W. en C.	„ „
„ *viridochromogenus.* Krainsky.	„ „
„ *xanthostroma.* Wr.	Wollenweber.
„ No. 1, 8, 14, 19, 20, 25, 43, 47, „ 48, 61, 62, 64, 68, 74, 74 (gelbe Mutation). 75, 80, 97, 102, 103, 105, 113, 114. Lieske.	Lieske.
Aleurisma flavissimum. Link.	Vuillemin.
Allescheria Boydii. Shear.	Shear.
Alternaria Abietis. Tengwall.	Tengwall.
„ *Citri.* Penz.	Fawcett.
„ *crassa.* Rands.	Rands.
„ *Dianthi.* Stevens et Hall.	Stevens et Hall.
„ *fasciculata.* Cooke et Ellis.	Jensen.
„ *geophila.* Daszewska.	Daszewska.
„ *Panax.* Whetzel.	Whetzel.
„ *Solani.* Jones et Grout.	Whetzel.
„ *tenuis.* Nees.	Quanjer.
Amblyosporium albo-luteum. Cost.	Lendner.
„ *Botrytis.* Fres.	Naoumoff.
Ambrosia pilz von Xyleborus dispar. Neger.	Neger.
Anthostomella destruens. Shear.	Shear.
Armillaria mellea. (Vahl.) Quél.	Cool, Rant.
„ *mucida.* Schrad.	Cool.
* *Ascobolus magnificus.* Dodge.	Dodge.

Ascochyta Abelmoschi. Harter.	Harter.
„ *clematidina.* Thümen.	Gloyer.
„ *Pisi.* Lib.	Stone. Spruit.
„ *Viciae.* Stone.	Stone.
Aspergillus albus. Wilh.	Kita.
„ *atropurpureus.* Zimm.	Blochwitz.
„ *candidus.* Link.	Kral.
„ *cinnamomeus.* Schiemann.	Schiemann.
„ *conicus.* Blochwitz.	Dale.
„ *disjunctus.* Bainier.	Bainier.
„ *effusus.* Tiraboschi.	Thom (Johnson).
„ *elegans.* Gasparini.	Blochwitz.
„ *ferrugineus.* Fuck.	v. Oyen.
„ *Fischeri.* Wehmer.	Wehmer.
„ *flavus.* Link.	Kral.
„ *fumigatus.* Fres.	De Vries. Blochwitz.
„ *fuscus.* Schiemann.	Schiemann.
„ *giganteus.* Wehmer.	Hariot.
„ *glaucus.* Link.	Blochwitz.
„ „ *var. a.* Kita.	Kita.
„ *luchuensis.* T. Inui.	Blochwitz.
„ *medius.* Meissner.	Bierberg.
„ *minimus.* Wehmer.	Bierberg.
„ *mollis.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *nidulans.* Eidam.	Thom.
„ *niger.* v. Tieghem.	Westerdijk.
„ *niger altipes.* Schiemann.	Schiemann.
„ *ochraceus.* Wilhelm.	Blochwitz.
„ *Oryzae.* (Ahlberg) Cohn.	Went.
„ *ostianus.* Wehmer.	Westling.
„ *parasiticus.* Speare.	Speare. Westerdijk.
„ *repens.* (De Bary) Dale.	Dale.
„ *Scheelei.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *spec. weisz.* Kita.	Kita.
„ *Sydowi.* Bainier et Sartory.	Kopeloff.
„ *Tamarii.* Kita.	Kita.
„ *varians.* Wehmer.	Wehmer.
„ *versicolor.* Vuill.	Blochwitz.
„ *Wentii.* Wehmer.	Wehmer.
Basidiobolus Ranarum. Eidam.	Blakeslee.
Basisporium Gallarum. Molliard.	Dale.
Bissochlamys nivea. Westling.	Westling.
Botryosphaeria Berengeriana. de Not.	Matz.
Botryosporium pulchrum. Corda.	Blakeslee. Kaiser.
Botryotrichum piluliferum. E. Marchal.	Blochwitz.
Botrytis anthophila. Boudarzew.	Naoumoff.
„ *Bassiana.* Balsam.	Schwarz. Le Moult.
„ *cana* Kze. et Schm.	Nobécourt.
„ *cinerea.* Pers.	Westerdijk, Krüseman, Schwarz.

Botrytis effusa. Beauverie.	Guilliermond.
„ *Paeoniae.* Oudemans.	C. Doyer.
„ *parasitica.* Cavara.	Walker, Bolle.
„ *tenella.* Sacc.	Le Moult.
„ *terrestris.* Jensen.	Jensen.
Boudiera spec.	Gray.
Bulgaria inquinans. Fr.	Cool.
Cantharellus carbonarius. Schw.	Kniep.
Catenularia fuliginea. Saïto.	Lindner.
Cephalophora irregularis. Thaxter.	Blakeslee.
„ *tropica.* Thaxter.	Blakeslee.
Cephalosporium acremonium. Corda.	C. Doyer.
„ *rubescens.* Schimon.	Will.
Cephalothecium roseum. Corda.	v. Luyk.
Cercospora fusca. Rands.	Rands.
„ *Medicaginis.* E. et E.	Hopkins.
„ *personata.* Ellis.	Wolf.
Ceriomyces albus. (Corda) Sacc.	Doyer.
Ceuthospora lunata. Shear.	Shear.
Chaetocladium Jonesii. Bref.	Naoumoff.
Chaetomella horrida. Oudem.	Oudemans.
Chaetomidium barbatum. Traen.	Traen.
Chaetomium elatum. Kze.	C. Doyer.
„ *globosum.* Kunze.	Claussen.
„ *indicum.* Corda.	Went.
„ *Kunzeanum.* Zopf.	Went.
„ *olivaceum.* Cooke et Ellis.	Jensen.
„ *setosum.* Bainier.	Bainier.
Chaetostylum Fresenii. v. Tieghem et Le Monnier.	Thaxter.
Chalara Mycoderma. Bonorden.	Pribram.
Choanephora Cucurbitarum. (B. Rav.) Thaxter.	Wolf.
Ciliciopodium hyalinum. Daszewska.	Daszewska.
Cintractia Sorghi vulgaris. (Sorok.) de Toni.	Mc. Rae.
Circinella aspera. (Schroeter) Lendner.	Lendner.
„ *conica.* Moreau.	Naoumoff.
„ *minor.* Lendner.	Lendner.
„ *spinosa.* v. Tiegh. et Le Monn.	Mc. Farland.
„ *Sydowi.* Lendner.	Lendner.
„ *umbellata.* v. Tieghem.	Lendner.
Citromyces affinis. Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *brevis.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *cyaneus.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *glaber.* Wehmer.	Dale, Thom.
„ *Pfefferianus.* Wehmer.	Thom.
„ *ramosus.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *subtilis.* Bainier et Sartory.	Bainier.

Cladosporium Aphidis. v. Thüm.	Heymons.
„ *butyri.* Jensen.	Kral.
„ *Cucumerinum.* Ell. et Arth.	Jones.
„ *epiphyllum.* Pers.	Dale.
„ *fulvum.* Cooke.	Doyer, v. d. Moien.
„ *herbarum.* Link.	Oudemans, Tengwall.
Claviceps purpurea. Fries.	v. Luyk, Mc. Farland.
Clitocybe clavipes. (Pers.) Quel.	Kniep.
„ *flaccida.* Sow.	Cool.
„ *geotropa.* Bull.	Kniep.
„ *nebularis.* Batsch.	Cool.
Clonostachys araucaria var. rosea. Preuss.	Shapovalov.
Coccomyces Kerriae. Stewart.	Stewart.
Coemansia spec.	Gray.
Colletotrichum circinans (Berk.) Voglino.	Walker.
„ *gloeosporoides.* Penz.	Fawcett.
„ *incarnatum.* A. Zimm.	Schwarz.
„ *Lagenarium.* (Pass.) Ell. et Halst.	Jensen.
„ *linicolum.* P. et L.	Pethybridge, v. Luyk.
„ *solanicolum.* O'Gara.	Quanjer.
„ *Trifolii.* Bain & Essary.	Gray.
Collybia butyracea. Bull.	Cool.
„ *conigena.* (Pers.) Fr.	Cool.
„ *fusipes.* Bull.	Cool.
„ *maculata.* Alb. et Schw.	Cool.
„ *velutipes.* (Curt.) Lond.	Cool.
Coniophora cerebella. Alb. et Schwein.	E. Pringsheim.
Coniosporium rhizophilum. (Pr.) Sacc.	Schaffnit.
Coniothyrium Diplodiella. (Speg.) Sacc.	Faes.
„ *glomerulatum.* Sacc.	Tengwall.
„ *Ilicinum.* Tengw.	Tengwall.
„ *Pirinum.* (Sacc.) Sheldon.	Crabill.
Coprinus comatus. Fr.	Cool.
„ *nycthemerus.* Fr.	Kniep.
„ *sterquilinus.* Fr.	Lendner.
„ *subtilis.* Fr.	Kniep.
Cordiceps. s. Isaria.	Le Moult.
Coremium arbusculum. Hugo Fischer.	Hugo Fischer.
„ *silvaticum.* Wehmer.	Wehmer.
Corticium alutaceum. (Schrad.) Bres.	Blakeslee
„ *bisporum.* Schroet.	Kniep.
„ *confluens.* Fr.	Kniep.
„ *laeve.* Pers.	Kniep.
„ *Quercinum.* Pers.	Kaiser.
„ *salmonicolor.* B. et Bred.	Rant.
„ *vagum.* Briosi et Cavara.	Whetzel.
Coryneum Beyerinckii. Oudem.	Beijerinck.
Cryptosporella Populina. Tode.	Kniep.

Cryptosporella viticola. (Red) Shear.	Gregory.
Cunninghamella Bertholletiae. Stadel.	Stadel.
„ *echinulata.* Thaxter.	Stevens et Hall. Saïto.
„ *elegans.* Lendner.	Lendner. Burgeff.
Cyathus striatus. (Huds.) Hoffn.	Kniep.
Cylindrocarpon Mali. (All.) Wr.	Wollenweber.
Cylindrocladium parvum. Anderson.	v. Luyk.
„ *scoparium.* Morgan.	Massey.
Cylindrophora Hoffmanni. Daszewska.	Daszewska.
Cytospora chrysosperma. (Pers.) Fr.	Kaiser.
„ *decorticans.* Sacc.	v. Luyk.
„ *Prunorum.* Sacc. et Syd.	Schwarz.
„ *rubescens.* Fr.	v. Luyk.
„ *Salicis.* (Cda.) Rabenh.	Schwarz.
Cytosporella damnosa. Petri.	Petri.
Cytosporina Ribis. v. Hall.	Wiltshire.
Dacryomyces deliquescens. (Bull.).	Kniep.
Dactylium dendroides. (Bull.) Fr.	v. Luyk.
Daedalea gibbosa. Pers.	Falck.
„ *Quercina.* (L.) Pers.	Kniep.
Dasyscypha Wilkommi. Hartig.	v. d. Houven. v. Oordt.
Debaryomyces tyricola. Konokotine.	Konokotine.
Dematium Chodati. Nechitch.	Lendner.
„ *nigrum.* Link.	Beyerinck.
„ *sarcinomyces.* Beyer.	Beyerinck.
„ *pullulans.* De Bary et Löw.	Blakeslee, C. Doyer, Tengwall
Dendrophoma Mahoniae. Tengwall.	Tengwall.
Dendrostibella macrospora. Bally.	Bally
Diaporthe batatis. (E. & H.). Harter & Field.	Harter.
„ *umbrina.* Jenkins.	Jenkins.
Diatrypella Quercina. Pers.	Doyer.
Dicoccum asperum. Cda.	da Fonseca.
Didymella applanata. (Niessl) Sacc.	Wormald.
Didymellina Iridis. Tisdale.	Tisdale.
Didymocladium ternatum. (Bon) Sacc.	Atkinson.
Diplocladium minus. Bon.	Went.
Diplodia cacoicola. P. Henn.	Schwarz.
„ *natalensis.* Evans.	Fawcett.
„ *tubericola.* E. & E.	Harter.
„ *Zeae.* (Schw.) Lev.	v. d. Byl.
Diplodina Lycopersici. Hollos.	v. Luyk.
Discella carbonacea. (Fr.) Berk. et. Br.	Schwarz.
Discina reticulata. Sacc.	Kniep.
Discomyces Canis. Rossi Doria.	Inst. Pasteur.
„ *Caprae.* Silberschmidt.	Inst. Pasteur.
„ *Deri.* (Rossi Doria) Casp.	Inst. Pasteur.
„ *farcinicus.* de Toni et Trevisum.	Inst. Pasteur.
„ *orangicus.* Rossi Doria.	Inst. Pasteur.
„ *spec.* Dassonville.	Inst. Pasteur.

Discomyces spec. Sabrazès.	Inst. Pasteur.
„ *violaceus.* Rossi Doria.	Inst. Pasteur.
Dothiorella gregaria. Sacc.	Fawcett.
„ *Zeae.* Berthollet et Foex.	Foex.
Echinobotryum atrum. Corda.	Doyer.
Eidamia acremonioides. Harz.	Doyer.
Endodermophyton indicum. Cast.	Joekes.
Endomyces albicans. Vuill.	Guilliermond.
„ *fibuliger.* Lindner.	Lindner.
„ *javanensis.* Klöcker.	Klöcker. Guilliermond.
„ *Lindneri.* Saïto.	Saïto.
„ *Magnusii.* Ludwig.	Claussen.
„ *Mali.* Lewis.	Lewis.
Endothia gyrosa. (Schw.) Fr.	Clinton.
„ *gyrosa var. parasitica.* Murr.	Clinton.
„ *parasitica.* (Murr.) And.	Heald.
„ *radicalis.* (Schw.) Fr.	Anderson. Clinton.
Epicoccum purpurascens. Ehrenberg.	v. Iterson.
Epidermophyton inquinale. (aut. ?)	Inst. Pasteur.
„ *rubrum.* Cast.	Joekes.
Eremascus fertilis. Stoppel.	Kniep.
Eurotium insigne. Winter.	Claussen.
Fomes annosus. Fr.	v. Luyk.
„ *fomentarius.* (L.) Frank.	Whetzel.
„ *pinicola.* (Fr.) Cooke.	Gray.
„ *pomaceus.* Pers.	v. Oyen.
Fuckelia conspicua. March.	Marchal.
Fumago vagans. Pers.	Tengwal, v. d. Houven v. Oordt.
Fusarium acuminatum. Ell. et. Ev. emend. Wr.	Harter.
„ *albido-violaceum.* Daszewska.	Daszewska.
„ *aquaeductum.* Radelk.	Kral, Wollenweber.
„ *aqaeductum var. pusillum* Wr.	Wollenweber.
„ „ Lagerh. *var. volutum.* Wr.	Wollenweber.
„ *Avenaceum.* (Fr.) Sacc.	Doyer.
„ *batatis.* Wr.	Sydow, Harter.
„ *Betae.* (Desm.) Sacc.	Wollenweber.
„ *bulbigenum.* Cooke & Mass.	v. Luyk.
„ *candidum.* Link.	Daszewska.
„ *coeruleum.* (Lib.) Sacc.	Wollenweber. Kral.
„ *colorans.* De Jonge.	Rutgers.
„ *commutatum.* Sacc.	Daszewska.
„ *conglutinans.* Wr.	Jones.
„ *cubense.* E. F. Smith (emend. Brandes).	Atherton Lee.
„ *culmorum.* W. Sm. Sacc.	Wollenw., Dale, Taubenhaus.
„ *Cydoniae.* Allescher.	Taubenhaus.
„ *decoloratum.* Wr.	Wollenweber.
„ *dimerum.* Penz.	Wollenweber.

Fusarium discolor. App. et. Wr.	Edson.
,, *discolor var. sulphureum.* Schlecht.	Wollenweber, Dale.
,, *discolor var. triseptatum* Sherb.	Waterman.
,, *ensiforme* Wr.	Wollenweber.
,, *ensiforme var. majus* Wr.	Wollenweber.
,, *ensiforme var. medius* Wr.	Wollenweber.
,, *eumartii.* Carp.	Haskell. Sydow.
,, *euoxysporum.* Wr.	v. d. Molen.
,, *falcatum.* Appel et Wr.	Wollenweber.
,, *falcatum var. caespitosum* Wr.	Wollenweber.
,, *fallax.* A. et Wr.	Wollenweber.
,, *filiferum* (Preuss.) Wr.	Wollenweber.
,, *gemmiperda.* Aderh.	v. Luyk.
,, *genevense.* Daszewska.	Daszewska.
,, *gibbosum.* Appel et Wr.	Wollenweber.
,, *hyperoxysporum* Wr.	Harter.
,, *isabellinum* Wr.	Harter.
,, *limosum.* Rostrup.	Dale.
,, *Lini.* Bolley.	Jensen.
,, *Lolii* (Smith.) Sacc.	Wollenweber.
,, *Martii.* Appel et Wr.	Wollenweber. Doyer.
,, *Martii* var. Pisi (van Hall).	Jones.
,, *metachroum.* Appel en Wollenw.	Wollenweber.
,, *metachroum imperfectum.* Wollenweber.	Wollenweber.
,, *moniliiforme.* Scheldon.	Dale.
,, *Müntzii.* Wollenweber.	Wollenweber.
,, *Musae. (Leptospora)* Drost.	Stahel.
,, *nivale.* Sorauer.	Schaffnit. Doyer.
,, *orthoceras.* Appel et Wr.	Wollenweber, Lab. Utrecht.
,, *oxysporum.* Schlecht. emend. Wr.	Edson. Berkhout. Harter.
,, *oxysporum.* Sch. Wr. var. Nicotianae Johnson.	Johnson.
,, *putraefaciens* Osterwalder.	Osterwalder, Paravicini.
,, *radicicola.* Wr.	Edson. Harter.
,, *rhizophilum* Cda.	Wollenweber.
,, *Robiniae.* Passer.	Sydow.
,, *semitectum.* Berk. et Rav.	Wollenweber.
,, *Solani.* Mart.	Wollenweber. Doyer.
,, *Solani.* var. medium Wr.	Wollenweber.
,, *Solani.* var. minus Wr.	Wollenweber.
,, *spec. sectio Elegans.*	Dale.
,, *subulatum.* Appel et Wr.	Wollenweber.
,, *Theobromae.* A. et Wr.	Kaiser.
,, *tracheiphilum.* Wr.	Sydow.
,, *trichothecioides.* Wr.	Wollenweber.
,, *tubercularioides.* (Corda) Sacc.	Wollenweber.
,, *tubivorum* Wilcox a Link.	Wilcox.
,, *uncinatum* Wr.	Wollenweber.

Fusarium vasinfectum Schikorra.	Doyer. Harter.
Fusicladium S. Venturia.	
„ *effusum.* Wint.	Rands.
Fusicoccum putrefaciens. Shear.	Shear.
Fusidium griseum. Link.	Tengwall.
„ *mirabile.* Tengwall.	Tengwall.
Geomyces auratus. Traen.	Traen.
Gibberella Saubinetti. (Mont.) Sacc.	Wollenweber. Doyer. Harter.
Gliocladium penicilloides. Corda.	Dale.
„ *roseum.* Bainier.	Bainier.
Gloeosporium caulivorum. Kirchn.	Kaiser.
„ *fructigenum.* Berk.	Paravicini.
„ „ f. *americanum.* Krüger.	Krüger.
„ „ f. *germanica.* Krüger.	Krüger.
„ *limetticolum.* Claussen.	Claussen.
„ *Lindemuthianum.* Sacc. et Magn.	Klebahn. Doyer.
„ *Musarum.* Cke et Mass.	Dastur.
„ *nervisequum.* Sacc.	v. Luyk.
„ *Quercinum.* West.	v. Luyk.
„ *Ribes* (Lib.) M. et D.	v. Luyk.
„ *Tiliae.* Oudem.	v. Luyk.
Glomerella cingulata. (Stonem.) Schrenk Sp.	Gray.
„ *Lycopersici.* Krüger.	Krüger.
„ *rufomaculans.* Sp. et v. Schr.	Taubenhaus. v. Luyk.
„ „ *Vaccinii.* Shear.	Shear.
Glomerula repens. Bainier.	Mc. Farland.
Gonatobotryum maculicolum. (Wint.) Sacc.	Taubenhaus.
Graphium penicillioides Corda.	Münch.
Graphium Ulmi. Schwarz.	Schwarz.
Guignardia Vaccinii. Shear.	Shear.
Guilliermondia fulvescens. Nadson et Konokot.	Nadson et Konokot.
Gymnoascus Reessii Baranetzky.	Claussen.
„ *setosus.* Eidam.	Dale.
„ *umbrinus.* Boudier.	Inst. Pasteur.
Gyromitra esculenta. (Pers.) Fr.	Cool.
Hanseniaspora Valbyensis. Klöcker.	Klöcker.
Haplographium de Bella Marengo. Poll.	Pollacci.
Haplographium spec. from Aleyrodes.	v. d. Goot.
Haplosporangium decipiens. Thaxter.	Thaxter.
Helicostylum elegans. Corda.	Mc. Farland.
„ *piriforme.* Bainier.	Gray.
Helminthosporium geniculatum. Tracy et Earle.	Schwarz.
„ *gramineum.* Rabenh.	Lab. W. C. S.

Helminthosporium inaequalis. Shear.	Shear.
„ *interseminatum.* Berk et Rav.	Dale.
„ *spec.*	Stakman.
„ *teres.* Sacc.	Bakke.
Hemispora stellata. Vuill.	Vuillemin.
Hendersonia Rubi. (Westd.) Sacc.	Wormald.
Herpotrichia nigra. Hartig	Sluiter.
Heterobasidium annosum. Bref.	Thaxter.
Heterocephalum aurantiacum. Thaxter.	Blakeslee.
Heterosporium echinulatum. (Berk.) Cooke.	Doyer.
„ *gracile.* Sacc.	Westerdijk.
„ *variabile.* Cke.	Howard Reed.
Hormiscium aurantiacum. Lindau.	Doyer.
„ *spec.*	v. Luyk.
Humicola fuscoatra. Traen.	Traen.
„ *grisea.* Traen.	Traen.
Hydnum auriscalpum. L.	Cool.
Hypholoma sublateritium. Schaeff.	Cool.
Hypochnus Solani. Prill. et Delacr.	Pethybridge.
Hypocrea Citrina. (Pers.) Fr.	Kniep.
Hypocopra fimicola. Sacc.	da Fonseca.
Hypomyces chrysospermus. (Bull.) Tull.	Kniep.
Isaria Casei. Mazé.	Inst. Pasteur.
„ *destructor.* Metschnikoff.	Inst. Pasteur.
„ *farinosa.* (Dicks.) Fr.	Blakeslee.
„ *felina.* Fr.	Blakeslee.
„ *Psychidae.* Pole Evans.	Pole Evans.
„ *spec.*	Cool. Schwarz.
„ „	Leefmans.
„ „	Sluiter.
„ *Sphingum.* Schwein.	Le Moult.
Kickxella alabastrina Coem.	Burgeff.
Lachnea abundans. Karst.	Shear.
„ *cretea.* Phil.	Fraser.
Lactarius sanguifluus. Fr.	Lendner.
Lasiodiplodia nigra. Appel et Laubert.	Peters.
„ *tubericola.* E. et E.	Taubenhaus.
Lentinus lepideus. Fr.	Cool.
„ *tigrinus.* (Bull.) Fr.	Cool.
Lentodium squammulosum. Morgan.	Blakeslee.
Lenzites betulina. Fr.	Cool.
„ *bicolor.* Falck.	Falck.
„ *flaccida.* Fr.	Cool.
Lepiota exoriata. Schaeff.	Kniep.
Libertella Faginea. Desm.	Kaiser.
Lycoperdon bovista. Linn.	Cool.
„ *piriforme.* Schaeff.	Kniep.
Macrophoma Coronillae Emeri. Neger.	Neger.

Macrosporium instipitatum. Preuss.	Dale.
„ *Solani.* Ell. et Mart.	Porte.
Marasmius confluens. Pers.	Kniep.
„ *oreades.* Fr.	Cool.
„ *perniciosus.* Stahel.	Stahel.
Melanconium spec.	Tisdale.
Melanospora parasitica. Tul.	Whetzel.
Menispora ciliata. Corda.	v. Luyk.
Merulius corium. Fr.	Cool.
„ *lacrymans.* (Jcq.) Fr.	E. Pringsheim, Cool, Schwarz.
„ *sylvester.* Falck.	E. Pringsheim, Falck.
„ *tremellosus.* Schrad.	Cool.
Metarrhizum Anisopliae. Sorokin.	Rorer, Bally.
Microsporum audouini. Grüby-Saubouraud.	Baudet, Kapsenberg.
„ *Equinum.* Bodin.	Inst. Pasteur.
„ *fulvum.* J. Uriburu.	v. Ginneken.
„ *lanosum.* Sabouraud.	Inst. Pasteur.
„ *pubescens flavescens.* Kapsenberg.	Kapsenberg.
Mitrula pusilla (Nees.)	Kniep.
Monascus purpureus. Went.	Went.
„ *spec. X.* Schikorra.	Schikorra.
„ *spec. von Reis.* Lindner.	Lindner.
Monilia candida. Bon.	Kral.
„ *cinerea.* (Bon.) Schröter. s. Sclerotinia.	
„ *enterica.* Castellani.	Castellani.
„ *fructigena.* Pers. S. Sclerotinia.	
„ *fusca* Browne.	Church.
„ *grisea.* Daszewska.	Daszewska.
„ *humicola.* Oudem.	Beyerinck.
„ *javanica.* Went et Prinsen Geerligs.	Went.
„ *Krusei.* Cast.	Joekes.
„ *macedonensis type C* (aut?)	Joekes.
„ *metalondinensis.* Castellani.	Castellani.
„ *nigra.* Burri et Staub.	Lindner.
„ *sitophila.* (Mont.) Dacc.	Oudemans, da Fonseca.
„ *tropicalis.* Cast.	Joekes.
„ *variabilis.* Lindner.	Kral.
Moniliopsis Aderholdi. Ruhland.	v. Luyk, Rant.
Monochaetia Desmazieri. Sacc.	Graves.
Monopodium uredopsis. Delacr.	Gentner.
Monosporium ellipticum. Daszewska.	Daszewska.
„ *flavum.* Bon.	Daszewska.
„ *glaucum.* Daszewska.	Daszewska.
„ *humicolum.* Daszewska.	Daszewska.
„ *olivaceum.* Cooke et Mass. *var. maj.*	Daszewska.
„ *reflexum.* (Bon.) *var. viride.*	Daszewska.
„ *subtile.* Daszewska.	Daszewska.
„ *viridescens.* Bon.	Daszewska.

	Morchella esculenta (L.).	Cool.
+	*Mucor adventitus.* Oudem. *var. aur.* Lendner.	Lendner.
	,, *alpinus.* Hansen.	Bierberg.
	,, *arrhizus.* (Fischer) Hagem.	Went.
	,, *botryoides.* Lendner.	Lendner.
	,, *botryoides var. minor.* Jensen.	Jensen.
	,, *circinelloides.* v. Tieghem.	Hagem.
	,, *corticolus.* Hagem.	Hagem.
	,, *cyanogenus.* Guyot.	Lendner.
n	,, *dimorphosporus.* Lendner.	Lendner.
	,, *dispersus.* Hagem.	Hagem.
	,, *dubius.* Wehmer.	Saïto.
	,, *erectus.* Bainier.	Bierberg.
n	,, *flavus.* Bainier.	Hagem.
	,, *fuscus.* Bainier.	Church, da Fonseca.
	,, *genevensis.* Lendner.	Lendner.
	,, *glomerula.* (Bainier) Lendner.	Dale.
—	,, *griseo-cyanus.* Hagem.	Hagem.
	,, *hiemalis.* Wehmer.	Hagem.
	,, *hiemalis var. albus.* Lendner.	Lendner.
	,, *hiemalis var. toundrae.* Lendner.	Lendner.
	,, *hygrophilus.* Oudemans.	Cretier.
	,, *Jauchi.* Lendner.	Lendner.
	,, *javanicus.* Wehmer.	Kral. Saïto.
+	,, *lamprosporus.* Lendner.	Lendner.
	,, *Lusitanicus.* Brüderlein.	Lendner.
	,, *mandshuricus.* Saïto.	Saïto.
	,, *microsporus.* Namyslowski.	Namyslowski.
n	,, *Mucedo.* Bref.	Sluiter. Saïto.
	,, *mucilagineus.* Bref.	Naoumoff.
	,, *pirelloides.* Lendner.	Chodat.
	,, *plumbeus.* Bon.	Boas.
	,, *Prainii.* Chodat et Nechitch.	Lendner.
*	,, *racemosus.* Fres.	Lendner, Sluiter, Dale.
	,, *Ramannianus.* Möller.	Dale.
	,, *Rouxii.* Wehmer.	Church.
+	,, *Saturninus.* Hagem.	Hagem.
+	,, *silvaticus.* Hagem.	Hagem.
+	,, *sphaerosporus.* Hagem.	Hagem.
	,, *spinescens.* Lendner.	Mc. Farland.
	,, *spinosus.* v. Tieghem.	Kral.
	,, *Vallerianus.* Lendner.	Lendner.
	Mycena galericulata. Scop.	Cool.
	,, *parabolica.* (Fr.).	Kniep.
	Mycobacillaria simplex. Naoumoff.	Naoumoff.
	Mycocladus hyalinus. Naoumoff.	Naoumoff.
	Mycoderma cerevisiae. Desmazières.	Claussen.
	,, ,, *var. pulverulenta.* Beyerinck.	Lendner.

Mycoderma decolorans. Will.	Bierberg.
„ *gallica.* Leberle.	Bierberg.
„ *lambica.* Lindn. et Gormod.	Lindner.
„ *valida.* Leberle.	Geisenheim.
„ *Vanlaeriana.* Lindn. et Gormod.	Lindner.
Mycogone puccinoides. (Preuss) Sacc.	Oudemans.
Mycosphaerella Fragariae (Tul.) Lin.	Kaiser, v. d. Houven, v. Oordt.
Myxosporium corticolum. Edgerton.	Gilchrist.
Nectria cancri. Rutgers.	Rutgers.
„ *cinnabarina* (Tode) Fr.	Kaiser.
„ *cucurbitula.* (Tode ?) Fr.	Neger.
„ *galligena.* Bres.	v. Luyk.
„ *Ipomoeae.* Halstedt.	Whetzel.
„ *Peziza.* (Tode) Fries.	v. Luyk.
„ *Rubi.* Osterwalder.	Osterwalder.
„ *striatospora.* (Zimm.) de Jonge.	de Jonge.
Nematogonium humicola. Oud.	Dale.
Neocosmospora vasinfecta. E. Smith.	Wolf.
Neofabraea malicorticis. (Cordly) Jackson.	Fisher.
Nocardia asteroides. (Eppinger) de T.	Inst. Pasteur.
„ *Bovis.* (Harz) de T.	Inst. Pasteur.
„ *Dassonvillei.* Broque-Rousseau.	Inst. Pasteur.
„ *farcinicus* de Toni et Trevisan.	Inst. Pasteur.
„ *lutea.* Khartum.	Joekes.
„ *odorifera.* (Ruhlmann) de T.	Inst. Pasteur.
„ *Pelletieri.* (Laveran) de T.	Inst. Pasteur.
Nyctalis asterophora. Fr.	Thaxter.
Oedocephalum glomerulosum. (Bull.) Sacc.	L. Doyer.
Oidium albicans. Robin.	Inst. Pasteur.
„ *breve.* Conrad.	Pribram.
„ *camemberti.* Mazé.	Inst. Pasteur.
„ *farinosum.* Mazé.	Inst. Pasteur.
„ *gracile.* Weigm. et Wolff.	Bierberg.
„ *humi.* Mazé.	Inst. Pasteur.
„ *lactis.* Fres.	Blakeslee.
„ *Ludwigii.* (Ludwig) Hansen.	Lindner.
„ *natalense.* Castellani.	Da Fonseca.
„ *moniliaforme.* Weigm. et Wolff.	Bierberg.
„ *nubilum.* Weigm. et Wolff.	Bierberg, Lab. Utrecht.
„ *pullulans.* Lindner.	Lindner.
„ *rotundatum.* Castellani.	Castellani.
„ *suaveolens.* Krzemecki.	Krzemecki.
„ *suaveolens.* Krz. *var. minuta* Berkhout.	Berkhout.
„ *tenuis.* Mazé.	Inst. Pasteur.
Oospora aurantiaca (Lev.) Hert.	Herter.
„ *guignardii.* Langeron.	da Fonseca.
„ *humi.* (Mazé). Berkhout.	Berkhout.
„ *variabilis.* Lindner.	Dale. Herter.

Oospora verticilloides. Sacc.	Berkhout.
Ophiobolus cariceti. (Berk. et Br.) Sacc.	Kirby.
Ozonium croceum. Pers.	Dale.
Panus rudis (Fr.)	Kniep.
„ *stipticus.* (Bull.) Fr.	Cool.
Papulaspora manganica. Beyerinck.	Beyerinck.
„ *parasitica.* (Eid.) Harz.	Rosenbaum.
„ *polyspora.* Thaxter.	Thaxter.
Patellina Fragariae. Stevens.	Stevens, Kaiser.
Penicillium africanum. Doebelt.	Doebelt.
„ *atramentosum.* Thom.	Thom.
„ *avellaneum.* Thom et Turesson.	Thom.
„ *baculatum.* Westling.	Westling.
„ *biforme.* Thom.	Thom.
„ *brevicaule.* Sacc.	Thom.
„ *Burci.* Poll.	Pollacci.
„ *camenberti.* Thom.	Thom.
„ „ *var. Rogeri.* Thom.	Thom.
„ *Citrinum.* Thom.	Thom.
„ *claviforme.* Bainier.	Bainier.
„ *conditaneum.* Westling.	Westling.
„ *corymbiferum.* Westling.	Westling.
„ *Costantini.* Bainier.	Dale.
„ *cyclopium.* Westling.	Westling.
„ *digitatum.* Bainier.	Bainier.
„ *Duclauxi.* Delacr.	Delacroix.
„ *echinatum.* Dale.	Dale.
„ *erectum.* Bainier.	Bainier.
„ *expansum.* Link.	Thom, Kopeloff.
„ *flexuosum.* Dale.	Dale.
„ *frequentans.* Westling.	Westling, Thom.
„ *glaucum.* Link.	Wehmer.
„ *intricatum.* Thom.	Thom.
„ *italicum.* Wehmer.	Thom, Kaiser.
„ *Lagerheimi.* Westling.	Westling.
„ *lanosum.* Westling.	Westling.
„ *lilacinum.* Thom.	Thom.
„ *lividum.* Westling.	Dale, Thom.
„ *luteum.* Zukal.	Thom.
„ *majusculum.* Westling.	Westling.
„ *mandshuricum.* Saïto.	Saïto.
„ No. 29. Thom.	Dale.
„ *olivaceum.* Wehm.	Boudyn.
„ *olsoni.* Bainier et Sartory.	Bainier.
„ *oxalicum.* Currie & Thom.	Shapovalov.
„ *palitans.* Westling.	Westling.
„ *patulum.* Bainier.	Bainier.
„ *paxilli.* Bainier.	Bainier.
„ *pinophilum.* Hedgcock.	Thom.

Penicillium puberulum. Bainier.	Alsberg et Black.
„ *purpurogenum*. Fleroff.	Thom.
„ *Roquefortii*. Thom.	Schwarz.
„ *roseum*. Link.	Robertson Proschovsky.
„ *sacculum*. Dale.	Dale.
„ *Schneggii*. Boas.	Boas.
„ *solitum*. Westling.	Westling.
„ *spiculisporum*. Lehman.	Lehman.
„ *subcinereum*. Westling.	Westling.
„ *variabile*. Wehmer.	Wehmer.
„ *vesiculosum*. Bainier.	Bainier.
„ *viridicatum*. Westling.	Westling.
Peniophora corticalis. (Bull.) Bress.	Kniep.
„ *cremea*. Bress.	Kniep.
Pericystis alvei. Betts.	Maassen.
* „ *Apis*. Maassen.	Maassen.
Peristomium desmosporium var. Oidium. Lechmere.	Lechmere.
„ „ *var. Verticillium*. Lechmere.	Lechmere.
Pestalozzia funerea. Desm.	Taubenhaus, Doyer.
„ *Guepini Vaccinii*. Shear.	Shear.
„ *Hartigii*. v. Tubeuf.	E. Fischer.
„ *palmarum*. Cooke.	Bernard.
„ *scirrofaciens*. Brown.	N. Brown.
Peziza nigrella. Pers.	Cool.
Phacidiella discolor. (Mont. et Sacr.) A. Potib.	Osterwalder.
Phallus impudicus. (L.) Fr.	Cool.
Phialophora verrucosa. Medlar.	Thaxter.
Phlebia aurantiaca. Sowerby.	Cool.
Pholiota aurea. (Mattusch.) Gill.	Cool.
„ *aurivella*. (Batsch.) Quel.	Kniep.
„ *mutabilis*. (Schaeff.) Quel.	Kniep, Cool.
„ *praecox*. Pers.	Cool.
„ *spectabilis*. (Fr.) Gill.	Kniep.
„ *squarrosa*. Müll.	Cool.
Phoma apiicola. Klebahn.	Quanjer.
„ *Betae*. Fr.	Edson, v. Luyk.
„ *cinerescens*. Sacc.	Wormald.
„ *citricarpa*. Mac. Alp.	Birmingham.
„ *conidiogena*. Schnegg.	Boas.
„ *destructiva*. Jamison.	Jamison.
„ *fictilis*. Delacr.	Saïto.
„ *intricans*. Schwarz.	Schwarz.
„ *Mali*. Schulz et Sacc.	Lewis.
„ *oleracea*. Sacc.	Sluiter.
„ *Pomi*. Passer.	Brooks.
„ *Richardiae*. Mercer.	Mercer.
„ *spec. from Citrus canker*.	Wolf.
„ *spec. fr. Nursery Blight of Cedars*.	Glenn, Hahn.

Phomopsis Citri, Fawcett.	Doyer.
„ *vexans.* (Sacc. et Syd.) Harter.	Harter.
* *Phycomyces nitens.* Kunze.	Lindner.
„ „ *var. piloboloides.*	Burgeff.
„ „ *var. ramified.*	Wisse.
Phyllosticta Antirrhini. Sydow.	v. Luyk, Smiley.
„ *Caryae.* Peck.	Rands.
„ *congesta.* H. et W.	Roberts.
„ *limitata.* Peck.	Whetzel.
„ *Pirina.* Sacc.	Crabill: 1, 2, 3.
„ *rhododendricola.* Brunaud.	Tengwall.
„ *solitaria.* E. & E.	Roberts.
Physalospora Cydoniae. Arnaud.	Hesler.
Phytophthora Cactorum (Lebert et Cohn) Schr.	Peters.
„ *cryptogea.* Pethybr.	Pethybridge.
„ *erythroseptica.* Peth.	Pethybridge.
„ *Faberi.* Maublanc.	Rorer.
„ *Fagi.* Hartig.	Peters.
„ *infestans* (Mont.) de By.	Löhnis.
„ *Meadii.* Mc. Ray.	Sundararaman.
„ *Nicotianae.* Breda de Haan.	Rutgers.
„ *parasitica.* Dastur.	Butler.
„ *Spec. Reddick.*	Pethybridge.
„ *spec.* from cinnamom.	Hartley.
„ „ „ rubber.	Hartley.
„ *Syringae.* Klebahn.	Pethybridge.
„ *terrestria.* Sherb.	Pethybridge.
Pichia farinosa. Lindner.	Lindner.
„ *mandshurica.* Saïto.	Saïto.
„ *membranifaciens.* Hansen.	Claussen.
„ *suaveolens.* Klöcker.	Bauch.
Piptocephalus Freseniana. de By et Wor.	Lendner.
„ *fusispora.* v. Tieghem.	Naoumoff.
„ *repens.* v. Tieghem.	Naoumoff.
Plectodiscella veneta. Burkholder.	Burkholder.
Plenodomus Chelidonii. Naoumoff.	Naoumoff.
„ *destruens.* Harter.	Harter.
„ *fuscomaculans.* Sacc.	Coons.
Pleospora herbarum. (Pers.) Rabh.	Kniep.
Pleurage verruculosis. Jensen.	Jensen.
Pleurotus corticatus. (Fr.) Quel.	Kniep.
„ *Eryngii.* D. C.	Cool.
„ *ostreatus.* (Jacq.) Fr.	Cool, Wollenweber.
„ *Ulmarius.* Bull. I. en II.	Cool.
Podospora anserina. (Rabh.) Winter.	Atkinson.
„ *pleiospora.* Winter.	Kniep.
Podosporiella verticillata. O'Gara.	O'Gara.
Polyporus Abietinus. Fr.	Cool.
„ *adustus.* Fr.	Cool.

Polyporus Betulinus. Pers.	Cool, Goethals.
„ *brumalis.* Pers.	Cool.
„ *destructor.* Pers.	E. Pringsheim.
„ *fumosus.* (P.) Fr.	Cool.
„ *giganteus.* (Pers.) Fr.	Cool.
„ *lucidus.* Fr.	Stahel.
„ *obtusus.* Berk.	Humphrey.
„ *resinosus.* (Schrad.) Fr.	Humphrey.
„ *squamosus.* (Huds.) Fr.	Wollenweber.
„ *sulfureus.* (Bull.) Fr.	Atkinson.
„ *vaporarius.* (Bull.)	E. Pringsheim.
Polyporus varius. (Pers.) Fr.	Cool.
„ *versicolor.* L.	Cool.
Polyspora Lini. P. et L.	Pethybridge.
Prototheca Zopfii. Krüger.	Lindner.
Psalliota arvensis. Schaeff.	Cool.
„ *Bernardii.* Quel.	Kniep.
„ *campestris.* Linn.	Kniep.
„ *perrara.* Schulz.	Kniep.
Pseudobasidium bicolor. Tengwall.	Tengwall.
Pseudomonilia mesenterica. Geiger.	Bauch.
Pseudosaccharomyces africanus. Klöcker.	Klöcker.
„ *austriacus.* Klöcker.	Klöcker.
„ *corticis.* Klöcker.	Klöcker.
„ *Lafari.* Klöcker.	Klöcker.
Pyronema domesticum. Sow.	Kniep.
„ *spec.*	Dodge.
Pythiacystis citrophthora. Smith et Smith.	Atkinson.
Pythium de Baryanum Hesse.	Hartley.
Ramularia Anchusae. Massal.	Wollenweber.
„ *Asteris.* Phill. et Plowr.	v. d. Molen.
„ *candida.* (Ekr.) Wr.	Wollenweber.
„ *eudidyma.* Wr.	Wollenweber.
„ *macrospora.* Fres.	Wollenweber, Paravicini.
„ *Magnusiana.* (Sacc.) Lindau.	Wollenweber.
„ *myxophaga.* Jaworonxorox.	Naoumoff.
Rhacodium cellare. Pers.	Inst. Pasteur.
Rheosporangium aphanidermatum. Edson.	Hartley.
Rhinocladium Lesnei. Vuill.	Vuillemin.
Rhinotrichum macrosporium. Farlowe.	Blakeslee.
Rhizoctonia lanuginosa (Odontoglossum.). N. Bern.	N. Bernard.
„ *microsclerotia.* Matz.	Matz.
„ *mucoroides (Vanda tricolor).* N. Bern.	N. Bernard.
„ *M. R. (Oncidium) cavendishiani.* Burgeff.	Burgeff.
„ *M. R. (Odontoglossum) constricti.* Burgeff.	Burgeff.

	Rhizoctonia M. R. (Ophrys) Tenthrediniferae. Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Orchis) maculatae.* Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Orchis) psychodis.* Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Phalaenopsis) Schillerianae.* Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Plathanthera) chloranthae.* Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Stanhopea) tigrinae.* Burgeff.	Burgeff.
	,, *M. R. (Vanda) suavis.* Burgeff	Burgeff.
	,, *Solani.* Kühn. (Beta vulgaris).	Edson.
	,, *Solani.* Kühn.(Brassica Napus).	Simon Thomas.
	,, *Solani.* Kühn *R.* 5. (Solanum tuberosum).	Rosenbaum.
	,, *Solani.* Kühn. (Solanum tuberosum).	Porte.
	,, *Solani.* Kühn. (Gossypium).	Wolf.
	,, *spec.* (Cichorium endiviae).	Hartley.
	Rhizohypha Limodori. Chodat.	Chodat.
n	*Rhizopus arrhizus.* Fischer.	Went.
	,, *Artocarpi.* Raciborski.	Harter.
	,, *chinensis.* Saïto.	Saïto.
	,, *Delemar* (Boidin) Wehm. et Hanz.	Hanzawa.
	,, *Maydis.* Brüderlein.	Lendner.
	,, *microsporus.* v. Tiegh.	Harter, M. Farland.
	,, *minimus.* v. Tiegh.	Da Fonseca.
	,, *nigricans.* Ehrenberg.	Whetzel.
	,, *nodosus.* Namyslowski.	Lindner.
	,, *Oryzae.* Went et Prinsen Geerligs	Went.
	,, *reflexus.* Bainier.	Harter.
	,, *Tritici.* Saïto.	Saïto.
	Saccharomyces Carlsbergensis. Hansen.	Bauch.
	,, *cerevisiae.* Hansen.	Claussen.
	,, ,, type Frobergh.	Bauch.
	,, ,, ,, Klein.	Bierberg.
	,, ,, ,, Saaz Lindner.	Bauch.
	,, *ellipsoides I.* Hansen.	Claussen.
	,, ,, type Johannisberg.	Bauch.
	,, *glutinis.* Cohn.	Bauch.
	,, *intermedius.* Hansen.	Bauch.
	,, *Logos.* Van Laer.	Bierberg.
	,, *mandshuricus.* Saïto.	Saïto.
	,, *Marxianus.* Hansen.	Bauch.
	,, *Monascensis.* Hansen.	Bauch.

Saccharomyces neoformans. Sanfelice.	Inst. Pasteur.
„ *Pastorianus.* Hansen.	Claussen.
„ *path.* Binot.	Bierberg.
„ *spec.* Plimmer.	Bierberg.
„ *turbidans.* Hansen. (= S. ellips. II.)	Claussen.
Saccharomycopsis capsularis. Schiönning.	Bauch.
Sachsia suaveolens. Lindner.	Lab. Utrecht.
Schizophyllum commune. Fr.	Cool, Kniep.
Schizosaccharomyces mellacei. Jörgensen.	Claussen.
„ *Pombe.* Lindner.	Bierberg.
Sclerotinia bulborum. Wakker.	Westerdijk.
„ *cinerea* (Bon.) Schr. v. Prunus Pseudo-cerasus.	Kruseman.
„ „ „ v. Prunus domestica.	Kaiser.
„ „ „ forma Pruni.	Wormald.
„ „ „ forma Mali.	Wormald.
„ „ „ v. Pirus malus (Bismarck).	Westerdijk.
„ „ „ v. Persica.	Berkhout.
„ „ „ v. Prunus cerasus.	Berkhout.
„ *Cydoniae.* Schell. v. Mespilus germanica.	Berkhout.
„ *demissa.* Dana.	Dana.
„ *fructigena (Pers).* Schr. v. Pirus malus.	Lab. Utrecht. v. d. Molen, Wormald.
„ *Libertiana.* Fuckel.	Doyer, Spruit, v. d. Houven v. Oordt.
„ *Matthiolae.* Lendner.	Kniep.
„ *Mespili.* Schell.	Berkhout, Wormald.
„ *minor.* Jagger.	Doyer.
„ *Ricini.* Godfrey.	Godfrey.
„ *Trifoliorum.* Eriksson.	Kaiser.
Sclerotium bataticola. Taubenhaus.	Taubenhaus.
„ *cepivorum.* Berkeley.	Westerdijk, Bolle, Walker.
„ *coffeicolum.* Stahel.	Stahel.
„ *rhizodes.* Auersw.	Westerdijk.
„ *Rolfsii.* Sacc.	Tisdale, Schwarz, Wolf, Stahel.
„ *tuberosa.* (Herw.) Fuck.	Cool.
„ *Tuliparum.* Lib.	Westerdijk.
„ *spec.* v. Cichorium endiviae.	Doyer.
„ „ v. Nicotiana.	de Souza.
„ „ v. Salix.	Schwarz.
„ „ v. Tulipa (bulbus).	Doyer.
Scolecotrichum melophthorum. Prill, et Delacr.	Westerdijk.

Scopulariopsis brevicaulis var. hominis. De Brumpt & Langeron.	Pringault.
„ *communis.* Bainier.	Dale.
„ *repens.* Bainier.	Dale.
„ *rufulus.* Bainier.	Dale, Bainier.
Sepedonium chrysospermum. (Bull.) Fr.	v. Luyk.
Septoria Apii. Chester.	Hulshof.
„ *Gladioli.* Passer.	Massey.
„ *Stellariae.* R. et Desm.	Taubenhaus.
Sordaria anserina. (Rab.) Wint.	A. Schmidt.
„ *fimicola.* (Rob.) Ces. et de Not.	Claussen.
„ *papyricola.* Winter.	Berkhout.
„ *sylvatica.* Daszewska.	Daszewska.
„ *tetraspora.* Wint.	Da Fonseca.
„ *spec.*	Doyer.
Sorosporium Saponariae. Rud.	Kniep.
Sparassis crispa. (Wulfen). Fr.	Cool.
Sphaceloma Ampelinum. De Bary.	Shear.
Sphaerobolus carpobolus (L.)	Kniep.
Sphaeronema fimbriatum. G. et G.	Lehman, Harter.
Sphaeronemella Fragariae. Stevens.	Stevens.
Sphaeropsis Malorum. Peck.	Whetzel.
Sphaerostilbe coccophila. Tul.	Fawcett.
Sphaerulina Trifolii. Rostr.	Hopkins.
Spicaria Aphodii. Vuill.	Vuillemin.
„ *colorans.* de Jonge.	de Jonge.
„ *elegans.* Corda.	Schwarz.
„ *spec.* v. Stephanoderes.	Bally.
Spondylocladium atrovirens. Harz.	Pethybridge.
Sporidesmium putrefaciens. Fuckel.	v. Luyk.
Sporocybe chartoikoon. Beyerinck.	Beyerinck.
Sporodinia grandis. Link.	Kniep.
Sporonema Oxycocci. Shear.	Shear.
Sporormia pithyophila. Tengwall.	Tengwall.
Sporotrichum Beurmanni. Matr. et Ramond.	Inst. Pasteur.
„ *bombycinum.* (Corda) Rabh.	Oudemans.
„ *epigaeum. var. terrestre.* Bumaud.	Daszewska.
„ *globuliferum.* Speg.	Oudemans, Schwarz, Blakeslee.
„ *Gougeroti.* Matruch.	v. Ginneken.
„ *Jeanselmei.* Brumpt et Langeron.	Daszewska.
„ *olivaceum.* Fr.	Daszewska.
„ *roseolum.* Oudem. et Beyerinck	Oudemans.
Stachybotrys cylindrospora. Jensen.	Jensen.
„ *lobulata.* Berkeley.	Went.
Stemphylium asperulum. Sacc.	Da Fonseca.
„ *botryosum.* Waller.	Oudemans.
„ *Ilicis.* Tengwall.	Tengwall.

Stemphylium macrosporoideum. (B. et Br.) Sacc.	Oudemans, Koperberg.
„ *Paxianum.* v. Szabo.	Da Fonseca.
Stereum gausapatum. Fr.	Kniep.
„ *hirsutum.* Fr.	Cool.
„ *purpureum.* Fr.	Cool, Brooks, v. Oyen.
„ *rameale.* Schw.	Humphrey.
„ *rubiginosum.* Fr.	Cool.
„ *rugosum.* Pers.	Kniep.
„ *spadiceum.* Fr.	Cool.
„ „ *var. quercinum.* Fr.	Cool.
Sterigmatocystis cyanea. Bainier.	Bainier.
„ *helva.* Bainier.	Bainier.
„ *nidulans var. Nicollei.* Nicolle & Pinoy.	Pringault.
„ *Quercina.* Bainier.	Bainier.
„ *usta.* Bainier.	Bainier.
„ *violacea.* Vant.?	Gray.
Stilbella fimetaria. Pers.	Bolle.
Streptothrix chromogena. (Gasparini) Weigm.	Bierberg.
„ *odorifera.* Rullm.	Bierema.
„ *polychromogenus.* Bull.	Bertram.
„ *Sanninii* (aut?)	Ciferri.
Stropharia aeruginosa. Curt.	Cool.
„ *semiglobata.* Batsch.	Cool.
Stysanus medius. Sacc.	C. Doyer.
„ *stemonitis.* (Pers.) Corda.	Sluiter, Jensen
Syncephalastrum cinereum. Bainier.	Lendner.
„ *racemosum.* Cohn.	Atkinson.
Synsporium biguttatum. Preuss.	Dale.
Thamnidium elegans. Link.	Went.
Thermoidium sulfureum. Miehe.	Noack.
Thermomyces lanuginosus. Tsilinsky.	Noack.
Thielavia basicola. Zopf.	Peters.
Thielaviopsis paradoxa. (de Seynes). v. Höhnel.	Derx.
Torula Bestae. Poll.	Pollacci.
„ *colliculosa.* Lindner.	Lindner.
„ *dattila.* Kluyver.	Kluyver.
„ *glutinis. (Conn.)* Pringsh. et Bilersky	Pringsheim.
„ *Holmii.* Jörgensen.	Bierberg.
„ *humicola.* Daszewska.	Daszewska.
„ *monosa.* Kluyver.	Kluyver.
„ *mucilaginosa.* Jörgensen.	Bierberg.
„ *Pais.* Poll.	Pollacci.
„ *pulcherrima.* Lindner.	Bierberg.
„ *pulchra.* Tengwall.	Tengwall.
„ *rubra.* Schimon.	Will.

Torula sanguinea. Schimon.	Will.
Turolaspora Roseï. Guill.	Guilliermond.
Trametes gibbosa. (P.) Fr.	Cool.
„ *robiniophila*. Murr.	Humphrey.
Tremella mesenterica. Retz.	Cool.
Trichocladium asperum. Harz.	Oudemans, Berkhout.
Trichoderma Koningii. Oudem.	Dale.
„ *lignorum*. (Tode) Harz.	Taubenhaus, Traen.
Tricholoma aggregatum. Schaeff.	Cool.
„ *bicolor*. Mich.	Münch.
„ *conglobatum*. Vitt.	Cool.
„ *gambosum*. Fr.	Cool.
„ *molybdinum*. Bull.	Kniep.
Trichophyton acuminatum. Sabouraud.	Inst. Pasteur, v. Ginneken.
„ *albiscicans*. Nieuwenhuis.	Nieuwenhuis.
„ *asteroides gypseum*. Sabouraud.	Inst. Pasteur.
„ *cerebriforme*. Sabouraud.	v. Ginneken.
„ *crateriforme*. Sabouraud.	Inst. Pasteur, Carol.
„ *Equinum*. Matrochet & Dassonville..	Baudet.
„ *exsiccatum*. Sabouraud.	Da Fonseca.
„ *faviforme album*. Sabouraud.	v. Ginneken.
„ *granulosum*. Sabouraud.	Baudet.
„ *gypseum asteroides*. Sabouraud.	v. Ginneken.
„ *lacticolor*. Sabouraud.	Da Fonseca.
„ *niveum radians*. (aut.?)	v. Ginneken.
„ *plicatile*. Sabouraud.	v: Ginneken.
„ *rosaceum*. Sabouraud.	v. Ginneken.
„ *ruber*. (aut.?)	Inst. Pasteur.
„ *sulfureum*. Sabouraud.	Da Fonseca.
„ *violaceum*. Sabouraud.	Inst. Pasteur.
Trichosporium Mantogazzae. Poll.	Pollacci.
Trichothecium roseum. (Pers.) Link.	Lindner.
„ *roseum. f. pseudoverticillium*. Matr.	Schouten.
Trichurus spiralis. Hasselbring.	Blakeslee, Pethybridge.
Triposporium pinophilum. Neger.	Hulshof.
Tubercularia vulgaris. Tode.	Goethals.
Ustilago Avenae. (Pers.) Jensen.	v. d. Houven, v. Oordt.
„ *grandis*. Fries.	v. d. Molen.
„ *Hordei*. (Pers.) Kellerm. et Swingle.	Riehm.
„ *longissima*. Sowerby.	v. d. Molen.
„ *Mayidis*. (DC.) Corda.	Westerdijk.
„ *nuda*. (Jensen) Kell. & Swingle.	Kniep.
„ *Reiliana*. Kühn.	Mc. Rae.
„ *Tritici*. (Pers.) Jensen.	Kniep.
„ *violacea*. (Pers.) Fuckel.	Kniep.
„ „ von Dianthus a und b.	Bauch.
„ „ von Silene a und b.	Bauch.
Venturia inaequalis. (Cooke). Aderh.	Whetzel.

Venturia Pirina. Aderh.	Kniep, Sluiter, Ruys.
Verpa digitaliformis. Pers.	Cool.
Verticilliastrum glaucum. Daszewska.	Daszewska.
Verticillium albo-atrum. Reinke et Berth.	Harter, v. Luyk.
„ *cinnabarinum.* Reinke et Berth.	Pethybridge.
„ *Dahliae.* Kleb.	Klebahn.
„ *glaucum.* Bon.	Went.
„ *heterocladum.* Penz.	Fawcett.
„ *Lactarii.* Peck.	v. Luyk.
„ *Lycopersici.* Pritchard et Porte.	Porte.
„ *rufum.* (Schwabe) Rabenh.	Went.
„ *Sacchari.* Went.	Went.
Volutella ciliata (Alb. et. Schw.) Fries.	Doyer.
Vuilleminia comedens. Maire.	Kniep.
Wawelia regia. Namyslowski.	Namysłowski.
Willia anomala. Hansen.	Bauch.
„ *belgica.* Lindner.	Lindner.
„ *odessa.* Weber.	Bauch.
„ *Saturnus.* Klöcker.	Bierberg.
„ *Schneggii.* Weber.	Bauch.
Xylaria digitata. L.	Wingard.
„ *hypoxylon.* (L.) Grev.	Doyer.
„ *polymorpha.* Pers.	Cool, Wingard.
Zygorhynchus Dangeardi. Moreau.	Moreau.
„ *spec.* („explodens")	Burgeff.
„ *Mölleri.* Vuill.	Hagem.
„ *Vuillemini var. agamus.* Namyslowski.	Namyslowski.
Zygosaccharomyces Chevalieri. Guill.	Guilliermond.
„ *japonicus.* Saïto.	Guilliermond.
„ *mandshuricus.* Saïto.	Saïto.
„ *Nadsonii.*	Guilliermond.
„ *Pastori.* Guill.	Guilliermond.
„ *Priorianus.* Klöcker.	Guilliermond.

Scheikunde. — De Heer Ernst Cohen doet, mede namens den Heer Fusao Ishikawa, eene mededeeling over: *„De fictieve volumenverandering in het oplossingsevenwicht"*.

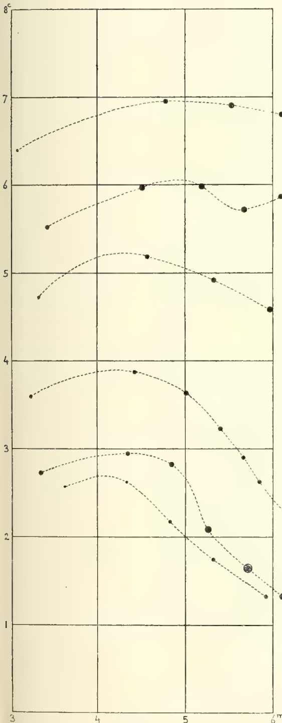
Sterrekunde. — EJNAR HERTZSPRUNG: „*Over de helderheidsvergelijking van* OSTHOFF'S *schattingen van sterrekleuren*".

In de Annalen van de Sterrewacht te Leiden Deel XIV, eerste stuk, blz. 14, 1922 heb ik gevonden, dat de daar afgeleide gemiddelde waarden van c_2/T voor sterren van de spektraalklassen A0, A2, A3 en A5 een onverklaarde herderheidsvergelijking vertoonen. Nu zijn de genoemde c_2/T waarden voor ongeveer 58 percent van het totale gewicht uit directe schattingen van sterrekleuren afgeleid. Een nieuwe bepaling van de helderheidsvergelijking van deze schattingen is daarom zeer te wenschen. De gelegenheid hiervoor wordt gegeven door den nieuwen catalogus van OSTHOFF (Specola Astronomica Vaticana Vol. VIII; 1916), die zijn met den 4 duims refraktor gemaakte schattingen tot een magnitude zwakkere sterren uitbreidt, namelijk tot ongeveer 6^m. Een kaartcatalogus werd gemaakt, die voor ieder ster inhield: de uur van rechte klimming, de graden van declinatie, het spektrum uit den nieuwen Draper Catalogus H.D. (genomen uit den Index Catalogus, Spec. Astr. Vat. IX; 1917), de sterregrootte afgerond op een decimaal en de geschatte kleur. De kaarten werden in groepen verdeeld naar het spectrum. Na eenig tasten zijn de onderafdeelingen der spektra in groepen gecombineerd, zooals in Tabel 1 getoond. Voor ieder van de 6 gecombineerde groepen zijn saamhoorige waarden van gemiddelde magnitude en gemiddelde kleur aangegeven. Op het diagram zijn de getallen van Tabel 1 grafisch voorgesteld.

Het meest opvallende resultaat is, dat de geschatte kleur niet, zooals totnutoe aangenomen[1]), geleidelijk toeneemt met afnemende apparente helderheid, maar een maximum vertoont in de buurt van 4^m of 5^m. In het bijzonder bij de witte sterren is de afneming in geschatte kleur tusschen 5^m en 6^m zeer uitgesproken. Dit is niet meer dan wat men zou verwachten van de bekende eigenaardigheden in de kleuropvattingen van het menschelijke oog. Als men het spektrum van de zon, beginnend juist beneden de zichtbaarheidsgrens, laat toenemen in intensiteit, verschijnt het blauwe en groene gedeelte het eerst, maar zonder eenige kleur te vertoonen,

[1]) A. Pannekoek, Verslag van de gewone Vergadering der wis- en natuurkundige Afdeeling der koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XV, 216; 1906 en E. HERTZSPRUNG, Zeitschr. für wiss. Photographie Bd. 5, 100; 1907.

totdat bij nog grooter intensiteit de kleuren groen en blauw worden waargenomen. Anderzijds verschijnt de roode eind van het spektrum rood, zoodra het in het geheel wordt gezien. Bij heel groote intensiteiten verliezen de kleuren weer aan verzadigdheid.[1])



Figuur 1.

TABEL I.

B3, B5			B8, B9, A0, A2, A3			A5, F0, F2, F5			F8, G0, G5			K0			K2, K5, M_a, M_b		
n	m	c	n	m	c	n	m	c	n	m	c	n	m	c	n	m	c
18	3.63	2.57	65	3.35	2.73	30	3.24	3.60	23	3.32	4.72	51	3.42	5.52	22	3.07	6.40
23	4.34	2.63	59	4.35	2.95	51	4.43	3.87	61	4.58	5.19	106	4.51	5.96	71	4.78	6.95
38	4.83	2.18	84	4.85	2.83	73	5.01	3.64	77	5.33	4.92	105	5.19	5.98	99	5.53	6.90
48	5.32	1.75	145	5.26	2.09	63	5.40	3.24	108	5.97	4.59	107	5.66	5.72	87	6.09	6.80
48	5.92	1.32	104	5.55	1.75	52	5.66	2.90				105	6.09	5.86			
			173	5.80	1.59	59	5.85	2.63									
			132	6.11	1.33	70	6.14	2.30									

[1]) B.v. schijnt de gloeiende draad van de electrische lamp achter het roode glas van de donkere kamer geel te zijn.

De helderheidsvergelijking voor OSTHOFF's kleuren gevonden, is in overeenstemming met deze feiten.

De verkregen resultaten zijn in staat de bovenvermelde in Leiden Ann. XIV gevonden tegenstellingen op te helderen. Tegelijkertijd zijn zij een leerrijk voorbeeld van het gevaar bij extrapolatie, daar de helderheidsvergelijking zijn karakter verandert juist omstreeks 5^m, waar de helderheidsgrens ligt van de sterren, die in Leiden Ann. XIV zijn behandeld.

De bovenstaande beschouwingen gaan van de veronderstelling uit, dat sterren van hetzelfde spektrum geen verandering van effectieve temperatuur met hun schijnbare helderheid vertoonen. Zoo lang als wij nog geen andere betrouwbare kleuraequivalenten van deze sterren hebben, schijnt die veronderstelling de meest plausibele te zijn, waarvan gebruik kan worden gemaakt.

Wiskunde. — JAN DE VRIES: „*Een nulstelsel* (1, 2, 3)."

1. Wij beschouwen als gegeven een congruentie $[\varrho^3]$ van kubische ruimtekrommen, met de basispunten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 [1]), en de elkaar kruisende rechten a en b.

Door een punt N gaat één kromme ϱ^3; zij r de raaklijn in N en t de transversaal van a en b door N. Aan N voegen wij $v \equiv rt$ als *nulvlak* toe.

De krommen ϱ^3, die een vlak v aanraken, hebben hun raakpunten in een kegelsnede ϱ^2. De in v gelegen transversaal t snijdt ϱ^2 in de *nulpunten* N_1 en N_2 van v.

Als v om de rechte l wentelt, beschrijft t een regelschaar $(t)^2$, en ϱ^2 een kubisch oppervlak door l. De m.pl. van N is dus een ruimtekromme λ^5, die blijkbaar l, en dus ook a en b tot trisecanten heeft.

Wij hebben dus een *nulstelsel* met de kenmerkende getallen $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

2. De punten C_k zijn *singulier*; immers C_k draagt één rechte t maar ∞^2 rechten r. De nulvlakken van C_k vormen een vlakkenbundel om t als as.

Ook de punten A van a en B van b zijn *singulier*. Immers zij dragen ieder ∞^1 rechten t, die tot een waaier zijn vereenigd. De nulvlakken van elk dier punten vormen een bundel, waarvan de as langs de raaklijn r ligt. Die assen vormen twee kubische regelvlakken $(r)^3$.

Andere *singuliere punten* S kunnen slechts ontstaan bij het samenvallen van de rechten t en r. Nu vormen de raaklijnen der krommen ϱ^3 een complex van den 6^{en} graad, en deze heeft met de bilineaire congruentie $[t]$ een regelschaar $(n)^{12}$ gemeen. Op elke rechte n ligt een punt S, waarbij elk vlak door n als nulvlak behoort.

Daar l door 12 rechten n wordt gesneden, bevat de overeenkomstige kromme λ^5 12 punten S.

3. De nulpunten der vlakken, welke door het punt P gaan, liggen op een oppervlak $(P)^4$. Immers P is nulpunt van één bepaald vlak

---

[1]) De voornaamste eigenschappen van deze congruentie vindt men o.a. in R. STURM, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, Deel IV, bl 470.

der schoof, en op een rechte l door P liggen de nulpunten van drie vlakken door l.

De doorsnede der oppervlakken $(P)^4$ en $(Q)^4$ bestaat uit de bij PQ behoorende kromme λ^5, de rechten a en b, benevens een kromme σ^9, welke de m.pl. is van de *singuliere punten* S, en blijkbaar door de 5 basispunten C_k gaat.

Drie oppervlakken $(O)^4$, $(P)^4$ en $(Q)^4$ hebben vooreerst de kromme σ^9 gemeen. De punten, welke zij verder gemeen hebben zijn blijkbaar de snijpunten van $(O)^4$ met de bij PQ behoorende kromme λ^5. Hiertoe behooren de 12 op λ^5 gelegen punten S en de 2×3 op λ^5 gelegen punten A en B; de overige twee zijn de nulpunten van het vlak OPQ.

4. Elk vlak α door a is *singulier*; het bevat een waaier (t) en elke straal t snijdt de kegelsnede ϱ^2 (§ 1) in twee nulpunten. Analoog zijn de vlakken β door b *singulier*.

Ook de tien vlakken σ, die ieder drie basispunten C bevatten, zijn *singulier*. Immers in σ_{123} ligt een bundel kegelsneden, waarvan elk exemplaar met de rechte C_4C_5 tot een kromme ϱ^3 is vereenigd; zij snijden de in σ_{123} gelegen rechte t in een involutie van nulpunten.

Het oppervlak $(P)^4$ bevat de kegelsneden α^2 en β^2 gelegen in de vlakken Pa en Pb benevens de snijlijn p dier vlakken. De rechte p is singulier in dien zin, dat zij nulstraal is voor *elk* van haar punten. De *singuliere nulstralen* p vormen de bilineaire congruentie met richtlijnen a en b.

Ook de tien rechten $C_k C_l$ zijn *singulier*; immers door elk punt op zulk een rechte r_{kl} gaat een rechte t, terwijl r_{kl} als raaklijn is te beschouwen.

Wiskunde. — JAN DE VRIES: „*Een congruentie* (1,0) *van kubische ruimtekrommen*".

1. De kubische ruimtekrommen door vier punten C_1, C_2, C_3, C_4, die de rechte b tweemaal snijden, vormen een lineaire congruentie $[\varrho^3]$; door een willekeurig gekozen punt gaat immers één ϱ^3. De basispunten C zijn *hoofdpunten*, b is een *hoofdkoorde*.

Zij d een koorde van een der ϱ^3, dan is $d\,(C_1\,C_2\,C_3\,C_4) = b\,(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)$. De koorden d vormen dus een *tetraedralen complex*; een niet tot dien complex behoorende straal l wordt dus door geen ϱ^3 tweemaal gesneden: de *klasse* der congruentie is *nul*.

Een koorde d bepaalt met C_k en b een hyperboloide; hierop liggen ∞^1 krommen ϱ^3, die b en d tweemaal snijden. Elke complexstraal d is dus koorde van ∞^1 krommen ϱ^3, en deze bepalen op d een involutie; d is bijgevolg *raaklijn* aan *twee* krommen.

De raaklijnen, die in een punt P samenkomen, liggen op den complexkegel van P; hun *raakpunten* vormen een ruimtekromme van den 5^{en} graad, ϱ^5, welke door P gaat.

2. Zij B_4 het snijpunt van b met het vlak $\gamma_{123} \equiv C_1\,C_2\,C_3$. Elke *kegelsnede* ϱ^2 door de punten C_1, C_2, C_3, B_4 is bestanddeel van een samengestelde ϱ^3; de transversaal t_4 door C_4 over b en ϱ^2 is het tweede bestanddeel. De rechten t_4 vormen den *stralenbundel* om C_4, in het vlak C_4b. Er zijn dus *vier* stralenbundels gevormd door *singuliere rechten*.

De lijnenparen van den bundel (ϱ^2) leveren drie figuren, die ieder uit drie rechten bestaan; b. v. het samenstel van $C_1\,C_2$, $C_3\,B_4$ en de rechte t_4, die op $C_1\,C_2$ rust. Er zijn blijkbaar *twaalf* figuren, die uit *drie rechten* bestaan.

3. Om den graad te vinden van het oppervlak Λ gevormd door de ϱ^3, welke een rechte l snijden, zoeken wij de doorsnede van Λ met het vlak γ_{123}. Zij bestaat uit twee kegelsneden van den bundel (ϱ^2); de eerste snijdt l, de tweede is bestanddeel van de ϱ^3, welke bepaald wordt door de transversaal uit C_4 over b en l. Dus is Λ een *oppervlak* van den 4^{en} graad; blijkbaar zijn de hoofdpunten C *dubbelpunten* van Λ^4. Een ϱ^3, die niet op Λ^4 ligt, kan dit oppervlak slechts in de punten C en op de hoofdkoorde b snijden; hieruit volgt, dat b *dubbelrechte* is.

Op Δ^4 liggen 9 rechten en 8 kegelsneden.

De rechten die op b en l rusten, leveren een afbeelding van Δ^4 op een vlak.

Een rechte l_1 door een punt C snijdt Δ^4 nog tweemaal buiten C; hieruit volgt, dat de ϱ^3, welke l_1 snijden, op een hyperboloïde liggen; deze is geheel bepaald door l_1, b en C_k. Analoog vormen de ϱ^3, welke rusten op b of op een rechte, die b snijdt, een hyperboloïde.

4. Een vlak λ door l snijdt Δ^4 volgens een kromme λ^3, die op b een dubbelpunt heeft. In elk der drie snijpunten van λ^3 met l wordt λ door een ϱ^3 aangeraakt. Hieruit volgt, dat de krommen ϱ^3, welke een vlak σ aanraken, hun *raakpunten* hebben op een *kromme* σ^3.

Zij B een punt van b; de ϱ^3 door de 5 punten B en C_k, welke σ aanraken, vormen een oppervlak van den 10^{en} graad met 6-voudige punten in B en C_k [1]). Er zijn dus 4 ϱ^3 door B en C_k, die b tot koorde hebben; bijgevolg is b *viervoudig* op de meetkundige plaats Δ der ϱ^3, die het vlak σ raken, en tot de congruentie (1,0) behooren. Evenzoo blijkt, dat Δ *viervoudige punten* heeft in C_k. Een willekeurige ϱ^3 der (1,0) heeft dus 24 punten met Δ gemeen, d.w.z. Δ is een *oppervlak* van den 8^{en} graad.

5. Met het vlak δ heeft Δ^8 de aanrakingskromme σ^3 en nog een kegelsnede σ^2 gemeen. De krommen σ^3 en σ^2 raken elkaar in 3 punten; er zijn dus *drie* krommen ϱ^3, welke het vlak σ *osculeeren*.

Als σ om l wentelt, beschrijft σ^3 een oppervlak van den vierden graad, met enkelvoudige rechte l.

Op de kromme ϱ^3, welke l in R snijdt, bepaalt de vlakkenbundel (σ) een involutie; dus wordt l door twee raaklijnen van ϱ^3 gesneden. Door l gaan dus twee vlakken, waarin R een punt is van de „complementaire" kromme σ^2. Derhalve beschrijft σ^2 een oppervlak van den vierden graad, met dubbelrechte l.

Beschouwen wij nu de verwantschap tusschen de punten P en Q, welke de in een vlak σ gelegen krommen σ^3 en σ^2 met l gemeen hebben. Door P gaat één ϱ^3; de raaklijn in P bepaalt het vlak σ, dus twee punten Q. Door Q gaan twee ϱ^3, dus twee krommen σ^3, en twee vlakken σ, die ieder een kromme σ^3 bevatten; aan Q zijn dus zes punten P toegevoegd. Als twee homologe punten P en Q samenvallen, ontstaat een dubbele coincidentie der (6,2), want in

[1]) Dit volgt gereedelijk uit de doorsnede van dit oppervlak met γ_{123}; deze bestaat uit 2 kegelsneden en 3 dubbelrechten.

dat punt wordt een ϱ^3 door het vlak σ geosculeerd. Op l liggen dus vier punten N, waarvoor het osculatievlak ν door l gaat.

6. Beschouwt men N als nulpunt van ν, dan ontstaat een *nulstelsel* met kenmerkende getallen $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ (§ 5).

De meetkundige plaats van N, als ν door een punt P blijft gaan, bestaat uit een oppervlak $(P)^5$ en uit de vier stralenbundels om de punten C_k en in de vlakken $C_k b$ (§ 2).

Als ν om de rechte l wentelt, beschrijft ν een kromme λ^7 benevens de vier singuliere stralen uit C_k, die op l rusten.

De oppervlakken $(P)^5$ en $(Q)^5$ hebben gemeen de kromme λ^7, die bij PQ behoort, en de 18 singuliere rechten $C_k C_l$ en $C_k B_l$.

Met een ϱ^3 heeft $(P)^5$ de 3 punten gemeen, welke hun osculatievlak door P zenden; de overige 12 gemeenschappelijke punten liggen in de hoofdpunten C; deze zijn dus drievoudige punten van $(P)^5$. De osculatievlakken in C_k omhullen dus een kegel van de derde klasse.

Wiskunde. — B. L. VAN DER WAERDEN: *„Over het concomitantensysteem van twee en drie ternaire quadratische vormen."*

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

Een volledig concomitantensysteem voor 2 ternaire quadratische vormen is opgesteld door GORDAN, en te vinden by CLEBSCH [1]). Hetzelfde voor 3 kegelsneden is, onafhankelijk van elkaar, opgesteld door CIAMBERLINI [2]), door BAKER [3]) en door FISCHER en MUMMELTER [4]). Het systeem van CIAMBERLINI bestaat, als men de „identieke" concomitant u_x meetelt, uit 128 vormen, dat van BAKER uit 148, dat van FISCHER en MUMMELTER uit 185 vormen. Inderdaad zijn 20 van de vormen van BAKER te reduceeren met behulp van de formules van CIAMBERLINI (zie § 3), terwijl SEELIG [5]) heeft laten zien, hoe de vormen van FISCHER en MUMMELTER tot die van CIAMBERLINI te reduceeren zijn. Ten slotte gaf TURNBULL [6]) een volledig typensysteem voor een onbeperkt aantal kegelsneden (of, wat op hetzelfde neerkomt, voor 5 kegelsneden), en, daaruit afgeleid, een volledig vormensysteem voor 4 kegelsneden, bestaande uit 784 concomitanten.

Mijn *doel* is, aan te toonen:

in § 1, dat de 21 vormen van GORDAN *ir*reducibel zijn,

in § 2, dat van de 128 vormen van CIAMBERLINI er 6 reducibel zijn,

in § 3, dat de overige 122 vormen van dat systeem irreducibel zijn.

De *methode* der irreducibiliteitsbewijzen berust op het volgende vanzelf-sprekende principe: Zal een reductieformule voor een concomitant gelden, dan moet zij ook dan blijven gelden, wanneer men de oorspronkelijke vormen specialiseert, bv. ze met elkaar identificeert, of in plaats van de symbolische quadraten a_x^2 etc. werkelijke quadraten v_x^2 neemt. Ik zal dus alle apriori mogelijke, alzijdig homogene reductieformules opstellen (met onbepaalde coëfficiënten), en dan hun onmogelijkheid, door specialiseeringen gepaard met meetkundige beschouwingen, bewijzen.

De eerste onderzoekingen betreffende irreducibiliteit zijn te vinden

[1]) CLEBSCH-LINDEMANN, Vorlesungen I, Abt. III § VIII, p. 291 (Leipzig 1876).

[2]) Giornale di Battaglini 24 (1886) p. 141.

[3]) Trans. Camb. Phil. Soc., Vol. 15, Part I (1894) p. 62.

[4]) Monatshefte für Mathematik und Physik 8 (1897), p. 97.

[5]) „ „ „ „ „ 29 (1918), p. 225.

[6]) Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910) p. 81.

bij TURNBULL[1]): hij bewijst op grond van de identificeering, dat zekere concomitanten voor 4 kegelsneden irreducibel zijn, indien men onderstelt dat zekere concomitanten voor 3 kegelsneden irreducibel zijn. TURNBULL voegt erbij, dat hij nog niet inziet hoe men anders irreducibiliteitsbewijzen zou kunnen leveren.

De *notatie* sluit zich aan bij CLEBSCH en CIAMBERLINI, hoewel later betere methoden zijn ingevoerd. De oorspronkelijke vormen zijn

$$f_1 = a_x^2 = b_x^2 = \ldots .$$
$$f_2 = a'^2_x = b'^2_x = \ldots .$$
$$f_3 = a''^2_x = b''^2_x = \ldots .$$

De contravarianten der afzonderlijke kegelsneden worden aangeduid als

$$F_{11} = (a\,b\,u)^2 = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = \ldots .$$
$$F_{22} = \text{etc.}$$

Van BAKER neem ik nog de volgende verkortingen over:

$$u = \overline{xy} \text{ beteekent } u_1 = x_2\,y_3 - x_3\,y_2, \text{ etc.}$$
$$(vw\,.\,xy) = (\overline{vw}\,x\,y) = (v\,w\,\overline{xy}) = v_x\,w_y - v_y\,w_x.$$

$A \overset{r}{=} 0$ beteekent: A is reduceerbaar tot eenvoudiger vormen (d.w.z. vormen van lageren graad in alle coëfficiënten en variabelen te zamen).

$A \overset{r}{=} B$ beteekent: $A = B +$ reducibele termen (bij BAKER $\equiv$).

$=$ of $\equiv$ beteekent: identiek gelijk voor alle waarden van u, x, a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik}.

Van de volgende *reductie-identiteiten* zal ik gebruik maken: [2])

(a) $a_\alpha\,a_y\,v_\alpha = \frac{1}{3}\,a_\alpha^2\,.\,v_y \qquad \overset{r}{=} 0$

(b) $(abv)\,a_y\,b_z = \frac{1}{2}\,v_\alpha\,(ayz) \qquad \overset{r}{=} \frac{1}{2}\,v_\alpha\,(ayz)$

duaal: (c) $(\alpha\beta y)\,v_\alpha\,w_\beta = \frac{2}{3}\,a_\alpha^2\,.\,b_y\,(bvw) \qquad \overset{r}{=} 0$

(d) $a_\varphi\,b_\varphi\,a_y\,b_z = a_\varphi^2\,.\,b_y\,b_z - \frac{1}{2}(a\varphi y)\,(a\varphi z) \qquad \overset{r}{=} -\frac{1}{2}\,(a\varphi y)\,(a\varphi z)$

duaal: (e) $g_\alpha\,g_\beta\,v_\alpha\,w_\beta = g_\alpha^2\quad v_\beta w_\beta - \frac{2}{3}a_\alpha^2\,.\,(bgv)\,(bgw) \overset{r}{=} 0$

(f) $a_p\,b_q\,a_r\,b_s = a_p b_q a_r b_s + \frac{1}{2}\,(a\,p\,q)\,(a\,r\,s) \qquad \overset{r}{=} a_p b_q\,a_r\,b_s + \frac{1}{2}\,(apq)\,(ars)$

duaal: (g) $p_\alpha\,q_\alpha\,r_\beta\,s_\beta = q_\alpha p_\beta r_\alpha s_\beta + \frac{2}{3}\,a_\alpha^2.(apq)(ars) \overset{r}{=} q_\alpha p_\beta r_\alpha s_\beta$

---

[1]) Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), p. 120.

[2]) CLEBSCH—LINDEMANN, I, III, § VIII. Het overzichtelijkst vindt men de identiteiten alsook de afleiding van het vormensysteem van 2 kegelsneden, bij GRACE and YOUNG, Algebra of Invariants § 238.

waarin $\varphi, g, y, z, v, w, p, q, r, s$ willekeurige symbolen voorstellen. Daarbij komen de fundamenteele identiteiten van het ternaire gebied.

Opmerking. Wil men van een identiteit tot de duale identiteit overgaan, dan moet men elke a door α, elke a' door α', etc., elke x door u, en omgekeerd vervangen, en daarna de verkregen formule (waar dit noodig is, homogeen maken door toevoeging van factoren $\frac{4}{3}\, a_\alpha^2$, $\frac{4}{3}\, a'_{\alpha'}{}^2$, etc. Immers wanneer men a door α vervangt, dan moest men eigenlijk α vervangen door een nieuw symbool $\bar{a}$, gedefinieerd door $\bar{a}_x^2 = (\alpha\, \beta\, x)^2$; nu is echter $(\alpha\, \beta\, x)^2 = \frac{4}{3}\, a_\alpha^2 \,.\, a_x^2$.

§ 1. *Irreducibiliteit van het systeem van 2 kegelsneden.*

Ik zal het systeem van Gordan opschrijven, daarbij echter telkens van twee vormen die door verwisseling der twee kegelsneden in elkaar overgaan, er slechts één nemen. Tusschen haakjes zal ik achter elken vorm vermelden de 4 graden in $a_{ik}, a'_{ik}; u, x$. Het dan volgende getal geeft het aantal analoge vormen aan. Duaal tegenover elkaar staande vormen krijgen met elkaar correspondeerende Grieksche en Latijnsche letters, of wel zij worden door een bovenstreep onderscheiden.

u_x	(00.11)	1	$N_{12} = (a\, a'\, u)\, a_x\, a'_x$	(11.12)	1
$f_1 = a_x$	(10.02)	2	$C_{1,2} = (a\, a'\, u)\, a'_\alpha\, a_x\, u_\alpha$	(31.21)	2
$F_u = u_\alpha^2$	(20.20)	2	$\overline{N}_{12} = (\alpha\, \alpha'\, x)\, u_\alpha\, u_{\alpha'}$	(22.21)	1
$F_{12} = (a\, a'\, u)^2$	(11.20)	1	$\Gamma_{1,2} = (\alpha\, \alpha'\, x)\, a_{\alpha'}\, u_\alpha\, a_x$	(32.12)	2
$A_{111} = a_\alpha^2$	(30.00)	2	$D_{12} = (a\, a'\, u)\, a_{\alpha'}\, a'_\alpha\, u_\alpha\, u_{\alpha'}$	(33.30)	1
$A_{112} = a'_\alpha{}^2$	(21.00)	2	$\Delta_{12} = (\alpha\, \alpha'\, x)\, a_{\alpha'}\, a'_\alpha\, a_x\, a'_x$	(33.03)	1
$B_{1,2} = a'_\alpha\, a'_x\, u_\alpha$	(21.11)	2			
$\Phi_{12} = (\alpha\, \alpha'\, x)^2$	(22.02)	1			

De apriori mogelijke homogene reductieformules zijn

(1)	$F_{11} = 0$	(7)	$N_{12} = 0$
(2)	$F_{12} = 0$	(8)	$C_{1,2} = 0$
(3)	$A_{111} = 0$	(9)	$\overline{N}_{12} = 0$
(4)	$A_{112} = 0$	(10)	$\Gamma_{1,2} = \lambda \,.\, A_{112} \,.\, N_{12}$
(5)	$B_{1,2} = \lambda \,.\, A_{112} \,.\, u_x$	(11)	$D_{12} = 0$
(6)	$\Phi_{12} = \lambda\, A_{112} f_2 + \mu\, A_{121} f_1$	(12)	$\Delta_{12} = 0$

Nu ga ik van elk dezer formules de onmogelijkheid bewijzen.

(1) Uit de meetkunde van de kegelsnede weet men, dat (1) en
(3) (3) niet gelden.

(2) (1) en (3) echter zijn niets anders dan specialiseeringen van
(4) (2) en (4). Dus kunnen ook deze niet gelden.

(5) $B_{1,2}=0$ stelt, bij veranderlijke x, de vergelijking der poollijn° van de pool′ van u voor (pool° beteekent: pool t.o.v. f_1; pool′ beteekent: pool t.o.v. f_2). Dus is $B_{1,2}$ niet identiek nul. Ook valt deze poollijn niet voor elke u met u samen, tenzij de beide poolsystemen identiek zijn; $B_{1,2}$ bevat dus niet de faktor u_x: (5) geldt niet.

(6) In (6) specialiseert men $a_x^2=v_x^2$. Elke vorm, die een symbool a bevat, wordt dan nnl. Dit levert $\Phi_{12}=0$, $A_{112}=0$, $A_{122}\neq 0$, $f_1\neq 0$, en dus $\mu=0$. Evenzoo bewijst men $\lambda=0$. (6) wordt nu $\Phi_{12}=0$. De hiermee duale formule (2) geldt echter niet; dus kan (6) ook niet gelden.

(7) De twee poollijnen van het punt x zijn

$$v=a\,.\,a_x \quad ; \quad w=a'\,.\,a'_x\,.$$

(9) De duale beschouwing geldt voor (9).

(8) De poollijn′ van de pool° van u zij

$$v=a'\,.\,a'_\alpha\,u_\alpha.$$

Verder $\overline{uv}=y$. Daar v niet met u behoeft samen te vallen, behoeft y niet onbepaald te zijn. Dus is $C_{1,2}=a_x\,a_y\not\equiv 0$, m. a. w. (8) geldt niet. De duale beschouwing leert, dat in (10) $\lambda\neq 0$ moet zijn.

(10) In (10) stelt men $a'^2_x=v_x^2$. Elke vorm die een symbool a' bevat, wordt dan nul, en men vindt $\Gamma_{1,2}=0$, $N_{12}\neq 0$, $A_{112}\neq 0$, en dus $\lambda=0$, in strijd met het voorafgaande.

(11) D_{12} stelt voor het produkt der drie zijden van de gemeenschappelijke pooldriehoek der beide kegelsneden, en is dus niet identiek nul.

(12) Het duale bewijs geldt voor Δ_{12}.

§ 2. *Reductie der vormen* $\overline{M}_{ik}$ *en* $\overline{T}_i$ *van* Ciamberlini.

Zij $\overline{M}'_{2,3}=(a\,a''\,x)\,a_{\alpha'}\,a_{\alpha''}\,u_{\alpha'}\,u_\alpha$; $\overline{M}'_{3,2}=(a\,a'\,x)\,a_{\alpha''}\,a_{\alpha'}\,u_\alpha\,u_{\alpha'}$.
Ciamberlini heeft bewezen [1])

$$\overline{M}'_{2,3}-\overline{M}'_{3,2}\overset{r}{=}0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Om $\overline{M}'_{2,3}$ te reduceeren, vermenigvuldigt men de identiteit

$$(a\,a''\,x)\,a_{\alpha'}=(a'\,a''\,x)\,a_\alpha+(a\,a'\,x)\,a_{\alpha''}+(a\,a''\,a')\,a_x$$

met $a_{\alpha''}u_{\alpha'}\,u_\alpha$. Het linkerlid wordt dan $\overline{M}'_{2,3}$. De eerste term van het rechterlid is reducibel volgens (a) wegens den factor a_α; de tweede bevat den werkelijken factor $a_{\alpha''}^2$. Dus

[1]) Giornale di Battaglini, 24, p. 150, a.

$$\overline{M}'_{2,3} \overset{r}{=} (a\,\alpha''\,\alpha')\,a_x\,a_{\alpha''}\,u_{\alpha'}\,u_\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Evenzoo

$$\overline{M}'_{3,2} \overset{r}{=} (a\,\alpha'\,\alpha'')\,a_x\,a_{\alpha'}\,u_{\alpha''}\,u_\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Vermenigvuldig nu de identiteit

$$\begin{vmatrix} a_\alpha & a_{\alpha'} & a_x \\ a''_\alpha & a''_{\alpha'} & a''_x \\ u_\alpha & u_{\alpha'} & u_x \end{vmatrix} = (\alpha\,\alpha'\,x)\,(a\,a''\,u)$$

met $(a''\,a\,u)\,b''_\alpha\,b''_{\alpha'}$. Het rechterlid splitst zich in de werkelijke faktoren $(a''\,a\,u)^2$ en $(\alpha\,\alpha'\,x)\,b''_\alpha\,b''_{\alpha'}$, en is dus $\overset{r}{=} 0$. Bij de ontwikkeling van de determinant in het linkerlid kan men de termen die de werkelijke factor u_x bevatten, verwaarloozen; eveneens volgens (a) de termen met a_α. Er blijven 3 termen over:

$$-(a''a\,u)\,b''_\alpha b''_{\alpha'}\,a''_{\alpha'}\,a_x\,u_\alpha + (a''a\,u)\,b''_\alpha b''_{\alpha'}\,a''_\alpha a_x\,u_{\alpha'} + (a''a\,u)\,b''_\alpha b''_{\alpha'}\,a_{\alpha'}\,a''_x\,u_\alpha \overset{r}{=} 0 \quad (4)$$

De eerste term wordt omgevormd met behulp van (d):

$$-(a''a\,u)\,b''_\alpha\,b''_{\alpha'}\,a''_{\alpha'}\,a_x u_\alpha \overset{r}{=} \tfrac{1}{2}\,(\alpha''\alpha'\,.\,a\,u)\,(\alpha''\alpha'\,a)\,a_x\,u_\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,u_{\alpha'}\,(\alpha''\,\alpha'\,a)\,a_x\,u_\alpha - \tfrac{1}{2}\,a_{\alpha'}\,u_{\alpha''}\,(\alpha''\,\alpha'\,a)\,a_x\,u_\alpha$$

De tweede term van (4) geeft op dezelfde wijze

$$(a''a\,u)\,b''_\alpha\,b''_{\alpha'}\,a''_\alpha\,a_x\,u_{\alpha'} \overset{r}{=} -\tfrac{1}{2}\,(\alpha''\alpha\,.\,a\,u)\,(\alpha''\alpha\,\alpha')\,a_x u_{\alpha'}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,u\,(\alpha''\,\alpha\,\alpha')\,a_x\,u_{\alpha'} + \tfrac{1}{2}\,u_\alpha\,u_{\alpha''}\,(\alpha''\,\alpha\,\alpha')\,a_x\,u_{\alpha'}$$

of, daar de laatstopgeschreven term de reducent a_α bevat,

$$\overset{r}{=} -\tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,u_\alpha\,(\alpha''\,\alpha\,\alpha')\,a_x\,u_{\alpha'} + 0.$$

De derde term van (4) wordt gereduceerd met behulp van (f):

$$(a''\,a\,u)\,b''_\alpha b''_{\alpha'}\,a_{\alpha'}\,a''_x\,u_\alpha = (b''a\,u)\,a''_\alpha b''_{\alpha'}\,a_{\alpha'}\,a''_x\,u_\alpha + \tfrac{1}{2}\,(\alpha''\alpha\,.\,a\,u)\,(\alpha''\alpha'\,x)\,a_{\alpha'}u_\alpha$$
$$= (b''a\,u)\,b''_{\alpha'}\,a_{\alpha'}\,.\,a''_\alpha\,a''_x\,u_\alpha + \tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,(\alpha''\alpha'\,x)\,a_{\alpha'}\,.\,u_\alpha^2 -$$
$$-\tfrac{1}{2}\,a_\alpha\,u_{\alpha''}\,(\alpha''\,\alpha'\,x)\,a_{\alpha'}\,u_\alpha \overset{r}{=} 0 + 0 + 0$$

Dit alles substitueert men (4), en verkrijgt:

$$\tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,u_{\alpha'}\,(\alpha''\alpha' a)\,a_x\,u_\alpha - \tfrac{1}{2}\,a_{\alpha'}\,u_{\alpha''}\,(\alpha''\alpha' a)\,a_x\,u_\alpha - \tfrac{1}{2}\,a_{\alpha''}\,u_\alpha\,(\alpha''\alpha\,\alpha')\,a_x\,u_{\alpha'} \overset{r}{=} 0$$

of, daar de eerste en derde term gelijk zijn,

$$(a\,\alpha''\,\alpha)\,a_x\,a_{\alpha''}\,u_{\alpha'}\,u_\alpha + \tfrac{1}{2}\,(a\,\alpha'\,\alpha'')\,a_x\,a_{\alpha'}\,u_{\alpha''}\,u_\alpha \overset{r}{=} 0 \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Uit (2), (3) en (5) volgt:

$$\overline{M}'_{2,3} + \tfrac{1}{2}\,\overline{M}'_{3,2} \overset{r}{=} 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Eindelijk volgt uit (1) en (6):

$$\overline{M}'_{2,3} \overset{r}{=} \quad ; \quad \overline{M}'_{3,2} \overset{r}{=} 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en dus: de 3 vormen van CIAMBERLINI

$$\overline{M}_{23} = \overline{M}'_{2,3} + \overline{M}'_{3,2} \quad ; \quad \overline{M}_{31} = \overline{M}'_{3,1} + \overline{M}'_{1,3} \quad ; \quad \overline{M}_{12} = \overline{M}'_{1,2} + \overline{M}'_{2,1}$$

zijn reducibel.

Het andere reducibele type van het systeem van CIAMBERLINI is

$$\overline{T}_1 \doteq (\alpha\, \alpha' \alpha'')\, (\alpha\, \alpha'' x)\, (\beta\, \alpha' x)\, (\beta\, \alpha' x)\, u_\beta \,.$$

Volgens (*e*) is in een concomitant elke α met elke β verwisselbaar, waaruit volgt:

$$(a' a''\, u)\, a'_\beta\, a''_\alpha\, b'_\beta\, b''_\alpha\, b'_x\, b''_x \overset{r}{=} (a'\, a''\, u)\, a'_\alpha\, a''_\alpha \,.\, b'_\beta\, b''_\beta\, b'_x\, b''_x \overset{r}{=} 0$$

In het linkerlid passen wij (*d*) toe op $a'_\beta\, b'_\beta \ldots$:

$$(\alpha'\, \beta \,.\, a''\, u)\, (\alpha'\, \beta\, x)\, a''_\alpha\, b''_\alpha\, b''_x \overset{r}{=} 0$$

$$a''_{\alpha'}\, u_\beta\, (\alpha'\, \beta\, x)\, a''_\alpha\, b''_\alpha\, b''_x - a''_\beta\, u_{\alpha'}\, (\alpha'\, \beta\, x)\, a''_\alpha\, b''_\alpha\, b''_x \overset{r}{=} 0.$$

In de tweede term van deze uitdrukking kan men weer een α met een β verwisselen, waardoor zich een werkelijke factor a''_α afscheidt. De tweede term is dus verwaarloosbaar. Op de faktoren $a''_\alpha\, b''_\alpha$ van de eerste term passen wij nogmaals (*d*) toe, en vinden

$$(\alpha''\, \alpha\, \alpha')\, (\alpha''\, \alpha\, x)\, u_\beta\, (\alpha'\, \beta\, x) \overset{r}{=} 0$$

of

$$\overline{T}_1 \overset{r}{=} 0.$$

Evenzoo

$$\overline{T}_2 \overset{r}{=} 0 \quad ; \quad \overline{T}_3 \overset{r}{=} 0.$$

§ 3. *Irreducibiliteit van het systeem van 3 kegelsneden.*

Met weglating van die vormen, die slechts van twee van de drie kegelsneden afhangen, en van de reducibele vormen $\overline{M}$ en $\overline{T}$, bestaat het volledige systeem voor 3 kegelsneden van CIAMBERLINI uit de volgende vormen:

L	$= (a\, a'\, a'')^2$	(111.00)	1
V_1	$= (a\, a'\, a'')\, (a'\, a''\, u)\, a_x$	(111.11)	2 [1]
S_{23}	$= a'_\alpha\, a''_\alpha\, a'_x\, a''_x$	(211.02)	3
Σ_{23}	$= a_{\alpha'}\, a_{\alpha''} u_{\alpha'}\, u_{\alpha''}$	(122.20)	3
A	$= (\alpha\, \alpha'\, \alpha'')^2$	(222.00)	1

[1]) De som der drie V's is, zooals men direct ziet, gelijk aan $L.\, u_x$.

$\overline{V}_1 = (\alpha\, \alpha'\, \alpha'')\,(\alpha'\, \alpha''\, x)\, u_\alpha$	(222.11)	2 [1]
$P_{2,3} = a_{\alpha''}\, a_{\alpha'}\, a''_{\alpha'}\, a''_x\, u_{\alpha''}$	(123.11)	6 [2]
$H = (a'\, a''\, u)\,(a''\, a\, u)\,(a\, a'\, u)$	(111.30)	1
$I = (a\, a'\, a'')\, a_x\, a'_x\, a''_x$	(111.03)	1
$O_1 = (a'\, a''\, u)\, a'_\alpha\, a''_\alpha$	(211.10)	3
$E_{2,3} = (a'\, a''\, u)\, a''_\alpha\, u_\alpha\, a'_x$	(211.21)	6 [3]
$T_1 = (a\, a'\, a'')\,(a\, a''\, u)\,(b\, a'\, u)\, b_x$	(211.21)	3
$X_1 = (a\, a'\, a'')\, a_x\, a'_\alpha\, a''_\alpha$	(311.01)	3
$\Omega_1 = (\alpha'\, \alpha''\, x)\, a_{\alpha'}\, a_{\alpha''}$	(122.01)	3
$-\ M_{23} = a'_\alpha\, a''_\alpha\, a_x\, [a\, a''\, u)\, a'_x + (a\, a'\, u)\, a''_x]$	(311.12)	3
$\overline{E}_{2,3} = (\alpha'\, \alpha''\, x)\, a_{\alpha''}\, a_x\, u_{\alpha'}$	(122.12)	6
$\Upsilon = (\alpha\, \alpha'\, \alpha'')\, u_\alpha\, u_{\alpha'}\, u_{\alpha''}$	(222.30)	1
$U_{2,3} = (a'\, a''\, u)\, a'_{\alpha''}\, a''_\alpha\, u_\alpha\, u_{\alpha''}$	(213.30)	6 [4]
$\overline{H} = (\alpha'\, \alpha''\, x)\,(\alpha''\, \alpha\, x)\,(\alpha\, \alpha'\, x)$	(222.03)	1
$Y_{2,3} = (\alpha'\, \alpha''\, x)\, a''_{\alpha'}\, a_{\alpha''}\, a''_x\, a_x$	(123.03)	6
$\Xi_1 = (\alpha\, \alpha'\, \alpha'')\, u_\alpha\, a_{\alpha'}\, a_{\alpha''}$	(322.10)	3
$G_1 = (a'a''u)\, a'_{\alpha''}\, a_{\alpha''}\, a_{\alpha'}\, a''_{\alpha'}$	(133.10)	3 [5]
$\overline{G}_1 = (\alpha'\alpha''x)\, a''_{\alpha'}\, a''_\alpha\, a'_\alpha\, a'_{\alpha''}$	(233.01)	3 [6]

De methoden der nu volgende irreducibiliteitsbewijzen zijn geen andere dan in § 1 gevolgde.

Vooreerst zijn de vormen L, V, Ω, X, G, U, Y irreducibel, want waren ze reducibel dan waren ook A_{112}, B, $\overline{N}$, C, D, D, Δ, (zie § 1), die uit de eerstgenoemde door identificeering van 2 van de 3 kegelsneden ontstaan, reducibel.

Voor de beide vormen $E_{2,3}$; $E_{3,2}$ vindt men door specialiseering:

$[E_{2,3}]_{1=2} = C_{2,3} =$ irreducibel ; $[E_{2,3}]_{1=3} =$ reducibel ;

$[E_{3,2}]_{1=2} =$ reducibel ; $[E_{3,2}]_{1=3} = C_{3,2} =$ irreducibel ;

---

[1]) De som der 3 vormen $\overline{V}$ is reducibel.

[2]) Bij Ciamberlini heeten deze 6 vormen $P_1\, P_2\, P_3\, \Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3$.

[3]) Bij Ciamberlini heeten deze 6 vormen E_{23}, E_{31}, E_{12}, E'_{23}, E'_{31}, E'_{12}.

[4]) Bij Ciamberlini heeten deze 6 vormen $U_{23}\, U_{31}\, U_{12}\, U'_{23}\, U'_{31}\, U'_{12}$.

[5]) De vormen G en $\overline{G}$ staan niet in de tabel van Ciamberlini (p. 153). Dit is echter klaarblijkelijk een schrijf- of drukfout, want op p. 145 wordt de vorm G genoemd onder de „Forme con un determinante fattore"; bij de reducibele vormen op p. 148 wordt G niet genoemd (d.w.z. G wordt wèl tot de „forme fundamentale" gerekend): in de tabel der „forme fundamentale" op p. 153 wordt G niet genoemd, echter wel meegeteld, en in de meetkundige toepassingen p. 157 duikt G weder op. Vgl. Seelig, Monatshefte f. Math. u. Phys. **29**, p. 265, noot 21.

[6]) Bij Baker vindt men bovendien nog de vormen $(810)_2$, (911), 1010), die reducibel zijn volgens Ciamberlini (p. 151 g, p. 149 c, p. 151 g).

Daaruit volgt: Nòch $E_{2,3}$, nòch $E_{3,2}$, nòch ook een lineaire combonatie van deze beide, kan reducibel zijn, want anders ware ook één der vormen C reducibel.

De duale beschouwing geldt voor $\overline{E}_{2,3}$ en $\overline{E}_{3,2}$.

Voor de overige concomitanten zal ik alle a priori mogelijke homogene reductieformules opschrijven. Daarbij heeft men het volgende te bedenken. Wanneer een concomitant K_{23} symmetrisch is in de vormen f_2 en f_3, dan kan men in een reductieformule voor deze concomitant in het rechterlid de indices 2 en 3 overal verwisselen, zonder dat de formule haar geldigheid verliest. Bepaalt men dan de halve som der beide uitdrukkingen, dan vallen alle alterneerende termen weg, de symmetrische blijven staan, en de overige termen vormen groepen van telkens 2 analoge met gelijke coëfficiënten. Is daarentegen K_{23} alterneerend in f_2 en f_3, dan is de toestand precies omgekeerd: men neemt het halve verschil, de symmetrische termen vallen weg, de alterneerende blijven staan, etc. In de nu volgende formules zijn de beschreven operaties reeds uitgevoerd gedacht: de beide gevallen worden met s (symmetrisch) en a (alterneerend) aangegeven. Zoo is bv. in de eerste formule aan de beide laatste termen dezelfde coëfficient toegekend.

(1)s $S_{23} = \lambda f_1 L + \mu (f_2 A_{113} + f_3 A_{112})$

(2)s $\Sigma_{23} = \lambda (F_{13} A_{233} + F_{13} A_{322}) + \mu (F_{22} A_{133} + F_{33} A_{122})$

(3)s $\Lambda = \lambda L^2 + \mu (A_{112} A_{233} + A_{113} A_{322} + A_{221} A_{133})$

(4)s $\overline{V}_1 = \lambda L^2 u_x + \mu (A_{112} A_{233} + A_{113} A_{322}) + \nu A_{122} A_{133} u_x + \varrho \Lambda u_x + \sigma L V_1$ [1])

(5) $P_{2,3} = \lambda L A_{233} u_x + \mu A_{122} A_{333} u_x + \nu A_{133} A_{223} u_x + \varrho A_{233} V_1 + \sigma A_{233} V_2$

(6) $H = 0$

(7) $I = 0$

(8) $O_1 = 0$

(9)s $T_1 = \lambda (E_{2,3} + E_{3,2}) + \mu O_1 u_x$

(10)s $-M_{23} = \lambda (A_{112} N_{13} - A_{113} N_{12})$

(11)a $\Upsilon = \lambda (O_1 F_{23} + O_2 F_{31} + O_3 F_{12}) + \mu L H$

(12)a $\overline{H} = \lambda (f_1 \Omega_1 + f_2 \Omega_2 + f_3 \Omega_3) + \mu L H$

(13)a $\Xi_1 = \lambda L O_1 + \mu (A_{112} O_3 + A_{113} O_2)$

(14)a $\overline{G}_1 = \lambda L \Omega_1 + \mu (\Omega_2 A_{223} + \Omega_3 A_{332}) + \nu (A_{122} X_3 + A_{133} X_2)$.

Van elk dezer formules ga ik nu weer de onmogelijkheid bewijzen.

---

[1]) De term $\tau L (V_2 + V_3)$, die nog mogelijk zou zijn, is gelijk aan $\tau L u_x - \tau L V_1$, en kan dus in andere termen opgenomen worden.

[2]) Zie Clebsch-Lindemann, t.a.p., of beter Baker, t.a.p., alwaar men de meetkundige onderzoekingen van Clebsch, Rosanes, enz. over de figuur van 3 kegelsneden verzameld vindt.

(6), (7). (6) en (7) gelden niet, want H en I stellen JACOBIANA en CAYLEYANA van het net $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.

(1). In (1) stelt men $a_x^2 = v_x^2$ (kortweg $a = v$). Dan worden alle uitdrukkingen die een symbool a bevatten, nul. Daaruit volgt $S_{23} = 0$, $A_{112} = 0$, $A_{112} = 0$. Verder is dan $f_1 \equiv/\equiv 0$, $L \equiv/\equiv 0$. Daaruit volgt $\lambda = 0$.

In de tweede plaats kiest men x in één der 4 snijpunten van f_2 en f_3. (1) wordt dan $S_{23} = 0$. Meetkundig beteekent dit, dat de beide raaklijnen in x aan f_2 en f_3 geconjugeerd zijn t.o.v. f_1, wat niet altijd het geval is, daar immers f_1 nog geheel willekeurig gekozen kan worden.

(2). In (2) stelt men $a' = v$. Dan wordt $\Sigma_{23} = 0$, $F_{22} = 0$, $A_{122} = 0$, $A_{322} = 0$, $F_{13} \equiv/\equiv 0$, $A_{233} \equiv/\equiv 0$. Daaruit volgt $\lambda = 0$. Verder verloopt het bewijs duaal met (1).

(3). In (3) stelt men $a' = v$, $a'' = w$. Dit geeft, op geheel analoge wijze als bij de voorafgaande bewijzen, $\lambda = 0$. Stelt men slechts $a' = v$, dan vindt men $\mu = 0$. (3) wordt nu $\Delta = 0$. Duaal zou dan ook $L = 0$ moeten zijn, hetwelk niet het geval is.

(4). In (4) stelt men eerst $a' = v$, $a' = w$, $a'' = s$. Dan vindt men

$$0 = \lambda (v\, w\, s)^4\, u_x + \sigma (v\, w\, s)^3 (w\, s\, u)\, v_x \,.$$

Daar echter de lijn v en w onafhankelijk zijn, moeten de coëfficienten van u_x en v_x elk op zich zelf nul worden, waaruit volgt $\lambda = 0$, $\sigma = 0$. Dus bevat $\overline{V_1}$ den factor u_x. Daaruit volgt echter duaal, dat ook V_1 den factor u_x bevat, wat niet het geval is.

(5). In (5) stelt men $a' = v$. Dan worden $P_{2,3}$, A_{122} en A_{223} alle nul. Na deeling door A_{233} verkrijgt men

$$0 = \lambda (a\, a''\, v)^2\, u_x + \varrho\, (a\, v\, a'')(v\, a''\, u)\, a_x + \sigma\, (a\, v\, a'')(a''\, a\, u)\, v_x \,.$$

Stelt men hier $a = s$, $a' = w$, dan vindt men een lineaire afhankelijkheid van de 3 lijnen u, s, w, welke echter geheel willekeurig zijn. Dit is slechts dan mogelijk, wanneer alle coëfficiënten nul zijn, dus wanneer $\lambda = 0$, $\varrho = 0$, $\sigma = 0$. Daaruit volgt, dat $P_{2,3}$ den factor u_x bevat. Stelt men in $P_{2,3}$ echter $s = v$, dan valt $P_{2,3}$ uiteen in twee factoren die niet identiek nul zijn, en waarvan de éene lineair in x, de andere lineair in u is, Deze beide feiten zijn onvereenigbaar.

(8). De duale formule van (8) is $\Omega = 0$; de irreducibiliteit van Ω is echter reeds aangetoond, dus kan (8) niet gelden.

(9). In (9) stelt men $a = v$. Het rechterlid wordt nul, en men verkrijgt

$$(v\, a'\, a'')(a''\, u\, v)(a'\, u\, v)\,.\, v_x = 0$$

of

$$(v\, a'\, a'')(a''\, u\, v)(a'\, u\, v) = 0$$

en dus: de beide poollijnen van het punt $\overline{uv}$ t.o.v. f_2 en f_3 snijden elkaar op v. Dit is echter niet steeds het geval, immers deze beide

poollijnen kunnen, na keuze der lijnen u en v, door variatie van f_2 en f_3 nog op willekeurig gekozen plaatsen gelegd worden.

(10) In (10) stelt men $a' = v$, $a'' = w$, en verkrijgt

$$v_\alpha w_\alpha \,.\, \{a_x (a\,w\,u)\,.\,v_x + a_x (a\,v\,u)\,.\,w_x\} =$$
$$= \lambda \{v_\alpha^2\,.\,(a\,w\,u)\,a_x\,.\,w_x + w_\alpha^2\,.\,(a\,v\,u)\,a_x\,.\,v_x\}.$$

Omdat deze vergelijking voor elke waarde van u gelden moet, moeten de coëfficienten van $(avu)\,a_x$ en $(awu)\,a_x$ elk apart nul zijn. Daaruit volgt

$$v_\alpha w_\alpha\,.\,w_x - \lambda\,.\,w_\alpha^2\,.\,v_x = 0$$

hetgeen, wegens de onafhankelijkheid der lijnen u en v, onmogelijk is.

(11) In (11) stelt men $a = v$, $a' = w$, $a'' = s$, en verkrijgt $\mu = 0$. Stelt men slechts $a = v$, dan vindt men $\lambda = 0$, (11) wordt nu $\Upsilon = 0$; de duale formule (7) geldt echter niet, dus kan (11) ook niet gelden.

(12) In (12) stelt men $a' = v$, $a' = w$, $a'' = s$, en vindt $\mu = 0$. Stelt men slechts $a = v$, dan vindt men $\lambda = 0$. (13) wordt nu $\overline{H} = 0$. De duale geldt echter niet, dus kan (12) ook niet gelden.

(13). In (13) stelt men $a' = v$, $a'' = w$, en vindt $\lambda = 0$. Stelt men slechts $a' = v$, dan vindt men $\mu = 0$: (13) wordt nu $\Xi = 0$. De duale geldt echter niet, dus kan ook (13) niet gelden.

(14). In (14) stelt men $a = v$, en vindt

$$\lambda (v\,a'a'')^2.\,(a'a''x)\,v_{\alpha'}v_{\alpha''} + v\{v_{\alpha''}^2\,(v\,a'a'')\,a''_{\alpha'}\,v_{\alpha'}\,a'_x + v_{\alpha'}^2\,(v\,a'a'')\,a'_{\alpha''}\,v_{\alpha''}\,a''_x\} = 0.$$

Nu kiest men voor v één der gemeenschappelijke raaklijnen van f_2 en f_3. Dan is $v_{\alpha'}^2 = 0$, $v_{\alpha''}^2 = 0$, $(v\,a'\,a'')^2 \not\equiv 0$ (want $(v\,a'\,a'')^2$ is slechts dan nul, wanneer v de beide kegelsneden in harmonische puntenparen snijdt). $(a'\,a''_x)\,v_{\alpha'}\,v_{\alpha''} \not\equiv$ (want deze vorm is slechts dan identiek nul in x, wanneer de verbindingslijn der beide polen, of raakpunten, van v onbepaald wordt). Dus $\lambda = 0$. Neemt men vervolgens voor v een willekeurige raaklijn van f_2, die niet raaklijn van f_3, is, dan wordt $v_{\alpha'}^2 = 0$, $v_{\alpha''}^2 \neq 0$, terwijl men meetkundig gemakkelijk inziet, dat $(v\,a'\,a'')\;a''_{\alpha'}\,v_{\alpha'}\,a'_x \not\equiv 0$ is. Daaruit volgt $v = 0$. Nù is formule (14) homogeen in a, α, . . . afzonderlijk, en kan dus gedualiseerd worden zonder dat er faktoren $\frac{4}{3}\;a_\alpha^2$ behoeven te worden toegevoegd. Uit de irreducibiliteit van G volgt dan de onmogelijkheid van (14).

Wiskunde. — J. WOLFF: *„Over de continuiteitspunten van functies"*.

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en JAN DE VRIES).

Zij $f(P)$ een functie van de coördinaten van een punt P eener ruimte met willekeurig aantal afmetingen. De punten waar f continu is, vormen, zooals bekend is, een *inwendige grensverzameling*, dat is de doorsnee van aftelbaar veel open puntverzamelingen Ω_n, waarbij we mogen aannemen dat Ω_{n+1} deel van Ω_n is voor iedere n. Want de punten, waarbij de functie minder dan $\frac{1}{n}$ schommelt, vormen een open verzameling Ω_n omdat de schommeling half continu naar boven is. De verzameling der continuiteitspunten is de doorsnee van alle Ω_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. YOUNG[1]) heeft laten zien, dat bij iedere inwendige grensverzameling E, die men op een lineair interval geeft, een functie in dat interval behoort, die continu is in ieder punt van E en discontinu in ieder ander punt. Wij laten hier een eenvoudig bewijs volgen, dat onmiddellijk geldig is voor ruimten met willekeurig aantal afmetingen.

1. Gegeven moge dus zijn een puntverzameling E als doorsnee van aftelbaar veel open verzamelingen Ω_n, waarbij Ω_{n+1} deel (niet noodzakelijk echt deel) van Ω_n is.

Wij definieeren $f(P)$ voor ieder punt der ruimte als volgt: ten eerste $f(P) = 0$, als P in E ligt. Zij nu P een punt dat niet in E ligt, n_P de kleinste waarde van n, waarvoor Ω_n het punt P niet bevat.

Wij stellen

$$f(P) = \frac{\psi(P)}{n_P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin $\psi(P)$ de functie is, die in ieder punt der ruimte, waarvan alle coördinaten rationaal zijn, gelijk is aan 1, in ieder ander punt der ruimte gelijk is aan -1.

We kunnen zeggen dat (1) ook doorgaat voor de punten van E, als we daar $n_P = \infty$ denken.

2. Wij zullen nu aantoonen dat $f(P)$ continu is in de punten van E en discontinu daarbuiten.

Onderstellen we eerst dat P tot E behoort. Dan is $f(P) = 0$.

[1]) W. H. YOUNG. Wiener Sitzungsber., vol 112, Abt. IIa, p. 1307.

Is ε een willekeurig positief getal, dan kunnen we het natuurlijke getal ν zoodanig kiezen, dat

$$\frac{1}{\nu} < \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Daar P in Ω_ν ligt en Ω_ν open is, bestaat er een omgeving U van P, die ook in Ω_ν ligt. Voor ieder punt Q van U is derhalve $n_Q > \nu$, zoodat wegens (1) en (2)

$$| f(Q) | < \varepsilon,$$

Dus f is continu in ieder punt van E.

Nemen we nu P in het complement van E. Als P niet op de grens van Ω_{n_P} ligt, heeft P een omgeving U, die geen punt met Ω_{n_P} gemeen heeft en in $\Omega_{n_P - 1}$ ligt. Voor ieder punt Q van U is dan $n_Q = n_P$. Dus

$$| f(Q) | = | f(P) |$$

Daar de punten waar f positief is, zoowel als die waar f negatief is, overal dicht op U liggen, is de schommeling van f in P gelijk aan $2 \, | f(P) |$.

Als echter P op de grens van Ω_{n_P} ligt, bevat iedere omgeving U van P een deel van Ω_{n_P}. Voor ieder punt Q van dat deel is $n_Q > n_P$, dus

$$\left| f(Q) - f(P) \right| \geqq \frac{1}{n_P} - \frac{1}{n_P + 1} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Daar nu de punten Q, waarvoor de ongelijkheid (3) geldt, zich in P verdichten, is P een discontinuiteitspunt van f. Hiermee is de stelling geheel bewezen.

Wiskunde. — J. WOLFF: *„Inwendige grensverzamelingen"*.

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en JAN DE VRIES).

Door HOBSON is voor het eerst de volgende stelling bewezen:

Een aftelbare puntverzameling, die geen deel heeft, dat dicht in zichzelf is, is een inwendige grensverzameling [1]), m. a. w. het gemeenschappelijke van aftelbaar veel open puntverzamelingen, waarbij we mogen aannemen, dat iedere de volgende bevat.

BROUWER heeft een uiterst kort bewijs geleverd, maakt echter, evenals HOBSON, gebruik van de transfiniete ordinaalgetallen [2]).

Bij het hier volgende bewijs wordt daar geen gebruik van gemaakt.

1. Als $E_1, E_2, \ldots$ inwendige grensververzamelingen zijn, als verder iedere E_k deel is van een open verzameling Ω_k, terwijl de twee aan twee geen punten gemeen hebben, dan is ook de vereeniging $E_1 + E_2 + \ldots$ een inwendige grensverzameling.

We mogen namelijk schrijven:

$$E_k = \Omega_{k_1} \Omega_{k_2} \ldots \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

waarmee we bedoelen dat E_k de verzameling is van de punten, die in Ω_{ki} liggen, voor iedere i. De Ω_{ki} zijn open puntverzamelingen, waarvan we mogen onderstellen dat ze allen in Ω_k liggen.

De puntverzameling

$$(\Omega_{11} + \Omega_{21} + \ldots)(\Omega_{12} + \Omega_{22} + \ldots) \ldots$$

bevat $E_1 + E_2 + \ldots$, maar geen punt daarbuiten, daar $\Omega_{ki} \Omega_{lj} = 0$, voor $k \neq l$. Hiermee is de hulpstelling bewezen.

2. We zeggen dat een puntverzameling E inwendige grensverzameling *in een punt* P is, als er een dat punt bevattende open puntverzameling bestaat, zoodat het daarin gelegen deel van E een inwendige grensverzameling is. Dat geldt dan ook voor het deel van E gelegen in een willekeurige open puntverzameling, die deel is van de genoemde.

3. Als een aftelbare puntverzameling E inwendige grensverzameling is in ieder van haar punten, dan is E een inwendige grensverzameling.

[1]) Proc. London M.S. (2) 2, p. 316—323.

[2]) Versl. der Kon. Akad. v. Wetensch., Deel 23, bl. 1325.

We noemen de punten van E: $P_1, P_2, \ldots$

Om P_k als middelpunt leggen we een interval (vierkant, kubus, enz. al naar het aantal dimensies van de ruimte, waarin E gegeven is) I_k, zoodat $E I_k$ een inwendige grensverzameling is, waarbij wij zorgen, dat de rand van I_k geen punt van E bevat, hetgeen wegens de aftelbaarheid van E mogelijk is.

Met I_k bedoelen we het open interval, door $\overline{I}_k$ zullen we het afgeslotene aanduiden, door een accent het complement van een verzameling. Nu is

$$E = EI_1 + EI_2 (\overline{I}_1)' + EI_3 (\overline{I}_1)' (\overline{I}_2)' + \ldots$$

Dat E inwendige grensverzameling is volgt nu onmiddellijk uit N°. 1.

4. Zij E aftelbaar en geen inwendige grensverzameling. Dan is volgens N°. 3 de verzameling D van de punten E, waarin E niet inwendige grensverzameling is, niet leeg. Zij P een punt van D en I een interval met P tot middelpunt. EI is volgens N°. 2 geen inwendige grensverzameling, dus evenmin $EI - P$, dus $EI - P$ bevat volgens N°. 3 een punt Q, waarin $EI - P$ niet inwendige grensverzameling is, dus E is ook niet inwendige grensverzameling in Q, zoodat Q in D ligt. Hieruit volgt, dat D dicht in zich zelf is, en daaruit de te bewijzen stelling.

Physiologie. — R. Brinkman en A. von Szent-Györgyi: „*Onderzoekingen over de chemische oorzaken der normale en pathologische Haemolyse*".

(Aangeboden door de Heeren H. J. Hamburger en E. D. Wiersma).

I. *De isoleering van haemolytische stoffen uit normaal menschenbloed.*

Het is reeds lang bekend, dat men door extractie van normaal bloed met verschillende vetoplosmiddelen groepen van stoffen kan isoleeren, welke op zich zelf een sterk haemolytisch karakter hebben [1]). De bestudeering dezer stoffen zal voor de verklaring der normale en pathologische haemolyse van belang kunnen zijn, doch een goed inzicht in hunne samenstelling en werkzaamheid werd tot nu toe niet verkregen. Noguchi [2]) dacht bij de extractie dezer verbindingen met zeepen te doen te hebben, beschouwde ze echter alleen in hunne betrekking tot immuno-chemische processen en werd door latere onderzoekers niet gesteund [3]). Anderen dachten meer aan stoffen met een phosphatiedstructuur als dragers der haemolytische eigenschappen, zonder daarvoor echter voldoende bewijsgronden te kunnen aanvoeren [4]).

Een nauwkeuriger onderzoek naar de chemische samenstelling en naar de wijze van voorkomen in het bloed is noodzakelijk om de physio-pathologische beteekenis dezer haemolytica te kunnen vaststellen

Wij zijn daarbij uitgegaan van de gedachte, dat het vooral gewenscht is, deze stoffen zoo zuiver mogelijk te isoleeren, om daarna hunne samenstelling en physisch-chemische eigenschappen te kunnen nagaan. Een eerste voorwaarde voor het onderzoek was daarom complete extractie dezer haemolytica; daarna werden de extracten gefractioneerd onder geleide der steeds sterker wordende haemolytische werkzaamheid. Deze laatste werd quantitatief beoordeeld door emulgeering der extract-fracties in isotonische, neutrale phosphaatoplossing bij 37° C. [5]).

---

1) Zie Brinkman, Arch. néerl. de Physiol. VI, 451, (1922).

2) Noguchi, Biochem. Zeitschr. VI. 327, (1907)

3) Zie Landsteiner. Handbuch Kolle-Wassermann II, 1291, (1913).

4) Brinkman. L. c.

5) Zie voor de methodiek bij Brinkman l. c.

De isoleering der haemolytica geschiedde op de volgende wijze:

Het door venapunctie verkregen versche gedefibrineerde bloed werd scherp afgecentrifugeerd, de bloedlichaampjes in vetvrij filtreerpapier opgezogen en bij 37° C. gedroogd. Dan werden de gedroogde bloedlichaampjes gedurende 1 uur met een voldoende hoeveelheid petroleumaether bij kamertemperatuur geextraheerd; hierdoor worden neutrale vetten en de meeste cholesterine verwijderd, zonder verlies van haemolytische stoffen. De verdere quantitatieve extractie geschiedde in een speciaal geconstrueerd apparaatje voor extractie bij kookpuntstemperatuur met altijd versch gedistilleerd oplosmiddel, wat ook voor kleine hoeveelheden geschikt is. Als oplosmiddel werd op grond van ervaringen der phosphatiedchemie aceton gekozen; om echter hiermede de haemolytica quantitatief te kunnen extraheeren, was een voorafgaande behandeling met alcoholdamp gedurende 1/2 uur noodzakelijk. Een daarop volgende heete aceton-extractie gedurende 2 uren lost alle aanwezige haemolytica op.

Voor verdere fractioneering werd het acetonextract op een klein volume ingedampt en 1 nacht in het ijs gezet. Daarbij slaan de meeste opgeloste stoffen neer, en hierbij bevinden zich geen haemolytica. De overblijvende sterk werkzame fractie heeft de volgende eigenschappen:

Zij is bij zwak zure reactie oplosbaar in alle typische vetoplosmiddelen; doch bij alcalische reactie zijn de haemolytica onoplosbaar in petroleumaether. De gezochte stoffen slaan niet neer met Cd, maar worden in waterige oplossing quantitatief geprecipiteerd door Ba, en uit acetonoplossing quantitatief door een ammoniakale loodacetaatoplossing bij tegenwoordigheid van tenminste 30 % water.

De gezochte haemolytica vertoonen dus alle typische reacties der hoogere vetzuren. De genoemde precipitaten waren alle vrij van P, zoodat phosphatiden definitief uitgesloten kunnen worden, en de normale haemolytische bloedextractiestoffen met hoogere vetzuren, resp. hunne zeepen moeten worden geidentificeerd.

Uit de oplosbaarheid der Pb- en Ba-zouten bleek, dat wij hier met een mengsel van verzadigde, weinig onverzadigde en sterk onverzadigde vetzuren te doen hebben. Het verdere onderzoek zal den aard en de procentische verhouding dezer vetzuren moeten vaststellen.

Slechts door een nauwkeurig quantitatief onderzoek zijn op deze wijze de vetzuurfractie en de phosphatiedfractie van elkaar te scheiden; vroegere onderzoekers hebben waarschijnlijk deze scheiding niet kunnen uitvoeren, zoodat den phosphatiden eveneens een rol bij de haemolyse werd toegeschreven.

In aansluiting aan deze uitkomsten hebben wij nog eens de haemolytische werking van lecithine onderzocht. Het bleek, dat een lecithinepreparaat, dat door nieuwere methoden werkelijk gezuiverd was, [1]) geen haemolytische eigenschappen vertoonde, en dat haemo-

---

[1]) Zie A. von Szent-Györgyi, verschijnt in de Biochem. Zeitschr.

lytische werking der handelslecithine, ook als deze door de gebruikelijke acetonprecipitatie gezuiverd is, aan verontreinigingen moet worden toegeschreven.

Wanneer men eenmaal weet, dat de haemolytica der lipoide bloedextracten hoogere vetzuren zijn, is het mogelijk, deze langs snellen weg te isoleeren. Dit kan als volgt geschieden.

Het gedroogde in papier opgezogen bloed (van ± 5 cc bloed) wordt in het kookpunts-extractieapparaat gedurende 1 uur met absolute alcohol behandeld. Het extract wordt tot 5 cc ingedampt, en daarna 5 cc van een mengsel van gelijke deelen $^1/_5$ N Na_2CO_3 en $^1/_5$ N NaOH toegevoegd. Na 5 minuten wordt 3 maal met 5 cc petroleumaether uitgeschud; hierdoor worden neutrale vetten en cholesterine geheel en de phosphatiden grootendeels verwijderd. Dan wordt het overgebleven alcoholextract met $^1/_2$ cc geconcentreerd HCl aangezuurd en 2 maal met 5 cc petroleumaether uitgeschud; vervolgens wordt aan het alcoholextract 1 cc benzol toegevoegd, sterk geschud en daarna weer met 5 cc petroleumaether uitgeschud. De aldus verkregen 3 petroleumaether-extracten bevatten practisch alle vetzuren, en daarmede alle normaal-haemolytica.

Wordt dit extract ingedampt en de droogrest in isotonische neutrale phosphaatoplossing goed geëmulgeerd, dan kan de van 1 cc bloed verkregen hoeveelheid vetzuren, geëmulgeerd in 1 cc phosphaatoplossing tot op $^1/_{64}$ verdund worden en is dan nog in staat 1 % toegevoegde bloedlichaampjes in $^1/_2$ uur op 37° C. te haemolyseeren.

SAMENVATTING.

Door specifieke extractie met vetoplosmiddelen zijn uit normaal bloed stoffen te isoleeren, welke een sterk haemolytisch vermogen bezitten. Het blijkt dat deze haemolytica uitsluitend uit hoogere vetzuren bestaan, en er wordt een eenvoudige methode aangegeven om deze vetzuren quantitatief uit het bloed te isoleeren.

Physiologie. — R. BRINKMAN en A. VON SZENT-GYÖRGYI: „*Onderzoekingen over de chemische oorzaken der normale en pathologische haemolyse*".

(Aangeboden door de Heeren H. J. HAMBURGER en E. D. WIERSMA).

II. *Over den toestand, waarin sterk haemolytische vetzuren in het normale bloed voorkomen.*

In de vorige mededeeling werd beschreven, hoe uit normaal bloed een vrij groote hoeveelheid sterk haemolytische hoogere vetzuren kan worden geïsoleerd. Het is duidelijk, dat deze vetzuurwerking in het bloed geheel of bijna geheel moet zijn opgeheven; door welke oorzaken dit gebeurt, is echter niet bekend. Men heeft in dit verband voornamelijk gedacht aan de vorming van eiwitvetzuurverbindingen, zonder te weten, of deze combinaties in het bloed kunnen bestaan, en of ze aan het vetzuur het haemolytische karakter geheel kunnen ontnemen. Toch moet de kennis dezer vetzuur-inactiveering voor de genese der normale en pathologische haemolyse van groot belang zijn, daar een insufficientie van het bindingsmechanisme de bloedlichaampjes in gevaar brengt.

Om te onderzoeken, hoe en waar de vetzuren in het bloed gebonden worden, hebben wij gebruik gemaakt van de sterke capillairactiviteit dezer verbindingen, en dit ten eerste omdat juist deze capillairactiviteit een eigenschap is, waarmede haemolyseerend vermogen en bindingsneiging ten nauwste samenhangen, en ten tweede, omdat wij de oppervlaktespanning-verandering van kleine hoeveelheden plasma of bloed snel en nauwkeurig kunnen bepalen met de torsiebalans [1]).

De oppervlaktespanning eener neutrale sterk verdunde vetzuuroplossing is veel lager dan de statische oppervlaktespanning van bloed of serum; dit wijst er dus al op, dat de vetzuren niet vrij kunnen voorkomen in het bloed, maar alleen in gebonden toestand. De geringste hoeveelheid vrij voorkomend vetzuur moet zich in het plasma onmiddellijk door een sterke daling der statische oppervlaktespanning verraden, doch ook de capillairactiviteit der eiwit-vetzuurverbindingen is voor zoover wij weten steeds zoo groot, dat een

---

[1]) BRINKMAN en VAN DAM. Münch. med Woch. 1550 (1921).

geringe daling der grensspanning plasma-lucht zou moeten volgen, wanneer een toegevoegd vetzuur als eiwitverbinding werd vastgelegd.

Men kan zich de mogelijkheid van een vetzuurverbinding als een chemische of als een adsorbtieve, primair physische voorstellen; speciaal deze laatste hangt samen met de intensieve capillairactiviteit der zuren. Gaan wij nu na, hoe zich de oppervlaktespanning serum-lucht onder toevoeging eener verdunde, neutrale vetzuuremulsie verhoudt, dan geeft de volgende tabel een algemeen geldig overzicht.

Oppervlaktespanning versch menschenserum	52	dyne c.M.
+ 0.001 N oliezuur in neutrale emulsie	52	„
+ 0.002 N „ „ „ „	52	„
+ 0.003 N „ „ „ „	52	„
+ 0.004 N „ „ „ „	51	„
+ 0.005 N „ „ „ „	47	„
+ 0.006 N „ „ „ „	45	„
+ 0.007 N „ „ „ „	42	„
+ 0.008 N „ „ „ „	41	„
+ 0.009 N „ „ „ „	39	„
+ 0.010 N „ „ „ „	39	„

Oppervlaktespanning der oliezuuremulsie . 28 dynes p. c.M. (Temperatuur 18° C.).

Men ziet dus, dat het serum een toevoeging van 0.004 N. oliezuur verdraagt zonder verlaging der oppervlaktespanning; bij verdere toevoeging begint een geleidelijke daling tot een spanning van ± 40 dynes per c.M.; een lagere daling wordt alleen bij sterke overmaat oliezuur bereikt.

Wij zullen ons met de verklaring der langzame daling der spanning hier niet bezighouden, daar elke daling der normale spanning reeds als abnormaal moet worden beschouwd, maar uitsluitend trachten te verklaren, op welke wijze het plasma zijn oppervlaktespanning bij toevoeging van oliezuur weet constant te houden. De constantheid der oppervlaktespanning wijst er op, dat de gevormde verbinding de tensie aan het water-lucht-grensvlak niet sterker dan tot 52 dynes per c.M. kan verlagen, een feit, dat de primaire vorming van eiwitvetzuren vrijwel uitsluit. Wij moesten daarom aan het optreden van andere bindingen denken, en vonden in de vorming van calciumzeepen van stearinezuur, palmitinezuur en oliezuur een voldoende verklaring voor de constantheid der oppervlaktespanning. Deze binding werd aangetoond door de volgende feiten:

a. Bloed of serum, waaruit het calcium door toevoeging van een weinig $(NH_4)_2C_2O_4$ is neergeslagen, is niet meer in staat zijn oppervlaktespanning bij toevoeging van oliezuur constant te houden. Een voorbeeld hiervan geeft de volgende tabel.

Oppervlaktespanning versch menschen-oxalaatplasma	49 d. c.M.
+ 0.001 N oliezuur in neutrale emulsie	47 „
+ 0.002 N „ „ „ „	45 „
+ 0.003 N „ „ „ „	42 „
+ 0.004 N „ „ „ „	40 „
+ 0.005 N „ „ „ „	38 „

Dezelfde uitkomst krijgt men met bloed, waaraan NaFl is toegevoegd.

b. Een zoutoplossing, welke ongeveer evenveel Calcium bevat als bloedplasma, kan, bij geleidelijke toevoeging van oliezuur-emulsie op 37° bij neutrale reactie, haar oppervlaktespanning evenlang boven 50 dynes houden als plasma dit kan. Dit geldt zoowel voor een 0.05 % oplossing van $CaCl_2$.6 aq als voor een isotonische geëquilibreerde zoutoplossing van de samenstelling: NaCl 0.7 %, $NaHCO_3$ 0.2 %, KCl 0.02 %, $CaCl_2$.6 aq 0.05 % en zooveel H_2CO_3 tot $[H^{\cdot}] = 0.4 \cdot 10^{-7}$.

Onderstaande tabel geeft de oppervlaktespanning van genoemde geaequilibreerde zoutoplossing, waaraan geleidelijk 0.0001 N oliezuur-emulsie werd toegevoegd.

Oppervlaktespanning van de gebalanceerde zoutoplossing	74 d. c.M.
+ 0.0001 N oliezuur in neutrale emulsie	54 „
+ 10 × 0.0001 N	53 „
+ 10 × 0.0001 N	52 „
+ 10 × 0.0001 N	52 „
+ 5 × 0.0001 N	50 „
+ 5 × 0.0001 N	39 „

Opdat de spanning der zoutoplossing bij oliezuurtoevoeging niet beneden de plasmaspanning (52 dynes) zal dalen, is het noodzakelijk, de oliezuurtoevoeging zeer geleidelijk te doen plaats vinden, en het mengsel na elke toevoeging ½ uur op 37° te laten. Alleen dan krijgt men de vorming van een calcium-oleaat met een voldoend geringe capillairactiviteit. Deze voorwaarden zijn echter in vivo ook vervuld.

Het was nu de vraag of deze calciuminactiveering niet alleen voor toegevoegd oliezuur, maar ook voor de binding der normaal voorkomende vetzuren van belang was. Het is zeker, dat ⅓ deel van het totaal calcium in kolloidalen vorm in het plasma aanwezig is, en op grond van de onoplosbaarheid der vetzure kalkzouten is een zoodanige verbinding wel waarschijnlijk. Inderdaad is het gemakkelijk aan te toonen dat verwijdering van het normale plasmacalcium een vrij belangrijke daling der oppervlaktespanning ten gevolge heeft:

Oppervlaktespanning van 1 cc versch menschenserum 53 dynes p. c.M. + 0.3 cc. verzadigd ammoniumoxalaat, daalt op 50—48—46 d. c.M.

Hetzelfde geschiedt bij toevoeging van $^1/_4$ cc verzadigde NaFl-oplossing.

Ook wanneer men een weinig zuur aan het plasma toevoegt, zou uit een eventueel aanwezig vetzuur calciumzout het vetzuur moeten vrijkomen en de oppervlaktespanning gaan verlagen. Dit blijkt eveneens het geval te zijn. En wel moet men juist evenveel verdund HCl toevoegen als noodig is om de titratie-alcaliciteit van het serum te overwinnen (0,025 N.); dan daalt de oppervlaktespanning van het serum van 52 op 45 dynes. Het is dus wel waarschijnlijk, dat ook normaal een groot deel van het vetzuur als calciumzout voorkomt en op die wijze geinactiveerd wordt. De directe analyse zal hiervoor het definitieve bewijs moeten brengen.

Tot nu toe hebben wij alleen de inactiveering van het oliezuur nagegaan; het bleek, dat de *verzadigde* hoogere vetzuren zich precies op dezelfde wijze gedragen, zooals ook te verwachten was, maar dat het sterker onverzadigde physiologisch belangrijke linoleenzuur een calciumverbinding geeft, welke de oppervlaktespanning der gebalanceerde zoutoplossing er 38 dynes doet dalen. In overeenstemming hiermede is bloed of serum niet in staat bij toevoeging van linoleenzuur in isotonische neutrale stabile emulsie zijn oppervlaktespanning te bewaren, zooals het dit bij oliezuur wel kan. Men ziet dit uit de volgende proef:

Oppervlaktespanning van versch menschenserum	53	dynes	p. c.M.
+ 0.001 N linoleenzuur-emulsie	47	„	„
+ 0.002 N	46	„	„
+ 0.003 N	46	„	„
+ 0.004 N	44	„	„
+ 0.005 N	43	„	„

Hoewel dus het linoleenzuur in plasma eveneens een sterke inactiveering ondervindt, is deze toch niet zoo, dat zij de grensspanning van het serum constant kan houden, een feit, dat wij op grond van de capillairactiviteit van het calciumlinolaat konden verwachten. Hiermede krijgt het eventueel in het plasma voorkomende linoleenzuur, of een en ander sterk onverzadigd zuur groote beteekenis, daar voor deze stoffen de zoo belangrijke calcium-inactiveering ontbreekt en zij dus op andere wijze aan plasma colloiden of bloedlichaampjes gebonden moeten worden, onder verlaging der daar aanwezige grensspanning.

Vergelijkt men nu hiermede de inactiveering der uit bloed-

lichaampjes geëxtraheerde vetzuren in zoutoplossing en in serum, dan blijkt, dat deze stoffen, in neutrale isotonische phosphaat-oplossing toegevoegd, zich hoofdzakelijk analoog aan oliezuur en de verzadigde vetzuren gedragen, doch dat een geringe hoeveelheid vetzuren aanwezig is, welke zich meer als het linoleenzuur verhouden. Toevoeging der extractvetzuren geeft een daling der serumspanning van 53 dynes op 49.5 dynes; daarna blijft, bij verdere toevoeging, de spanning even constant als bij toevoeging van oliezuur. De extract-vetzuren verlagen de grensspanning van het serum tot die van het bloed, want ook bloedlichaampjes geven aan het serum een ontspanning tot 50 dynes. De oppervlaktespanning van het *bloed* wordt dus niet door geextraheerde vetzuren verlaagd. Of wij hieruit mogen besluiten, dat een kleine hoeveelheid sterk onverzadigde vetzuren normaal aan bloedlichaampjes gebonden voorkomt, moet door het chemisch onderzoek worden uitgemaakt.

Op de beteekenis, welke de beschreven bindingsmechanismen der hoogere vetzuren voor de normale en pathologische haemolyse hebben, zullen wij in een volgende mededeeling terugkomen.

SAMENVATTING.

Door middel van de bepaling der oppervlaktespanning van bloed en serum wordt aangetoond, dat de in normaal bloed aanwezige of opzettelijk toegevoegde vetzuren als calciumzeepen worden gebonden, en dat daardoor hun capillairactiviteit aanzienlijk wordt verminderd. Zeer waarschijnlijk is deze calciumverbinding eveneens de oorzaak van het verdwijnen van het haemolytische vermogen van stearinezuur, palmitinezuur en oliezuur in serum. Voor linoleenzuur is deze calciuminactiveering niet aanwezig; daarmede zal het haemolytische karakter dezer stof in serum veel grooter worden.

Petrographie. — W. F. GISOLF: *„Over het gesteente van den Doormantop in Centraal Nieuw Guinea."*

(Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en H. A. BROUWER).

Op eene causerie, welke Dr. H. J. LAM uit Buitenzorg te Batavia over Nieuw Guinea hield voor de leden der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging, vertoonde hij een gesteente-monster van den Doormantop, hetwelk zoozeer mijn aandacht trok, dat ik het hem ter onderzoek afvroeg. Hij verstrekte het mij onmiddellijk, gelijk later meer monsters van hetzelfde materiaal, waarvoor ik hem langs dezen weg mijn welgemeenden dank betuig. De geoloog der Mamberamo-expeditie, Dr. P. F. HUBRECHT, vertoefde in Oost Java en had geen gelegenheid om mij binnen de eerste maanden materiaal te doen toekomen, maar had, desgevraagd, geen bezwaar tegen het onderzoek en de publicatie van de uitkomsten daarvan. Ook hem worde mijn hartelijke dank betuigd.

De eerste monsters, welke mij ter hand kwamen, vertoonen eene schisteuse natuur, voornamelijk veroorzaakt door evenwijdige strooken magnetiet; zij zijn groen, donker van kleur, met eene dunne lichtbruine echter niet losse verweeringskorst, caverneus van uiterlijk door erosie; aan beide zijden komt magnetiet in kristalbegrenzing ontberende massa's te voorschijn in betrekkelijk aanzienlijke hoeveelheid; de erosie heeft de magnetiet gespaard, waardoor zij $^1/_2$ à 1 c.M. buiten het gesteente uitsteekt. Een hamerslag op het monster deed het breken langs de magnetiet, waardoor een eerste scheiding tusschen het gesteente en het erts verkregen kon worden.

Enkele preparaten van het zooveel mogelijk van magnetiet bevrijde gedeelte werden vervaardigd. Onder het microscoop bleek de aanwezigheid van nog betrekkelijk veel magnetiet met fraaie olivijn en een kleurloos mineraal in lijstvorm met matige breking en zeer zwakke dubbelbreking. De structuur is eenigszins wisselend; de olivijn omsluit nu eens het kleurlooze mineraal, dan weer vormt zij er mee mengsels alsof zij getijktijdig waren uitgekristalliseerd; ook de magnetiet omsluit het kleurlooze mineraal en komt xenomorf in het maaksel olivijn — onbekend mineraal voor. De magnetiet is polair-magnetisch. Vermoedelijk komt een weinig apatiet voor.

De olivijn, die weliswaar unduleus uitdooft, maar niet in die hevige mate als men dat van de meeste peridotieten gewoon is, heeft een zeer frisch uiterlijk; van verweering is zij absoluut vrij; de verweering in de korst blijkt slechts op een bruinkleuring te berusten; serpentinisatie als gevolg van atmosferischen invloed is niet te bespeuren. De brekingsindices werden in een ander preparaat met behulp van de immersie-methode vastgesteld op 1,66 en 1,70, nadat het zorgvuldig met xylol van canadabalsem was bevrijd. De dikte van het preparaat bedroeg $^1/_{35}$ m.M. (gemeten door het preparaat los te maken en loodrecht op het objectglas met kaarsvet vast te zetten); de hoogst waargenomen interferentiekleur was groen 3e orde, zoodat γ-$\alpha = 0{,}04$ ongeveer, hetgeen overeenstemt met de indicesbepaling. De waarneming loodrecht op een optische as in convergent licht gaf een, bij draaiing van de tafel zich slechts weinig krommende, balk te zien, waaraan het optisch positieve teeken en een groote assenhoek konden worden vastgesteld. Vermoedelijk heeft men dus te doen met een ijzermagnesiumolivijn met ca. 10 °/₀ à 12½ °/₀ ijzerolivijn en 90 °/₀ — 87½ °/₀ magnesiumolivijn (zie C. DOELTER, Handbuch der Mineralchemie II, I pag. 16).

Het kleurlooze mineraal veroorzaakte echter bij de bepaling de meeste moeilijkheden. Lange, ook korte lijsten komen voor: kwadratische doorsneden ontbreken; de dubbelbreking is laag, soms ook haast nul; in eenzelfde lijstje is de dubbelbreking niet altijd gelijk, maar wisselt af, zonder evenwel de zgn. Pflock structuur te bereiken. De lijstjes dooven alle zonder onderscheid recht uit; de ellipsligging is steeds positief; lange splijtstrepen trekken door de lengterichting van het kristal, vooral in het midden en evenwijdig aan de begrenzing. Het was zeer moeilijk een assenbeeld te verkrijgen. Daardoor was de (zooals later bleek onjuiste) gedachte aan een lid der melilietgroep gewekt; noch microchemisch, noch verder langs optischen weg echter kon bevestiging verkregen worden.

Daarom vroeg ik Dr. LAM meer materiaal; en met behulp daarvan is het mij gelukt het mineraal te identificeeren. De preparaten werden alle van dekglas ontbloot, met xylol herhaaldelijk schoongewasschen om toch vooral geen canadabalsem aan de randen van het preparaat te houden en daarna onderzocht met de immersiemethode. De brekingsindex bleek te zijn 1.58.

Met zoutzuur overdekt en voorzichtig afgespoeld bleek gelatineering op te treden; met fuchsine bevochtigd en weer voorzichtig afgewasschen bleken zoowel de olivijn als het onbekende mineraal in kwestie te gelatineeren. Om nu zekerheid te hebben, dat de kiezel-gelatine van de olivijn zich ook niet over het onbekende

11

mineraal had uitgespreid en daardoor tot bedrog aanleiding kon geven, werd het procédé herhaald; door kort te werken bleek nu, dat het mineraal in kwestie eerder gelatineerde dan de olivijn. In het afgenomen vocht bleek microchemisch geen calcium aanwezig te zijn.

Ten slotte werd nu lijstje voor lijstje konoskopisch onderzocht; het gelukte mij bij verscheidene vast te stellen, dat het mineraal tweeassig is en dat het assenvlak steeds loodrecht op de lengterichting staat; daar de lengterichting echter steeds positief is, is dit alleen mogelijk als het mineraal in plaatjes ontwikkeld is, die loodrecht op de optische 𝔄-as staan; dat het mineraal rhombisch is, werd nu meer dan waarschijnlijk. Wij zouden dan te doen hebben met antigoriet in primairen vorm.

De gedachte aan een secundaire postmagmatische ontstaanswijze moet verre verworpen worden; de antigorietlijsten trekken ongestoord van uit het eene in het andere olivijnkristal, vormen verder er mee als het ware eutectica en worden dan overheerschend (zie



Fig. 1. Primaire antigoriet in olivijn.

de microfoto). Dit alles geldt voor het materiaal, dat rijk aan de groote magnetietmassa's is. Ander materiaal, fijner van korrel en

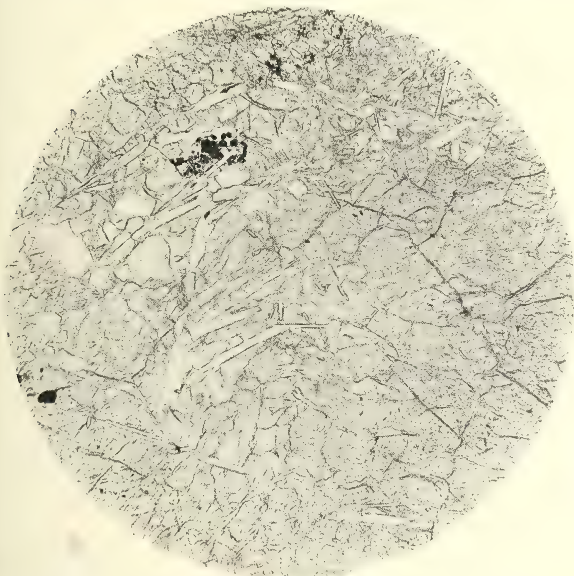


Fig. 2. Als fig. 1, in gepolariseerd licht bij gekruiste nicols.

arm aan groote magnetietmassa's bleek tot mijn groote verrassing uit de gewone antigoriet-serpentijn met zgn. olivijnresten te bestaan. Het schijnt mij toe, dat de kriskras-structuur bij die serpentijnen en de fijne korrel slechts veroorzaakt worden door snellere kristallisatie. Ook in deze monsters was de olivijn absoluut frisch.

Het kristallisatie-schema zooals dit uit de preparaten blijkt is:

Antigoriet; antigoriet-magnetiet; antigoriet-olivijn-magnetiet.

Het heeft den schijn, dat dit laatste een eutecticum is, ofschoon het niet onmogelijk is, dat de magnetiet geresorbeerd wordt.

Daar het gesteente aan de oppervlakte ligt, zijn de voorwaarden voor serpentijnvorming door atmosferische invloeden gunstig geweest. Hiervan is echter in het gesteente geen spoor te bekennen. Er dringt zich daarom de vraag naar voren of niet altijd de serpentijn een magmatisch product, althans geen verweeringsproduct is.

Wat nu de ontstaanswijze van dit gesteente betreft kan de veronderstelling geuit worden, (totdat het stelsel $H_2O-MgO-FeO-Fe_2O_3-SiO_2$ onderzocht zal zijn) dat het magma, waaruit dit gesteente ontstond, onder een zoodanigen druk kristalliseerde, dat de gasvormige bestanddeelen (voornl. waterdamp) niet konden ontwijken en dus in het gesteente-complex van den aanvang der kristallisatie af moesten worden opgenomen en zoo aanleiding gaven tot primaire serpentijnvorming. Chemisch uitgedrukt[1]: de kristallisatie begint in het serpentijnveld en eindigt in een punt serpentijn-olivijn (magnetiet?) dat waarschijnlijk dicht bij de verbindingslijn olivijn-serpentijn gelegen is (daar Fe_3O_4 in olivijn-serpentijnmaaksel slechts weinig plaats inneemt), voor het geval van eutecticum aan dezelfde zijde als het punt Fe_3O_4 gelegen, in geval van resorptie in het gemeenschappelijk veld van serpentijn-olivijn gelegen.

Men kan het vermoeden opperen, dat bij andere peridotieten, waar eerst olivijn kristalliseerde, die druk geringer geweest is, waardoor de gassen bij den aanvang der kristallisatie weliswaar eerst konden ontwijken, maar naderhand bij algeheele kristallisatie toch weer opgenomen werden, waardoor in zulke gevallen serpentinisatie van olivijn als een apomagmatisch (hydrothermaal) proces zou kunnen worden opgevat. Chemisch gesproken: de kristallisatie begint dan in het olivijnveld, het stabiliteitsveld van de olivijn wordt daarna bij toenemenden druk verlaten en dat van de serpentijn bereikt. Dat daarbij magnetiet afgescheiden moet worden, is na het vorenstaande duidelijk. Ook komt magnesium beschikbaar hetzij voor periklaas, picotiet, of magnesiet. Daar de gassen zich naar boven begeven, is het duidelijk, dat serpentinisatie voornamelijk zal optreden in de bovenste zones van peridotietmassieven en op barsten in het stollende en dus krimpende peridotietmassief.

Daar de erosie van boven naar beneden werkt, worden in het eerst deze randdeelen blootgelegd, waardoor men in het veld dus in vele gevallen de serpentijn eerst en de olivijn daarna vinden zal; hetgeen de m.i. onjuiste veronderstelling, dat serpentijn een verweeringsproduct zou zijn, in de hand gewerkt heeft.

Nadat het bovenstaande neergeschreven was (Augustus '22) kwam mij op 29 December de scheikundige analyse ter hand.

Van een monster, zooveel mogelijk van magnetiet bevrijd, werd

---

[1]) Ter vereenvoudiging is daarbij aangenomen, dat serpentijn en olivijn zéér bepaalde verbindingen zouden zijn, hetgeen natuurlijk niet het geval is. Voor het temperatuur-druk diagram van het vijfstoffenstelsel zou men een zes- of zevendimensionale ruimte moeten gebruiken hetgeen het overzicht niet bevordert.

op het Hoofdbureau van het Mijnwezen eene analyse vervaardigd, door de heeren Irs. A. TER BRAAKE en G. J. WALLY. Bepaald werd het gloeiverlies bij 100° en bij 200°; de laatste temperatuur werd 3 dagen lang gehandhaafd, nl. totdat het gewicht constant bleef. De uitkomst der analyse luidt:

SiO_2	40.46	
MgO	40.20	
FeO	7.69	(als Fe_2O_3 bepaald)
Al_2O_3	4.12	
H_2O (100°)	6.14	
H_2O (200°)	1.60	
	100.21	

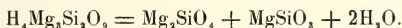
CaO, MnO, Cr_2O_3, NiO zijn afwezig, evenals P_2O_5; K_2O en Na_2O konden niet bepaald worden, daar in Indië geen platinachloride te verkrijgen was. Bij de bepaling van het ijzergehalte werden FeO en Fe_2O_3 niet afzonderlijk bepaald; het is echter waarschijnlijk, dat zij beiden aanwezig zijn.

Het is duidelijk, dat de chemische analyse het microscopisch onderzoek ten volle bevestigt.

Naar de analyse te oordeelen is het waarschijnlijk, dat er ook pyroxeen aanwezig is, hetzij afzonderlijk, zooals in zoovele peridotieten, hetzij in vaste oplossing in, of als bestanddeel van de serpentijn.

Vermoedelijk is dit laatste het geval, daar pyroxeen in geen der praeparaten werd opgemerkt.

Zooals bekend is, gelukte het reeds aan DAUBRÉE[1]) aan te toonen, dat serpentijn bij hooge temperatuur na smelting overgaat in olivijn + enstatiet, terwijl water ontwijkt:



$$H_4Mg_3Si_2O_9 = Mg_2SiO_4 + MgSiO_3 + 2H_2O.$$

Dit geval is, als men van de waterdamp afziet, slechts een onderdeel van het stelsel $MgO—SiO_2$, hetwelk door ANDERSEN en BOWEN onderzocht is. Het resultaat van DAUBRÉE[2]) is met hun resultaten volkomen in overeenstemming; zoo b.v. moet een mengsel van de samenstelling $Mg_2SiO_4—MgSiO_3$ eerst Mg_2SiO_4 afscheiden, waarna bij 1557° Mg_2SiO_4 in reactie met de smelt treedt, waardoor $MgSiO_3$ gevormd wordt, hetwelk zich aan de oppervlakte van de olivijn

[1]) Aan DOELTER is deze proef mislukt; het is echter zeer de moeite waard de nauwkeurig beschreven experimenten van DAUBRÉE na te lezen.

[2]) Comptes Rendus 1866, I, blz. 660 en volgende.

afzet; gelijktijdig wordt de smelt kiezelzuurrijker, waardoor ten slotte SiO_2 kan afgescheiden worden; daar DAUBRÉE magnesia toevoegde, kreeg hij geen vorming van cristobaliet. Zijn waarnemingen zijn, bezien in het licht der latere onderzoekingen, juist; zoo b.v.: Des aiguilles d'enstatite y sont fréquemment disséminées ou en recouvrent la surface (nl. van de olivijn, verkregen bij smelting van serpentijn met toeslag van magnesia) en verder, als hij geen magnesia toevoegde: le (péridot) se montre en moindre proportion que dans les fusions faites en présence de la magnésie.

Waar nu de meeste peridotieten (de dunieten uitgezonderd) uit olivijn en pyroxeen, dus uit orthosilicaat en metasilicaat bestaan, kunnen wij een poging wagen de primaire en secundaire serpentijnvorming in het algemeen onder één gezichtspunt te brengen. Om het geval algemeen theoretisch te kunnen behandelen, zou de kennis van het temperatuur-druk diagram van het stelsel H_2O—MgO—SiO_2 al een eerste stap op den weg zijn [1]). Dat dit diagram bij het groote verschil in vluchtigheid der componenten vrij ingewikkeld zal worden, behoeft geen betoog.

Uit het voorgaande blijkt echter, dat serpentijn onder een druk van één atmosfeer onbestendig is; het zou de moeite wel loonen, de proef van DAUBRÉE te herhalen in waterdamp van diverse spanningen om de stabiliteitsgrens van serpentijn vast te stellen. Is nu onze veronderstelling juist dat olivijn en pyroxeen bij hoogen druk en bij aanwezigheid van waterdamp niet stabiel zijn, maar overgaan in serpentijn, de eerste onder afscheiding van MgO [2]), de laatste onder afscheiding van kiezelzuur, dan kan men de serpentijnvorming aldus verklaren:

1. Indien de druk hoog genoeg is, wordt eerst serpentijn afgescheiden uit een magma, dat uit $x\,Mg_2SiO_4$, $y\,MgSiO_3$, $z\,H_2O$ is samengesteld; bij lageren druk begint de afscheiding met olivijn.

2. Bij afscheiding van olivijn en (of) pyroxeen verzamelen zich de vluchtige bestanddeelen in den kop van de batholiet, waardoor een hooge spanning kan ontstaan, indien zij geen gelegenheid hebben te ontwijken: daardoor wordt het stabiliteitsveld van de olivijn en (of) pyroxeen verlaten en dat van de serpentijn bereikt, waardoor serpentinisatie van olivijn en pyroxeen optreedt, eventueel met een overschot van MgO (Fe_3O_4) of (en) kiezelzuur; het MgO vindt men dan wel meestal als magnesiet.

DAUBRÉE reeds erkende: „Rien ne prouve d'ailleurs que l'hydra-

[1]) Zie b.v. H. E. BOEKE, Grundlagen d. phys. chem. Petrographie, p. 179.

[2]) B. v. als magnesiet, omdat kooldioxyde als componente steeds aanwezig is. Vele serpentijnafzettingen bevatten werkelijk magnesiet en kwarts.

tation qui s'est produite dans la transformation des roches de péridot en serpentine ait été opérée par les agents de la surface du globe".

Dat een peridotietmassief onder den invloed van de vluchtige bestanddeelen van een later eruptief gesteente ook in serpentijn veranderen kan, behoeft nauwelijks vermeld te worden.

Hier zij vermeld, dat een samenvatting van de olivijn-serpentijn kwestie gegeven is door W. N. BENSON, Origine of Serpentine. Am. Journ. of Sc. 46, blz. 693, 1918, helaas echter niet van physisch chemisch standpunt.

Tenslotte mag ik langs dezen weg den Chef van den Opsporingsdienst van het Mijnwezen, den Heer Ir. A. C. DE JONGH mijn dank zeggen, voor de bereidwilligheid waarmede hij de vele praeparaten en de analyse voor mij deed vervaardigen. Dat ik mij van primitieve hulpmiddelen moest bedienen (bv. de bepaling der dubbelbreking zonder compensator, de diktemeting) is uit het bovenstaande duidelijk. Het is te hopen dat het Indische Gouvernement, waar ons Indië met zulk een verscheidenheid van fraaie gesteenten is gezegend, binnen afzienbaren tijd besluiten moge tot de stichting van een behoorlijk geoutilleerd petrografisch laboratorium!

Weltevreden, Aug./Dec. 1922.

Scheikunde. — H. I. WATERMAN en J. N. J. PERQUIN. „*Het hydreeren van paraffine volgens* BERGIUS".

(Aangeboden door de Heeren J. BÖESEKEN en A. F. HOLLEMAN).

In eene vorige mededeeling over het hydreeren volgens BERGIUS van minerale oliën of hiermede verwante producten zijn verschillende proefnemingen besproken, die met zware Borneo-asphaltolie, distillatie-residu (pek) dezer olie en met asphalt, verkregen door distilleeren van Mexicaansche ruwe aardolie, zijn uitgevoerd [1]).

De betreffende experimenten, die zoowel crackings- als bergini-seeringsproeven omvatten, werden in een verticalen stilstaanden autoclaaf uitgevoerd.

Dat wij thans eene andere, technisch voor dit doel wellicht minder belangrijke grondstof, hebben uitgekozen, wordt veroorzaakt door de bijzondere voordeelen, die handelsparaffine voor dergelijke proefnemingen boven andere grondstoffen, zooals asphalt, biedt. De paraffine laat zich veel gemakkelijker analyseeren dan asphalt en ditzelfde geldt ook voor de uit paraffine bereide producten, indien we deze vergelijken met de overeenkomstige bij de asphaltbewerking ontstane stoffen. Zoo geeft de paraffine minder sterk gekleurde producten dan de Mexicaansche asphalt. Voor deze proeven hadden wij de beschikking over een autoclaaf, die continu geschud kon worden [2]).

De wijze van werken was overigens geheel analoog met de vroegere experimenten; de opstelling der apparaten vindt men in fig. 1. De inhoud van den autoclaaf bedroeg ongeveer 2500 cM^3, de verwarming geschiedde door middel van gas, zoodanig dat de temperatuur tot op een paar graden nauwkeurig kon worden geregeld.

De paraffine had een S.G. ($15^\circ/15^\circ$) 0,913, het stolpunt (methode SHUKOFF) was 50,6°, terwijl het broomgetal (additie) bepaald volgens de methode van MC. ILHINEY [3]) 0,5 bedroeg.

[1]) Congrès international des combustibles liquides, Paris, 9—15 Octobre 1922.

[2]) Apparaat geleverd door ANDREAS HOFER, chef van de instrumentmakerij van het laboratorium van Prof. Dr. FRANZ FISCHER, Kaiser Wilhelm Institut für Kohlenforschung, Mülheim—Ruhr.

[3]) Journ. Am. Chem. Soc. **16**, 275 (1894), **21**, 1084 (1899), Journ. Soc. Chem. Ind. **19**, 320 (1900); H. BECKURTS, Die Methoden der Massanalyse, Braunschweig 1913, blz. 480.

Practisch kan dus het broomgetal der paraffine worden verwaarloosd. Het volgens de methode van Mc. ILHINEY bepaalde broomgetal wordt verkregen door het gesubstitueerde broom van het totaal opgenomen broom af te trekken. De resteerende hoeveelheid

Fig. 1.

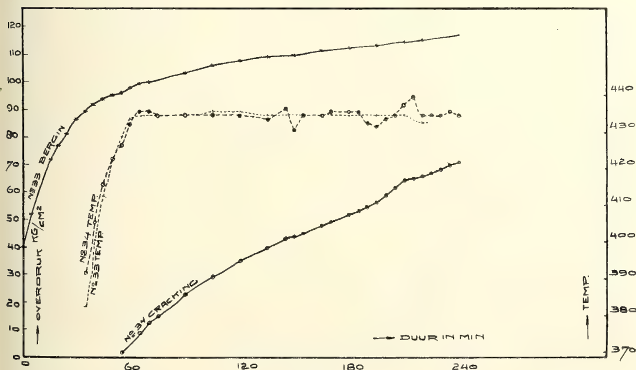


Fig. 2.

geeft een maat voor de onverzadigdheid en wordt uitgedrukt in gewichtsprocenten van de afgewogen hoeveelheid.

Bij elke proef werd 300 Gr. der paraffine in bewerking genomen, terwijl een even groot gewicht aan steenen ter bevordering van eene goede menging in den autoclaaf werd gedaan, steeds werd bij ongeveer 435° gewerkt. In de tabel vindt men eenige der verkregen resultaten vereenigd, terwijl men in fig. 2 een voorbeeld vindt van de verandering van den druk gedurende het verloop der proefnemingen 33 en 34. Hoewel men bij proef 33, waarschijnlijk in verband met de hooge temperatuur, niet de typische, in onze vorige mededeeling vermelde, drukcurve volgens Bergius verkrijgt, is het verschil met de crackings-druklijnen toch nog zeer opvallend. Bij alle andere in de tabel aangegeven proefnemingen zijn de verkregen druklijnen analoog met die van nrs 33 en 34. De bij het Bergius-proces verkregen oliën waren geel tot rood gekleurd en volkomen doorschijnend, op den bodem zette zich eene geringe hoeveelheid koolstof af. De bij cracking verkregen oliën waren zeer donker van kleur en vrijwel ondoorzichtig. Ook hier krijgen we afscheiding van een weinig koolstof. De kleine hoeveelheid koolstof, die zich op den bodem afzet, vermeerderd met het gewicht aan koolstof, dat zich op de steenen reeds afzette, is, zoowel bij de cracking als bij de Bergius-methode, zoo gering, dat wij kunnen aannemen, dat practisch gesproken *bij beide processen* de *paraffine geheel in olie en gas is omgezet.*

Hierbij laten wij buiten beschouwing de proefnemingen nrs 35, 37 en 40, waar de duur der processen nog zoo gering was, dat het reactieproduct nog gedeeltelijk vast was gebleven. Bij deze proeven moest dan ook het verkregen product worden uitgesmolten.

Uit de verrichte proefnemingen blijkt:

1e. dat men volkomen te reproduceeren waarnemingen kan verkrijgen (vergelijk no. 35 en 37 en no. 46 en 48).

2e. indien de duur der proefnemingen lang genoeg is, wordt zoowel bij het cracking-, als bij het Bergius-proces de paraffine practisch geheel in vloeibare olie en gas omgezet.

3e. de opbrengsten aan benzine loopen bij beide processen niet veel uiteen.

4e. groot verschil bestaat er in den aard der bij de distillatie der verkregen oliën volgens Engler onstane residu's. Het S. G. hiervan is bij de berginiseeringsproeven altijd kleiner dan bij de overeenkomstige crackingsproefnemingen, hetgeen eene bevestiging is van soortgelijke waarnemingen van Bergius.

5e Uit den einddruk, in verband ook met de gasanalyse (per-

VERGELIJKING VAN BERGINISEERING EN CRACKING BIJ ± 435° C.

N°. van de proef.		Duur van het op temperatuur brengen in minuten	Duur van de eigenlijke proef in minuten	Begindruk in atmosferen	Maximumdruk gedurende de proef	Einddruk na volledige afkoeling	Verkregen olie in grammen	Broomgetal (additie)	Destillatie van de verkregen olie volgens ENGLER: Gew. % der gedestilleerde olie. tot 220°	tot 300°	residu > 300°	Verlies [2]).	S.G. residu 15°/15°.	Gassen. Hoeveelheid in Liter.	S.G. t/o van lucht.	Waterstof, percentage.
35	Berginiseering.	60	60	40	110.5	37.5	260 [1])	16.4	24.9	41.0	56.3	2.7	0.846	–	0.24	85.8
37		60	60	40	108.5	37.5	272 [1])	16.1	22.8	37.9	59.0	3.1	0.854	–	0.20	89.5
36		60	120	40	107	31	272	19.0	36.6	56.6	38.7	4.7	0.838	–	0.37	74.6
33		60	180	40	117	30	256	20.8	51.7	72.1	22.4	5.5	0.852		0.56	56.9
46		75	240	40	118	28	250	21.0	58.9	79.6	14.8	5.6	0.836	63	0.63	47.5
48		75	240	40	120	28	249	20.7	59.7	79.2	13.8	7.0	0.838	62.5	0.63	46.5
40	Cracking.	80	60	0 (Atmosferische druk)	30	± 2	271 [1])	21.6	23.0	39.0	60.1	0.9	0.854	—	0.99	—
45		70	120	0	51.5	< 4	270	27.6	41.9	63.7	32.0	4.3	0.855	—	0.80	—
34		60	180	0	71	5	246	26.1	56.1	76.5	17.5	6.0	0.900	—	1.10	2.3
49		75	240	0	72	7.5	238	23.9	56.8	76.9	16.2	6.9	0.902	29	0.94	3.7

[1]) Het verkregen product was nog vast en moest worden uitgesmolten, waardoor extra gewichtsverliezen ontstonden.
[2]) Behoort bij de laagste fractie.

centage waterstof) blijkt, dat bij het berginiseeren werkelijk aanzienlijke hoeveelheden waterstof worden opgenomen.

6e. Het door additie veroorzaakte broomgetal der door berginiseeren verkregen oliën is iets lager dan dat bij de overeenkomstige crackingsproeven. Het is echter zeer gevaarlijk uit dit broomgetal algemeene conclusies te trekken, immers opgeloste onverzadigde gassen kunnen een grooten invloed hebben op het halogeen-getal.

Het hier gegeven voorbeeld bewijst heel duidelijk, dat men voor de beoordeeling van het proces van Bergius niet kan volstaan met eene bepaling van opbrengst aan olie en gas uit eene vaste grondstof. Hiervoor is steeds noodig een vergelijkende crackingsproef. Eventueele resultaten gelden alleen voor de gevolgde wijze van werken, in dit geval voor het periodieke proces, de temperatuur bij de proefneming enz.

Het spreekt wel vanzelf, dat de techniek zich bij voorkeur van continu werkende processen zal bedienen. Als vaststaand kan echter worden aangenomen, dat bij de werkwijze van Bergius belangrijke hoeveelheden van buiten toegevoerde waterstof chemisch worden gebonden. Dit feit, gecombineerd met het niet opzettelijk toevoegen van katalysator, kan na de wetenschappelijke onderzoekingen van Sabatier c.s. betreffende het hydreeren van koolwaterstofdampen met katalysator en de technische harding van de vette oliën (Normann en anderen) als derde groote ontdekking op het gebied van hydreering worden beschouwd.

Delft, Laboratorium voor Chemische Technologie der Technische Hoogeschool.

Palaeontologie. — O. POSTHUMUS: „*Bijdragen tot de kennis der Palaeontologie van Nederland*[1]). I. *Otolieten van Teleostei uit het Oligoceen en Mioceen van het Peelgebied en van Winterswijk.*"

(Aangeboden door de Heeren J. C. SCHOUTE en J. W. MOLL).

Van de vischfauna der tertiaire afzettingen in Nederland was tot dusverre het voorkomen van een aantal Selachii bekend, en wel van het Oligoceen van Zuid-Limburg[2]), en van het Mioceen van Oostelijk Gelderland[3]) en van Overijssel[4]). Van de Teleostei waren nog geen overblijfselen bekend.

In materiaal, afkomstig van diepboringen van den Rijksopsporing van Delfstoffen op den Zuidelijken Peelhorst, en wel van boring 20 (Helden), van het Midden-Mioceen (75.4 — 80.4 M.), van boring 21 (Swalmen), van het Boven-Oligoceen (100 — 160 M.), en van het Midden-Mioceen (75 — 100 M.) afkomstig, evenals in materiaal van boring 22 (Liessel), eveneens van Midden-Mioceen ouderdom (100 — 190 M), kwamen een aantal otolieten voor, die ons in staat stellen een beeld te vormen van de vischfauna in de toenmalige Noordzee.

Bovendien stonden tot mijn beschikking eenige otolieten van proefboring U bij Winterswijk, uit de Septarienklei, en van het Midden-Mioceen, ontsloten in het bed der Slingerbeek bij laatstgenoemde plaats.

Aangetroffen werden de volgende soorten[5]):

Oligoceen.

Midden-Oligoceen (Septarienklei), Winterswijk.

Otolithus (Scopelus) pulcher, Prochazka.

---

1) In deze bijdragen hoop ik van tijd tot tijd materiaal te beschrijven, afkomstig van kleinere collecties.

2) W. C. H. STARING. De bodem van Nederland, 2e deel, Haarlem, 1860, p. 282.

3) Idem, p. 209, 210.

4) T. C. WINKLER. Catalogue systématique du Musée Teyler, 6me livr. 1867, p. 624.

5) Deze zullen binnenkort in een uitvoeriger verhandeling afgebeeld en beschreven worden.

Boven-Oligoceen, Swalmen.

Otolithus (Dentex) nobilis, Koken.
,, (Percidarum) limburgensis, nov. spec.
,, (Trachinus) mutabilis, Koken.
,, (Trigla) Schuberti, nov. spec.
,, (Scopelus) austriacus, Koken.
,, (Scopelus) pulcher, Prochazka.
,, (Gonostoma?) parvulus, Koken.
,, (Gonostoma?) angustus, nov. spec.
,, (Fierasfer) nuntius, Koken.
,, (Gadus) elegans, Koken.
,, (Merlangus) cognatus, Koken.

Mioceen.

Midden-Mioceen, Swalmen.

Otolithus (Percidarum) frequens, Koken.
,, (Trachinus) mutabilis, Koken.
,, (Trigla) rhombicus, Schubert.
,, (Gobius) aff. elegans, Prochazka.
, (Ophidiidarum) semiglobosus, nov. spec.
,, (Ophidiidarum) swalmensis, nov. spec.
, (Gonostoma?) parvulus, Koken.
,, (Solea) approximatus, Koken.
,, (Rhombus) rhenanus, Koken.
,, (incertae sedis) peelensis, nov. spec.

Midden-Mioceen, Helden.

Otolithus (Serranus) Noetlingi, Koken.
,, (Centropristis) integer, Schubert.
, (Dentex) nobilis, Koken.
,, (Percidarum) acuminatus, nov. spec.
,, (Trigla) Schuberti, nov. spec.
,, (Sciaenidarum) Staringi, nov. spec.
,, (Gonostoma) aff. gracilis, Prochazka.
,, (Clupea) testis, Koken.
,, (Clupea) Priemi, nov. spec.
,, (Gadus) elegans, Koken.
,, (Phycis) elongatus, nov. spec.
,, (incertae sedis) Mariae, Schubert.
,, (incertae sedis) peelensis, nov. spec.

Midden-Mioceen, Liessel.

Otolithus (Dentex) nobilis, Koken.
,, (Percidarum) frequens, Koken.
,, (Percidarum) Liesselensis, nov. spec.
,, (Scopelus) austriacus, Koken.
,, (Scopelus) pulcher, Prochazka.
,, (Gonostoma?) parvulus, Koken.
,, (Clupea) testis, Koken.
,, (Fierasfer) nuntius, Koken.
,, (Gadus) elegans, Koken.
,, (Merluccius) emarginatus, Koken.
,, (Phycis) elongatus, nov. spec.
,, (Hymenocephalus) globosus, nov. spec.
,, (Hymenocephalus) medius, nov. spec.
,, (Hymenocephalus) ovalis, nov. spec.
,, (Hymenocephalus) Brinki, nov. spec.
,, (Hymenocephalus) dubius, nov. spec.
,, (Macrurus) pusillus, nov. spec.
,, (Macrurus) ellipticus, Schubert.
,, (Macrurus) debilis, nov. spec.

Midden-Mioceen, Winterswijk.

Otolithus (Gadus) elegans, Koken.

De fauna van het Boven-Oligoceen van Swalmen is gekenmerkt door de afwezigheid van kustvormen; de voorkomende visschen leven pelagisch, en wel als b.v. Dentex, vooral in hoogere waterlagen, of als de Scopelidae, vooral op grootere diepte. Waarschijnlijk zal de diepte ongeveer 400 M. geweest zijn, en is men hier op een punt, op vrij grooten afstand van de kust gelegen. Dit is in overeenstemming met de bekende gegevens, het Boven Oligoceen is n.l. in erosieresten bekend tot ongeveer de lijn Luik—Aken—Keulen.

Van het Midden-Mioceen zijn bekend de gegevens van 3 in een ongeveer rechte ongeveer ZO—NW gerichte lijn op den Zuidelijken Peelhorst gelegen punten. In het Zuidelijkste dezer, bij Swalmen, valt direct het voorkomen op van de geslachten Rhombus, Solea en Gobius, alle kustvormen, die wij niet aantreffen in het materiaal van het ongeveer 20 K.M. verder gelegen Helden, waar wel Clupea, Serranus en Dentex voorkomen; deze vinden wij eveneens bij het ongeveer 18 K.M. verder in Noord-Brabant gelegen Liessel, waar echter de Macruridae en de Scopelideae in het materiaal overheerschen. Naar de vischresten te oordeelen, is men bij Swalmen niet

ver van de toenmalige kustlijn verwijderd, bij Helden vertoont de fauna het karakter van die van een weinig diepe zee, terwijl de in het materiaal van Liessel voorkomende resten van Macruridae van diepzeevormen afkomstig zijn, zoodat wij hier een grootere diepte, van ongeveer 1000 M., moeten aannemen. Deze conclusie is in overeenstemming met de resultaten van de onderzoekingen van de Rijksopsporing van Delfstoffen: de grens van het continentale en het mariene Mioceen loopt ongeveer over Swalmen; de bruinkoolformatie wordt bij Melick-Herckenbosch en bij Vlodrop aangetroffen, terwijl in het profiel van de diepboring 21 de onderste lagen van het Mioceen marien zijn, terwijl de bovenste een limnische facies vertoonen. Belangwekkend lijkt mij een nader onderzoek van materiaal uit de Groote Slenk ten Zuidwesten van den Peelhorst.

De samenstelling van de tertiare vischfauna van dit gebied wijkt af van de recente fauna der Noordzee, eenerzijds door het voorkomen van vormen, die op grootere diepte leven dan men tegenwoordig in de Noordzee aantreft, zooals de Scopelidae en de Macruridae, die in den Atlantischen Oceaan op hooge breedte kunnen voorkomen, anderzijds treffen er wij geslachten in aan als Dentex, Centropristis en Serranus, die tegenwoordig op lagere breedte leven. Hun aanwezigheid is m. i. een bewijs voor een verandering van het milieu, waarbij niet is uit te maken, of wij deze direct aan klimaatswijziging, dan wel aan andere omstandigheden, bijv. aan een veranderde richting der zeestroomen moeten toeschrijven.

Tenslotte betuig ik mijn hartelijken dank aan Prof. Dr. J. H. Bonnema, die het materiaal, dat zich in het Mineralogisch-Geologisch Instituut der Rijksuniversiteit te Groningen bevindt, welwillend ter mijner beschikking heeft gesteld.

Wiskunde. — M. J. BELINFANTE: „*Een generalisatie van de stelling van* MERTENS".

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

Nu de theorie der oneindige reeksen, die vroeger hoofdzakelijk beperkt was tot convergente reeksen, uitgebreid is met de zoogenaamde sommeerbare en asymptotische reeksen, ligt het voor de hand, de vroeger gevonden stellingen voor convergente reeksen zooveel mogelijk te generaliseeren voor genoemde categorieën.

Voor het bekende theorema van MERTENS is dit geschied door HARDY (BROMWICH, Theory of Infinite Series, p. 284), waarbij de sommatiemethode van BOREL is ten grondslag gelegd. Hier zal een eenigszins andere generalisatie worden behandeld, waarbij uitsluitend sprake is van de sommatiemethode volgens CESARÓ.

Onder de productreeks of kortweg het product van de beide oneindige reeksen

$$a_1 + a_2 + \ldots \quad \text{en} \quad b_1 + b_2 + \ldots$$

wordt verstaan de reeks $c_1 + c_2 + \ldots$

waarin $c_i = a_1 b_i + a_2 b_{i-1} + \ldots + a_i b_1$.

CESARÓ bewees dat als twee reeksen convergent zijn, haar product zeker sommeerbaar is van de eerste orde, en dat als twee reeksen sommeerbaar zijn respectievelijk van de p^{de} en q^{de} orde, haar product zeker sommeerbaar is van de $(p+q+1)^{de}$ orde [1]).

Noemen we een convergente reeks sommeerbaar van de nulde orde, dan is het eerste gedeelte begrepen in het tweede.

Het theorema van MERTENS, hetwelk luidt: „indien van twee convergente reeksen één absoluut convergeert, dan is haar product convergent" kan dan als volgt geformuleerd worden:

Het product van een absoluut convergente reeks met een reeks, die sommeerbaar is van de nulde orde, is sommeerbaar van de nulde orde.

In de eerste plaats ligt nu de volgende generalisatie voor de hand:

Theorema 1: *Het product van een absoluut convergente reeks met een, die sommeerbaar is van de p^{de} orde, is sommeerbaar van de p^{de} orde.*

---

[1]) BROMWICH. Theory of infinite series, § 125 pp. 314—316.

Verder kunnen we ons afvragen welke eisch aan een reeks, die sommeerbaar is van de p^{de} orde, moet gesteld worden opdat het product met een convergente reeks sommeerbaar zij van de p^{de} orde. Dit blijkt uit:

Theorema 2: Het product van een convergente reeks met een reeks, die sommeerbaar is van de p^{de} orde en waarvan de middelwaarden van de $(p-1)^{ste}$ orde begrensd zijn, is sommeerbaar van de p^{de} orde.

Ten slotte kunnen we nog het product beschouwen van twee reeksen, die sommeerbaar zijn van de p^{de} en q^{de} orde, en worden dan gevoerd tot:

Theorema 3: Het product van een reeks, die sommeerbaar is van de p^{de} orde en waarvan de middelwaarden van de $(p-1)^{ste}$ orde begrensd zijn, met een reeks, die sommeerbaar is van de q^{de} orde, is sommeerbaar van de $(p+q)^{de}$ orde.

Noemen we een reeks samenvoegbaar van de p^{de} orde $(p \geq 1)$ als zij sommeerbaar is van de p^{de} orde en haar middelwaarden van de $(p-1)^{ste}$ orde begrensd zijn, noemen we verder een reeks samenvoegbaar van de nulde orde als zij absoluut convergeert, dan zijn de drie theorema's bevat in het

Theorema: Het product van een reeks, die samenvoegbaar is van de p^{de} orde met een reeks, die sommeerbaar is van de q^{de} orde, is sommeerbaar van de $(p+q)^{de}$ orde.

De bewijzen van de drie theorema's zullen echter afzonderlijk gevoerd worden. Volledigheidshalve leiden we eerst eenige grootendeels bekende formules af.

Is $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots . x_n^{(1)}, \ldots .$

een willekeurige fundamentaalreeks van willekeurige complexe getallen dan definieeren we:

$$x_n^{(2)} = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + \ldots . + x_n^{(1)} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$x_n^{(k+1)} = x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + \ldots . + x_n^{(k)} \quad \ldots . \quad (2)$$

Onder de grootheden $A_i^{(k)}$ verstaan we degene, die verkregen worden door voor elke i $x_i^{(1)} = 1$ te stellen. Gemakkelijk is te verifieeren dat:

$$A_n^{(k)} = \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!\,(k-1)!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Verder worden beschouwd de reeksen $a_1 + a_2 + \ldots .$ en $b_1 + b_2 + \ldots .$ benevens haar productreeks $c_1 + c_2 + \ldots .$ (waarbij dus $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots . + a_n b_1$) en stellen we:

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)}_n &= s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;. \\ T^{(1)}_n &= t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \;. \\ W^{(1)}_n &= w_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \;. \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

waardoor nu ook $S^{(k)}_n$, $T^{(k)}_n$ en $W^{(k)}_n$ bepaald zijn.

Nu geldt, onverschillig welke reeksen beschouwd worden, de formule:

$$S^{(p)}_1 T^{(q)}_n + S^{(p)}_2 T^{(q)}_{n-1} + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q)}_1 = S^{(p-i)}_1 T^{(q+i)}_n + \ldots + S^{(p-i)}_n T^{(q+i)}_1 \quad (4)$$

indien $p-i \geqq 1$. Dit volgt direct met behulp van inductie, daar

$$S^{(p)}_1 T^{(q)}_n + S^{(p)}_2 T^{(q)}_{n-1} + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q)}_1 =$$

$$= S^{(p-1)}_1 T^{(q)}_n + (S^{(p-1)}_1 + S^{(p-1)}_2)\, T^{(q)}_{n-1} + \ldots + (S^{(p-1)}_1 + \ldots + S^{(p-1)}_n) T^{(q)}_1 =$$

$$= S^{(p-1)}_1 (T^{(q)}_n + \ldots + T^{(q)}_1) + S^{(p-1)}_2 (T^{(q)}_{n-1} + \ldots + T^{(q)}_1) + \ldots + S^{(p-1)}_n T^{(q)}_1 =$$

$$= S^{(p-1)}_1 T^{(q+1)}_n + S^{(p-1)}_2 T^{(q+1)}_{n-1} + \ldots + S^{(p-1)}_n T^{(q+1)}_1 .$$

Evenzoo bewijzen we met inductie:

$$W^{(p+q)}_n = S^{(p)}_1 T^{(q)}_n + S^{(p)}_2 T^{(q)}_{n-1} + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q)}_1 \;. \quad . \quad . \quad (5)$$

Immers uit (5) volgt:

$$W^{(p+q+1)}_n = W^{(p+q)}_n + W^{(p+q)}_{n-1} + \ldots + W^{(p+q)}_1$$

$$= [S^{(p)}_1 T^{(q)}_n + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q)}_1] + [S^{(p)}_1 T^{(q)}_{n-1} + \ldots + S^{(p)}_{n-1} T^{(q)}_1] + \ldots + S^{(p)}_1 T^{(q)}_1$$

$$= S^{(p)}_1 [T^{(q)}_n + \ldots + T^{(q)}_1] + S^{(p)}_2 [T^{(q)}_{n-1} + \ldots + T^{(q)}_1] + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q)}_1 =$$

$$= S^{(p)}_1 T^{(q+1)}_n + S^{(p)}_2 T^{(q+1)}_{n-1} + \ldots + S^{(p)}_n T^{(q+1)}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

en de formule is, zooals gemakkelijk blijkt, geldig voor $p=1$, $q=1$.

Ten slotte volgt uit:

$$W^{(p+1)}_n = S^{(1)}_1 T^{(p)}_n + S^{(1)}_2 T^{(p)}_{n-1} + \ldots + S^{(1)}_n T^{(p)}_1 \;. \quad . \quad . \quad (6)$$

met behulp van de formule: $S^{(1)}_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$W^{(p+1)}_n = a_1 T^{(p)}_n + (a_1 + a_2)\, T^{(p)}_{n-1} + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, T^{(p)}_1$$

$$= a_1 [T^{(p)}_n + T^{(p)}_{n-1} + \ldots + T^{(p)}_1] + a_2 [T^{(p)}_{n-1} + \ldots + T^{(p)}_1] + \ldots + a_n T^{(p)}_1$$

dus

$$W^{(p+1)}_n = a_1 T^{(p+1)}_n + a_2 T^{(p+1)}_{n-1} + \ldots + a_n T^{(p+1)}_1 \;. \quad . \quad . \quad (7)$$

Onder de n^{de} middelwaarde van de p^{de} orde van de reeks $a_1 + a_2 + \ldots$ resp. $b_1 + b_2 + \ldots$ wordt nu verstaan de uitdrukking:

$$\frac{S^{(p+1)}_n}{A^{(p+1)}_n} \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{T^{(p+1)}_n}{A^{(p+1)}_n} .$$

Heeft deze middelwaarde voor toenemende n een limiet, dan heet de reeks sommeerbaar van de p^{de} orde [1]).

Dat uit de sommeerbaarheid van de p^{de} orde (en evenzeer uit de convergentie) eener reeks direct volgt de sommeerbaarheid van de $(p+i)^{de}$ orde tot dezelfde „som" indien $i \geqq 1$, is een bekende stelling [2]).

Bewijs van theorema 1.

Zij de reeks $a_1 + a_2 + \ldots.$ absoluut convergent en haar som s, zij de reeks $b_1 + b_2 + \ldots.$ sommeerbaar van de p^{de} orde, dus $\lim\limits_{n=\infty} . \dfrac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = t$ dan moet bewezen worden:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = s \, . \, t$$

We hebben voor $W_n^{(p+1)}$ de uitdrukking:

$$W_n^{(p+1)} = a_1 \, T_n^{(p+1)} + a_2 \, T_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + a_n \, T_1^{(p+1)} \quad . \quad . \quad (7)$$

Stel $h_n = \dfrac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} - t$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$. Substitutie van

$$T_n^{(p+1)} = tA_n^{(p+1)} + h_n \, A_n^{(p+1)}$$

in formule (7) geeft:

$$W_n^{(p+1)} =$$
$$= a_1 A_n^{(p+1)} t + a_1 A_n^{(p+1)} h_n + a_2 A_{n-1}^{(p+1)} t + a_2 A_{n-1}^{(p+1)} h_{n-1} + \ldots + a_n A_1^{(p+1)} t + a_n A_1^{(p+1)} h_1$$
$$= t \, [a_1 \, A_n^{(p+1)} + a_2 \, A_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + a_n \, A_1^{(p+1)}] +$$
$$+ [a_1 \, A_n^{(p+1)} \, h_n + a_2 \, A_{n-1}^{(p+1)} \, h_{n-1} + \ldots + a_n \, A_1^{(p+1)} \, h_1] \, .$$
$$= P + Q \, .$$
$$P = t \, [a_1 \, A_n^{(p+1)} + a_2 \, A_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + a_n \, A_1^{(p+1)}] =$$
$$= t \, [s_1 \, A_n^{(p+1)} + (s_2 - s_1) \, A_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) \, A_1^{(p+1)}] =$$
$$= t \, [s_1 \, (A_n^{(p+1)} - A_{n-1}^{(p+1)}) + s_2 \, (A_{n-1}^{(p+1)} - A_{n-2}^{(p+1)}) + \ldots + s_n \, A_1^{(p+1)}] =$$
$$= t \, [s_1 \, A_n^{(p)} + s_2 \, A_{n-1}^{(p)} + \ldots + s_n \, A_1^{(p)}]$$
$$= t \, [S_1^{(1)} \, A_n^{(p)} + S_2^{(1)} \, A_{n-1}^{(p)} + \ldots + S_n^{(1)} \, A_1^{(p)}]$$
$$= t \, [S_1^{(p)} \, A_n^{(1)} + S_2^{(p)} \, A_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_n^{(p)} \, A_1^{(1)}]$$
$$= t \, [S_1^{(p)} + S_2^{(p)} + \ldots + S_n^{(p)}]$$
$$= t \; S_n^{(p+1)}.$$

[1]) In de hier gegeven definities krijgt de eerste term der reeksen de index 1 en niet 0 zooals vaak gedaan wordt.

[2]) Bromwich. l.c. (p 312).

Dus $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{P}{A_n^{(p+1)}} = t \,.\, \lim\limits_{n=\infty} . \dfrac{S_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = t \,.\, s$ daar $a_1 + a_2 + \ldots$ absoluut convergeert en derhalve sommeerbaar is van de p^{de} orde.

$$Q = a_1 A_n^{(p+1)} h_n + a_2 A_{n-1}^{(p+1)} h_{n-1} + \ldots + a_n A_1^{(p+1)} h_1$$
$$= a_1 h_n [A_1^{(p)} + A_2^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)}] + a_2 h_{n-1} [A_1^{(p)} + \ldots + A_{n-1}^{(p)}] + \ldots + a_n h_1 A_1^{(p)}$$
$$= A_1^{(p)} [a_1 h_n + a_2 h_{n-1} + \ldots + a_n h_1] + A_2^{(p)} [a_1 h_n + \ldots + a_{n-1} h_2] + \ldots + A_n^{(p)} a_1 h_n$$

Daar $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$ kan M_k zoo gekozen worden, dat $|h_{k+i}| < M_k$ voor $i = 1, 2, \ldots$ terwijl $\lim\limits_{k=\infty} . M_k = 0$; zij verder $\sigma_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ en $\lim\limits_{n=\infty} . \sigma_n = \sigma$, dan geldt:

$$|Q| < A_1^{(p)} [|a_1| . |h_n| + |a_2| . |h_{n-1}| + \ldots + |a_n| . |h_1|] +$$
$$+ A_2^{(p)} [|a_1| . |h_n| + \ldots + |a_{n-1}| . |h_2|] . + \ldots + A_n^{(p)} . |a_1| . |h_n|$$
$$< A_1^{(p)} M_1 [|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|] + A_2^{(p)} M_2 [|a_1| + \ldots + |a_{n-1}|] + \ldots + A_n^{(p)} M_n |a_1|$$
$$< A_1^{(p)} M_1 \sigma_n + A_2^{(p)} M_2 \sigma_{n-1} + \ldots + A_n^{(p)} M_n \sigma_1$$
$$< \sigma [A_1^{(p)} M_1 + A_2^{(p)} M_2 + \ldots + A_n^{(p)} M_n].$$

Bij elk positief getal ε is k te bepalen, zoodat $M_{k+i} < \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$; is verder M zoo gekozen dat $M_i < M$ voor iedere $i \geq 1$, dan geldt voor $n > k$:

$$|Q| < \sigma [A_1^{(p)} M_1 + \ldots + A_k^{(p)} M_k] + \varepsilon [A_{k+1}^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)}]$$
$$< M \sigma [A_1^{(p)} + \ldots + A_k^{(p)}] + \varepsilon [A_n^{(p+1)} - A_k^{(p+1)}]$$

dus

$$\left| \frac{Q}{A_n^{(p+1)}} \right| < M \sigma \frac{A_k^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} + \varepsilon \,.\, \frac{A_n^{(p+1)} - A_k^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}}$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} . \frac{A_k^{(p)}}{A_n^{(p)}} = 0 \text{ want } \lim_{n=\infty} . A_n^{(p)} = \infty \text{ omdat } A_n^{(p)} > A_n^{(2)} = n.$$

Hieruit volgt dat als n voldoende groot gekozen wordt:

$$\left| \frac{Q}{A_n^{(p+1)}} \right| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

en daar ε willekeurig is volgt hieruit: $\lim\limits_{n=\infty} . \dfrac{Q}{A_n^{(p+1)}} = 0.$

Derhalve:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = \lim_{n=\infty} . \frac{P+Q}{A_n^{(p+1)}} = \lim_{n=\infty} . \frac{P}{A_n^{(p+1)}} + \lim_{n=\infty} . \frac{Q}{A_n^{(p+1)}} = s \,.\, t.$$

Bewijs van theorema 2.

Zij de reeks $a_1 + a_2 + \ldots$ convergent (som $= s$) en de reeks $b_1 + b_2 + \ldots$ sommeerbaar van de p^{de} orde (som $= t$), terwijl haar middelwaarden van de $(p-1)^{ste}$ orde begrensd zijn, dan moet bewezen worden:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = s . t$$

Zij $S_n^{(1)} = s_n = s + h_n$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} . h_n = 0$ en

$$W_n^{(p+1)} = S_1^{(1)} T_n^{(p)} + S_2^{(1)} T_{n-1}^{(p)} + \ldots + S_n^{(1)} T_1^{(p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

$$= (s + h_1) T_n^{(p)} + (s + h_2) T_{n-1}^{(p)} + \ldots + (s + h_n) T_1^{(p)}$$

$$= s[T_n^{(p)} + T_{n-1}^{(p)} + \ldots + T_1^{(p)}] + [h_1 T_n^{(p)} + h_2 T_{n-1}^{(p)} + \ldots + h_n T_1^{(p)}]$$

$$= R + S .$$

$$R = s\,[T_n^{(p)} + T_{n-1}^{(p)} + \ldots + T_1^{(p)}] = s T_n^{(p+1)}$$

$$\frac{R}{A_n^{(p+1)}} = s . \frac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}}.$$

Daar de reeks $b_1 + b_2 + \ldots$ sommeerbaar is van de p^{de} orde, is $\lim\limits_{n=\infty} . \dfrac{R}{A_n^{(p+1)}} = s . t$ (immers $= s . \lim\limits_{n=\infty} . \dfrac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}}$).

$$S = h_1 T_n^{(p)} + h_2 T_{n-1}^{(p)} + \ldots + h_n T_1^{(p)}.$$

Daar de middelwaarden van de orde $(p-1)$ begrensd zijn, is M te berekenen, zoodat:

$$\left| \frac{T_n^{(p)}}{A_n^{(p)}} \right| < M. \text{ Derhalve:}$$

$$|S| < M\,[\,|h_1|\, A_n^{(p)} + |h_2|\, A_{n-1}^{(p)} + \ldots + |h_n|\, A_1^{(p)}]. \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Stel $|h_n| = H_n^{(1)}$ dan is blijkens formule (4)

$$|h_1| A_n^{(p)} + |h_2| A_{n-1}^{(p)} + \ldots + |h_n| A_1^{(p)} =$$

$$= H_1^{(1)} A_n^{(p)} + H_2^{(1)} A_{n-1}^{(p)} + \ldots + H_n^{(1)} A_1^{(p)}$$

$$= H_1^{(p)} A_n^{(1)} + H_2^{(p)} A_{n-1}^{(1)} + \ldots + H_n^{(p)} A_1^{(1)}$$

$$= H_1^{(p)} + H_2^{(p)} + \ldots + H_n^{(p)} = H_n^{(p+1)}$$

De ongelijkheid (8) is nu te schrijven:

$$|\,S\,| < M . H_n^{(p+1)}$$

derhalve:

$$\frac{|S|}{A_n^{(p+1)}} < M \frac{H_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}}$$

Daar $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{(1)} = 0$ zal ook $\lim\limits_{n=\infty} . \frac{H_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = 0$ dus $\lim\limits_{n=\infty} . \frac{S}{A_n^{(p+1)}} = 0.$

Derhalve :

$$\lim_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = \lim_{n=\infty} . \frac{R}{A_n^{(p+1)}} + \lim_{n=\infty} . \frac{S}{A_n^{(p+1)}} = s \,.\, t.$$

Bewijs van theorema 3.

Zij $a_1 + a_2 + \ldots$ sommeerbaar van de p^{de} orde, terwijl de middelwaarden van de $(p-1)^{ste}$ orde begrensd zijn, dan is er een getal M te berekenen, zoodat:

$$\frac{\left| S_n^{(p)} \right|}{A_n^{(p)}} < M \text{ terwijl } \lim_{n=\infty} . \frac{S_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = s.$$

Zij verder $b_1 + b_2 + \ldots$ sommeerbaar van de q^{de} orde, dus:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{T_n^{(q+1)}}{A_n^{(q+1)}} = t.$$

Nu is te bewijzen: $\lim\limits_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+q+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = s \,.\, t$

$$W_n^{(p+q+1)} = S_1^{(p)} T_n^{(q+1)} + S_2^{(p)} T_{n-1}^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p)} T_1^{(q+1)} \quad . \quad (5a)$$

Stel $\frac{T_n^{(q+1)}}{A_n^{(q+1)}} = t + h_n$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} . h_n = 0$

$$W_n^{(p+q+1)} = S_1^{(p)} [tA_n^{(q+1)} + h_n A_n^{(q+1)}] + \ldots + S_n^{(p)} [t\, A_1^{(q+1)} + h_1 A_1^{(q+1)}]$$
$$= t\,[S_1^{(p)} A_n^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p)} A_1^{(q+1)}] + [S_1^{(p)} h_n A_n^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p)} h_1 A_1^{(q+1)}]$$
$$= U + V.$$

$$U = t\,[S_1^{(p)} A_n^{(q+1)} + S_2^{(p)} A_{n-1}^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p)} A_1^{(q+1)}]$$
$$= t\,[S_1^{(p+q)} A_n^{(1)} + S_2^{(p+q)} A_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_n^{(p+q)} A_1^{(1)}]$$
$$= t\,[S_1^{(p+q)} + S_2^{(p+q)} + \ldots + S_n^{(p+q)}] = t \,.\, S_n^{(p+q+1)}$$

$$\frac{U}{A_n^{(p+q+1)}} = t \frac{S_n^{(p+q+1)}}{A_n^{(p+q+1)}}$$

Daar $\lim\limits_{n=\infty} . \frac{S_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} = s$, volgt hieruit:

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{U}{A_n^{(p+q+1)}} = s \, . \, t$$

$$V = S_1^{(p)} h_n A_n^{(q+1)} + S_2^{(p)} h_{n-1} A_{n-1}^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p)} h_1 A_1^{(q+1}$$

Uit $\dfrac{|S_i^{(p)}|}{A_i^{(p)}} < M$ voor iedere i, volgt nu:

$$|V| < M[A_1^{(p)} A_n^{(q+1)} |h_n| + A_2^{(p)} A_{n-1}^{(q+1)} |h_{n-1}| + \ldots + A_n^{(p)} A_1^{(q+1)} |h_1|]$$

dus voor iedere k tusschen 1 en n:

$$|V| < M[A_1^{(p)} A_n^{(q+1)} |h_n| + \ldots + A_{n-k}^{(p)} A_{k+1}^{(q+1)} |h_{k+1}|] +$$
$$+ M[A_{n-k+1}^{(p)} A_k^{(q+1)} |h_k| + \ldots + A_n^{(p)} A_1^{(q+1)} |h_1|].$$

Bij elk willekeurig gekozen positief getal ε is nu k te berekenen, zoodat $|h_{k+i}| < \dfrac{\varepsilon}{M}$; voorts is een getal μ te berekenen, zoodat $|h_i| < \mu$. Voor $n > k$ geldt dan:

$$|V| < \varepsilon[A_1^{(p)} A_n^{(q+1)} + \ldots + A_{n-k}^{(p)} A_{k+1}^{(q+1)}] + M\mu[A_{n-k+1}^{(p)} A_k^{(q+1)} + \ldots + A_n^{(p)} A_1^{(q+1)}]$$

of, daar

$$A_1^{(p)} A_n^{(q+1)} + A_2^{(p)} A_{n-1}^{(q+1)} + \ldots + A_n^{(p)} A_1^{(q+1)} = A_n^{(p+q+1)} \text{ en } A_i^{(j)} \geqq A_{i-1}^{(j)}$$

$$|V| < \varepsilon A_n^{(p+q+1)} + M\mu A_k^{(q+1)} [A_{n-k+1}^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)}]$$
$$< \varepsilon A_n^{(p+q+1)} + M\mu A_k^{(q+1)} A_n^{(p+1)}.$$

dus:

$$\frac{|V|}{A_n^{(p+q+1)}} < \varepsilon + M\mu A_k^{(q+1)} \cdot \frac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}}.$$

Voor $q \geqq 1$ is $\lim_{n=\infty} \cdot \dfrac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = 0$ want:

$$\frac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!} \times \frac{(n-1)!\,(p+q)!}{(n+p+q-1)!}$$
$$= \frac{(p+q)!}{p!} \times \frac{(n+p-1)!}{(n+p+q-1)!}$$
$$\leqq \frac{(p+q)!}{p!} \times \frac{(n+p-1)!}{(n+p+1-1)!} \text{ dus} \leqq \frac{(p+q)!}{p!} \times \frac{1}{(n+p)}$$

Voor voldoend groote n geldt dus:

$$\frac{|V|}{A_n^{(p+q+1)}} < \varepsilon + \varepsilon.$$

Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt hieruit:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{V}{A_n^{(p+q+1)}} = 0.$$

Derhalve:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{W_n^{(p+q+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{U}{A_n^{(p+q+1)}} + \lim_{n=\infty} \frac{V}{A_n^{(p+q+1)}} = s \, . \, t.$$

Opmerking 1.

Omtrent de draagwijdte van deze theorema's zij het volgende opgemerkt:

K. Knopp [1]) en S. Chapman [2]) hebben door invoering van middelwaarden, waarvan de orde niet geheel is, nadere beperking opgelegd aan de orde van sommeerbaarheid van het product van twee reeksen, die van de p^{de} en q^{de} orde sommeerbaar zijn. Dat er gevallen zijn, waarin door de bewezen theorema's meer resultaat bereikt wordt, blijkt uit het volgende voorbeeld:

De reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ is sommeerbaar van de eerste orde, terwijl haar middelwaarden van de orde 0 begrensd zijn. Volgens theorema 3 is dus het product van deze reeks met een willekeurige reeks, die sommeerbaar is van de p^{de} orde, sommeerbaar van de $(p+1)^{de}$ orde.

Volgens Chapman (l. c.) is de zoogenaamde index van sommeerbaarheid van de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ gelijk aan nul, terwijl die van de andere reeks niet grooter kan zijn dan p, zoodat de index van het product niet grooter kan zijn dan $p + 1$, waaruit volgt dat de minimale orde van sommeerbaarheid van dit product niet grooter is dan $p + 2$, terwijl theorema 3 als bovenste grens gaf $p + 1$.

Opmerking 2.

Door Hardy [3]) is, behalve de in den aanhef van dit opstel gememoreerde generalisatie van de stelling van Mertens een geheel andere gegeven, die de stelling van Mertens als bijzonder geval bevat, n.l.:

Is Σa_n een absoluut convergente reeks ($som = s$), en oscilleert de reeks Σb_n tusschen de waarden t_1 en t_2, terwijl $\lim_{n=\infty} . b_n = 0$, dan oscilleert het product dezer reeksen tusschen de waarden $s . t_1$ en $s . t_2$.

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft 1907 (p. 1—12).

[2]) Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2 Vol. 9 (p. 369—409).

[3]) Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2 Vol. 6 (p. 410—423).

Hierbij zijn de termen a_i en b_i blijkbaar reëel ondersteld, waardoor de stelling van MERTENS ook alleen voor reeksen met reëele termen een bijzonder geval van deze stelling is.

We zullen echter zien dat de bewijsvoering van Hardy ook geldig is voor de volgende uitbreiding op reeksen met complexe termen: [1])

Theorema 4: Is Σa_n *een absoluut convergente reeks met som s en is* $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ *begrensd, terwijl* $\lim_{n=\infty} . b_n = 0$, *dan schommelt het product van de reeksen* Σa_n *en* Σb_n *op den duur over hetzelfde waardegebied als de reeks* $s . \Sigma b_n$.

Hiermede bedoelen we dat bij elk positief getal ε een getal μ en een positief getal a te berekenen zijn met de eigenschap, dat bij elk getal $n > \mu$ een getal m te berekenen is, zoodat (in de notatie 3a uitgedrukt):

$$| w_n - s . t_m | < \varepsilon \text{ en } | n - m | < a$$

en ook omgekeerd bij elk getal $m > \mu$ een getal n te berekenen is, zoodat aan dezelfde betrekking voldaan is.

(de notatie is dezelfde als die bij de vorige theorema's gebruikt is).

Ten slotte zullen we nog een theorema bewijzen, dat theorema 1 als bijzonder geval bevat en analoog is met theorema 4, n.l.:

Theorema 5: Is Σa_n *een absoluut convergente reeks met som s, zijn de middelwaarden van de* p^{de} *orde van* Σb_n *begrensd, terwijl de middelwaarden van de* $(p\text{-}1)^{ste}$ *orde (die we voorstellen door* $U_i^{(p)}$*) voldoen aan de betrekking*:

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_n^{(p)}}{n} = 0$$

dan schommelt de middelwaarde van de p^{de} *orde van het product der reeksen* Σa_n *en* Σb_n *op den duur over hetzelfde waardegebied als* $s . U_n^{(p+1)}$.

Hiermede wordt weer bedoeld dat bij elk positief getal ε een getal μ en een positief getal a te berekenen zijn met de eigenschap, dat bij elk getal $n > \mu$ een getal m te berekenen is, zoodat:

$$\left| \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} - s . U_m^{(p+1)} \right| < \varepsilon \quad \text{en} \quad |n - m| < a$$

en ook omgekeerd bij elk getal $m > \mu$ een getal n te berekenen is, zoodat aan dezelfde betrekking voldaan is.

[1]) Of HARDY ook reeksen met complexe termen beschouwd heeft, blijkt niet uit zijn artikel, daar het gedeelte dat aan het bedoelde theorema voorafgaat handelt over reeksen met reëele termen en zijn formuleering van het theorema m. i. ook aan reëele termen doet denken, terwijl toch zijn bewijsvoering onveranderd doorgaat voor reeksen met complexe termen.

Bewijs van theorema 4.

Stellen we in formule (7) $p = 1$ en vervangen we $W_i^{(1)}$ en $T_i^{(1)}$ respectievelijk door w_i en t_i, dan krijgen we:

$$w_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + \ldots + a_n t_1$$

Voor iedere k tusschen 1 en n geldt dan:

$$w_n = [a_1 t_n + \ldots + a_k t_{n-k+1}] + [a_{k+1} t_{n-k} + \ldots + a_n t_1] = P + Q.$$

Zij $|t_i| < t$ en $|s_i| < \sigma$. Bij elk positief getal ε is nu k te berekenen, zoodat:

$$|a_{k+1}| + \ldots + |a_{k+p}| < \frac{\varepsilon}{3t};$$

dan is ook $|s - s_k| < \frac{\varepsilon}{3t}$ en $|Q| = |a_{k+1} t_{n-k} + \ldots + a_n t_1| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\begin{aligned} P &= a_1 t_n + \ldots + a_k t_{n-k+1} = a_1 (b_1 + \ldots + b_n) + \ldots + a_k (b_1 + \ldots + b_{n-k+1}) \\ &= (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-k}) \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + b_n s_1 + b_{n-1} s_2 + \ldots + b_{n-k+1} s_k \cdot \\ &= t_{n-k} s_k + R \text{ als } R = b_n s_1 + \ldots + b_{n-k+1} s_k. \end{aligned}$$

Nu is μ te berekenen, zoodat voor $n > \mu$, $|b_{n-k+i}| < \frac{\varepsilon}{3k\sigma}$; dan is voor $n > \mu$, $|R| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Verder geldt: $s_k t_{n-k} = s t_{n-k} - (s - s_k) \cdot t_{n-k}$.

Daar weer $|(s - s_k) \cdot t_{n-k}| < \frac{\varepsilon}{3}$ (zie boven), geldt voor $n < \mu$:

$$|P - s \cdot t_{n-k}| < \frac{2\varepsilon}{3} \text{ en wijl ook } |Q| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ en } w_n = P + Q$$

$|w_n - s \cdot t_{n-k}| < \varepsilon$.

Er is dus inderdaad bij elk positief getal ε een getal μ te berekenen, dat aan de eischen voldoet.

Bewijs van theorema 5.

We hebben voor $W_n^{(p+1)}$ de uitdrukking:

$$W_n^{(p+1)} = a_1 T_n^{(p+1)} + a_2 T_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + a_n T_1^{(p+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Voor iedere k tusschen 1 en n geldt dus:

$$W_n^{(p+1)} = [a_1 T_n^{(p+1)} + \ldots + a_k T_{n-k+1}^{(p+1)}] + [a_{k+1} T_{n-k}^{(p+1)} + \ldots + a_n T_1^{(p+1)}]$$
$$= P + Q.$$

Zij $\frac{\left|T_i^{(p+1)}\right|}{A_i^{(p+1)}} < t$ en $|s_i| < \sigma$. Bij elk positief getal ε is nu k te

berekenen, zoodat $|a_{k+1}| + \dots + |a_{k+p}| < \frac{\varepsilon}{3t}$ voor willekeurige p.

Alsdan is ook $|s - s_k| < \frac{\varepsilon}{3t}$ en a fortiori:

$$\frac{|Q|}{A_n^{(p+1)}} < t \, . \, [|a_{k+1}| + \dots + |a_n|] < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$P = [a_1 T_n^{(p+1)} + \dots + a_k T_{n-k+1}^{(p+1)}]$$
$$= s_k T_{n-k}^{(p+1)} + [T_n^{(p)} s_1 + T_{n-1}^{(p)} s_2 + \dots + T_{n-k+1}^{(p)} s_k]$$

zooals na eenige herleiding uit de vroegere formules volgt.

Met behulp van de gelijkheid

$$T_{n-k}^{(p+1)} = T_n^{(p+1)} - [T_n^{(p)} + T_{n-1}^{(p)} + \dots + T_{n-k+1}^{(p)}]$$

is hieruit af te leiden:

$$\frac{P}{A_n^{(p+1)}} = s_k \, . \, \frac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} + \frac{T_n^{(p)}(s_1 - s_k) + T_{n-1}^{(p)}(s_2 - s_k) + \dots + T_{n-k+1}^{(p)}(s_k - s_k)}{A_n^{(p+1)}}$$
$$= R + S.$$

Het is duidelijk dat de absolute waarde van S kleiner is dan:

$$2\sigma \frac{|T_n^{(p)}| + |T_{n-1}^{(p)}| + \dots + |T_{n-k+1}^{(p)}|}{A_n^{(p+1)}}$$

Is nu $\mu > k$ berekend, zoodat $\frac{|T_{r-k}^{(p)}|}{A_{r-k}^{(p+1)}} < \frac{\varepsilon}{3k\sigma}$ voor iedere $r > \mu$ dan is voor $n > \mu$, $|S| < \frac{2\varepsilon}{3}$ Dat μ aldus berekend kan worden, blijkt als volgt:

Volgens het onderstelde is $\lim_{i=\infty} . \frac{T_i^{(p)}}{i\,A_i^{(p)}} = 0$. Daar

$\frac{A_i^{(p+1)}}{A_i^{(p)}} = \frac{i + p - 1}{p}$ volgt hieruit $\lim_{i=\infty} . \frac{T_i^{(p)}}{A_i^{(p+1)}} = 0$.

Voor $n > \mu$ geldt dus nu:

$$\left| \frac{W_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} - s_k \frac{T_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}} \right| < \varepsilon \text{ en daar } |s - s_k| < \frac{\varepsilon}{3t}$$

volgt hieruit direct het gestelde.

Opmerking 3.

Blijkens een artikel van G. Doetsch (Mathematische Zeitschrift Bd. 11, p. 161—179) is door A. Rosenblatt in het Bulletin Inter-

national de l'Academie des Sciences de Cracovie", ser. A 1913 p. 612—620[1]) het volgende theorema bewezen:

Is Σa_n sommeerbaar van de $(p+1)^{ste}$ orde, terwijl de middelwaarden van de p^{de} orde begrensd zijn, is verder Σb_n sommeerbaar van de $(q+1)^{ste}$ orde, terwijl de middelwaarden van de q^{de} orde begrensd zijn, dan is het product sommeerbaar van de $(p+q+2)^{de}$ orde

Dit theorema is een analoge uitbreiding van het theorema van CAUCHY, dat het product van twee absoluut convergente reeksen convergent is, als het hier behandelde theorema 3 is van het theorema van MERTENS, en, zooals het theorema van CAUCHY direct volgt uit dat van MERTENS, zoo volgt dit theorema van ROSENBLATT direct uit theorema 3.

---

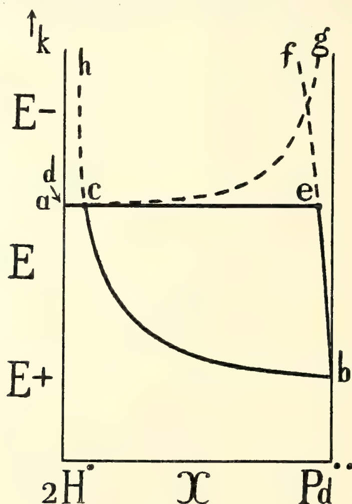
[1]) Van het artikel van ROSENBLATT zelf heb ik tot mijn leedwezen geen gelegenheid gehad, kennis te nemen.

Scheikunde. — A. SMITS: *„Het verschijnsel Electrische-Overspanning."* III [1]).

(Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en S. HOOGEWERFF).

Daar ik de electrische overspanning, in mijn boek „Die Theorie der Allotropie" [2]) en ook in de voorgaande mededeelingen slechts zeer kort besprak, wil ik hier een weinig nader op dit belangrijke verschijnsel ingaan.

Wij denken ons het geval, dat een palladium of platina-electrode is gedompeld in een oplossing van zwavelzuur, en dat deze electrode



Fig, 1.

tot kathode wordt gemaakt. Ter verklaring van het verschijnsel, dat nu zal optreden, zullen wij gebruik maken van het E,X-diagram, waarin de experimenteele electrische potentiaal van de electroden

[1]) Kon. Akad. v Wet. **27**, 152 (1918); **27**, 981 (1919).

[2]) JOHANN AMBROSIUS BARTH, Leipzig. 1921.
Engelsche editie LONGMANS, GREEN and Co. London 1922.
Fransche editie GAUTHIER VILLARS. Paris. 1923.

wordt voorgesteld als functie van de concentratie; onder aanneming dat de druk (1 atm.) temperatuur en totale ionenconcentratie (metaalionen + waterstofionen) konstant zijn. In figuur 1 is, terwijl voor de eene electrode de waterstof is gedacht, voor de andere palladium gekozen, maar ik had natuurlijk evengoed in plaats van de laatste platina kunnen nemen.

De lijn *bh* geeft aan de potentialen van de reeks electrolyten, die met verschillende palladiumphasen kunnen koëxisteeren. Deze palladiumphasen zijn verschillend, omdat palladium de waterstof oplost, in hoeveelheden die met de waterstof-ionenconcentratie van den electrolyt toenemen.

De lijn *bf* geeft aan de potentialen van de verschillende, waterstof bevattende, palladiumphasen[1]), die met de verschillende electrolyten koëxisteeren. In onze *E,X*-fig. wordt op de *E*-as de potentiaal van de metaalphase afgelezen, maar het is duidelijk dat op deze as ook de potentiaal van den electrolyt kan worden afgelezen, indien wij het teeken omkeeren.

De lijn *ag* duidt aan de potentialen van de verschillende electrolyten, die met de gasvormige waterstof-phasen koëxisteeren. Deze waterstofphasen bestaan uit zuivere waterstof, en liggen dus op de waterstof-as. Het deel *ak* van de waterstof-as geeft dus de potentialen van de waterstofphasen, die koëxisteeren met de verschillende electrolyten.

Het snijpunt *c* van de lijnen *bh en ag* stelt voor den electrolyt, die tegelijkertijd kan koëxisteeren met de palladium-phase (*e*) en met de waterstofphase (*d*) zoodat het tevens aangeeft de potentiaal van dit driephasenevenwicht. De ligging van dit snijpunt *c* volgt uit de oplosbaarheidsproducten van waterstof en palladium[2]).

$$L_{H_2} = (H^{\cdot})^2 \, (\theta)^2 = 10^{2 \times -48}$$

$$L_{Pd} = (Pd^{\cdot\cdot}) \, (\theta)^2 = 10^{2 \times -62.2}.$$

Bij het driephasenevenwicht is

$$(\theta)_{H_2} = (\theta)_{Pd}$$

waaruit volgt

$$\frac{(Pd^{\cdot\cdot})}{(H^{\cdot})^2} = \frac{L_{Pd}}{L_{H_2}} = 10^{2 \times -14.2}.$$

Stellen wij nu $(H^{\cdot}) = 1$ dan is $(Pd^{\cdot\cdot}) = 10^{2 \times 14.2}$.

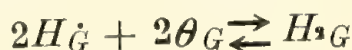
Hieruit zien wij dus, dat het punt *c* zéér sterk eenzijdig ligt en

[1]) Deze lijn geeft de bruto-waterstofconcentraties aan en zegt dus niets van den toestand waarin de waterstof verkeert.

[2]) Zie omtrent de kleinheid van deze producten de opmerkingen in „The Theory of Allotropy" in het hoofdstuk „Small concentrations" p. 172.

dat wanneer een palladium-electrode in een 1-N zwavel-zuuroplossing werd gedompeld en het palladium was en bleef in innerlijk evenwicht, dit metaal een weinig zou oplossen, totdat de palladiumionenconcentratie van $10^{2\times -14.2}$ was bereikt, terwijl een overeenkomstige onmerkbare hoeveelheid waterstof zou zijn ontwikkeld. Hierbij is ondersteld, dat zoowel platina als waterstof in innerlijk evenwicht blijven verkeeren, want de gebruikte waarde van L_{H_2} komt overeen met de waarde voor waterstof in innerlijk evenwicht en wij zullen hier voor een oogenblik aannemen, dat de gebruikte waarde voor L_{Pd} eveneens met den innerlijken evenwichtstoestand van *Pd* overeenkomt. *Pd* is echter een traag metaal, zoodat het oplosbaarheidsproduct van dit metaal in werkelijkheid door de geringe aantasting zal zijn afgenomen en het oplossen reeds zal zijn geeindigd, voordat de palladiumionenconcentratie $10^{2\times -15.2}$ is bereikt [1]).

Eenvoudigheidshalve zullen wij hier echter aannemen, dat er geen verstoring van het *Pd* optreedt en dat het driephasenevenwicht zich instelt, waarbij de *Pd*-phase *e* koëxisteert met den electrolyt *c* en met de waterstofphase *d*, bij een druk van één atmosfeer. Wanneer nu de *Pd*-electrode tot kathode wordt gemaakt of m. a. w. wanneer electronen aan het *Pd* worden toegevoerd, zullen aan deze electrode waterstof en palladium ionen in de verhouding $1 : 10^{2\times -14.2}$ of praktisch alleen waterstofionen worden afgescheiden. Het zal nu van de snelheid waarmede zich het innerlijk evenwicht



$$2H_{\dot{G}} + 2\theta_G \rightleftarrows H_{2G}$$

instelt afhangen, of de gevormde waterstof zal koëxisteeren in een toestand van innerlijk evenwicht of in een vormingstoestand. Wanneer de innerlijke evenwichtsinstelling te klein is, zal de koëxisteerende waterstof te veel ionen en electronen bevatten en in vormingstoestand verkeeren. In dezen toestand is het oplosbaarheidsproduct van de waterstof grooter en het punt, dat nu de koëxisteerende waterstofphase voorstelt, zal liggen op een potentiaallijn, die bij negatievere waarden ligt en in fig. 2 is aangegeven door a'g'. Wij moeten echter niet vergeten, dat deze lijn alleen gerealiseerd zou kunnen worden, wanneer de zoo even besproken vormingstoestand van de waterstof onveranderd met een reeks van oplossingen in electromotorisch evenwicht kon zijn. Dit is echter niet het geval; slechts één punt op deze kromme kunnen wij realiseeren en dit is het punt, dat de vloeistoflaag aangeeft, die met de in vormingstoestand verkeerende

[1]) De potentiaal + 0.82 V. waaruit het oplosbaarheidsproduct $L_{Pd} = 10^{2\times -62.2}$ is berekend, is hoogst waarschijnlijk reeds een potentiaal van een verstoorden toestand van het metaal palladium.

waterstofphase *d'* en met de palladiumphase *e'* koëxisteert. Daar het heterogene evenwicht tusschen de metaalgrenslaag en de waterstofgrenslaag, evenals dat met de vloeistofgrenslaag onmiddellijk is ingesteld, zal ook de palladium-grenslaag teveel waterstofionen en electronen bevatten, wat zeggen wil, dat ook de in deze metaalgrenslaag opgesloten waterstof in den vormingstoestand zal verkeeren.

Wij kunnen natuurlijk ook met het *Pd* beginnen en zeggen, dat *eerst* in de *Pd*-electrode, waaraan electronen worden toegevoerd, en waarin waterstofionen oplossen, waterstof in vormingstoestand ontstaat en dat *daarna* gasvormige waterstof in vormingstoestand optreedt, maar dit levert alleen verschil op met betrekking tot de

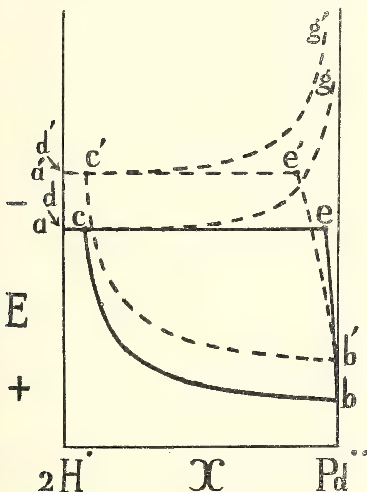


Fig. 2.

eerste momenten, want heeft er eenmaal electrolytische waterstofontwikkeling plaats, dan zal deze, tegelijkertijd, zoowel in de gasphase als in de metaalphase, in vormingstoestand optreden.

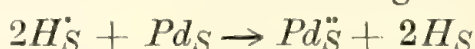
Nu moet hier opgemerkt worden, dat wanneer wij een homogene phase hebben, zooals de vaste oplossing van waterstof in palladium, de electrische potentiaal van deze twee bestanddeelen t.o.v. den koëxisteerenden electrolyt dezelfde moet zijn. Dit geldt dus ook voor de vaste oplossingen liggende op de lijn *be*, maar in de vaste oplossing liggende op deze lijn bestaat er evenwicht tusschen waterstofmole-

culen, waterstofionen en electronen, terwijl dit niet het geval is in de *Pd*-grenslaag, die koëxisteert met waterstof in vormingstoestand.

Dit is dan ook de reden, waarom de *Pd*-phase e', die met de waterstofphase d' koëxisteert niet ligt op de verlenging van de lijn *be*.

De waterstof, opgelost in de *Pd*-phase e', verkeert in den vormingstoestand en tengevolge daarvan is deze phase rijker aan waterstofionen en electronen dan wanneer de waterstof zich in innerlijk evenwicht bevond. De potentiaal van de opgeloste waterstof in e' is sterker negatief, en hetzelfde moet dus gelden voor het *Pd*. Het is nu echter de vraag op welke wijze de potentiaal van het palladium deze verandering heeft ondergaan.

Het is duidelijk dat het *Pd* rijker geworden moet zijn aan *Pd*-ionen en electronen. Wij hebben reeds gezien, dat deze phase door de opneming van waterstof, in den vormingstoestand, rijker aan electronen is geworden, zoodat nog slechts te beantwoorden is de vraag, hoe de concentratie van de *Pd*-ionen kan zijn toegenomen. Dit moet plaats gevonden hebben door de omzetting



$$2H_S^{\cdot} + Pd_S \rightarrow Pd_S^{\cdot\cdot} + 2H_S$$

waarbij dus waterstofionen hun lading aan *Pd*-atomen hebben afgestaan. Wij komen dus tot de conclusie, dat de palladium-grenslaag, die met waterstof in vormingstoestand koëxisteert, teveel waterstofionen, palladium-ionen en electronen zal bezitten of m. a. w. dat zij zoowel waterstof als palladium in den vormingstoestand zal bevatten.

Wanneer palladium in denzelfden vormingstoestand kon verkeeren met een 1 . N oplossing van een palladiumzout, dan zou de electrische potentiaal natuurlijk een sterker negatieve waarde bezitten dan correspondeert met het punt *b* in fig. 2. Deze sterker negatieve potentiaal is aangegeven door b'. En wanneer dus dezelfde vormingstoestand van *Pd* kon blijven bestaan, ook bij contact van de geheele serie van oplossingen, dan zou de lijn $b'e'$ de vaste oplossingen aangeven, die kunnen koëxisteeren met de electrolyten liggende op de lijn $b'c'$. Het nieuwe driephasen-evenwicht dat optreedt, wanneer *Pd* bij een bepaalde stroomdichtheid tot kathode wordt gemaakt en waarbij waterstof in vormingstoestand ontwijkt, is aangeduid door de punten $d'c'e'$. Daar nu de lijn $a'c'g'$ over het grootste gedeelte van het concentratie-gebied zéér weinig stijgt, is het duidelijk, dat de waarde van de negatieve potentiaal bij dit nieuwe driephasenevenwicht even groot zou zijn, wanneer het punt c' lag op de verlenging van de lijn *bc* en het punt e' op de verlenging van de lijn *be*, maar, zooals wij hebben hierboven aangetoond, behooren de punten c' en *e* bij andere als de hier genoemde lijnen. Uit deze beschouwingen volgt nu, dat bij de electrolytische waterstof-ontwikkeling de vormings-

toestand van de waterstof in de koëxisteerende waterstof en palladiumphasen *ten nauwste* met elkaar samenhangen. Hierdoor is het duidelijk, dat het kathodemetaal invloed kan uitoefenen op den graad van overspanning. De vormingstoestand is een niet-evenwichtstoestand en de verschillende kathodemetalen zullen in verschillende mate de omzetting van dezen niet-evenwichtstoestand in de richting van het innerlijk evenwicht versnellen. Dit is de reden waarom de zoogenaamde overspanning van waterstof bij gebruik van verschillende metaalkathoden verschillend is.

Het is van zelf sprekend, dat, wanneer de vormingstoestand van de waterstof niet te snel verdwijnt, de waterstof direct na de ontwijking een abnormaal hoog geleidingsvermogen voor electriciteit moet bezitten. Dit verschijnsel heeft men inderdaad reeds lang geleden gevonden[1]) doch op andere wijze trachten te verklaren; het is echter waarschijnlijk, dat dit verschijnsel grootendeels aan den vormingstoestand is toe te schrijven.

De activiteit van de waterstof, opgelost in de metaalphase, is geheel in overeenstemming met de hier gegeven beschouwingen. Wat de tijdelijke veranderingen van de overspanning aangaat, deze zullen moeten worden verklaard door de langzame verandering in samenstelling van de koëxisteerende phasen. Het heterogene evenwicht tusschen de grenslagen stelt zich met groote snelheid in, maar de samenstelling van de phasen verandert langzaam, en dat moet de reden zijn, waarom het driephasen-evenwicht metaal — electrolyt — waterstof langzaam verandert.

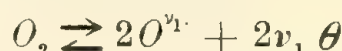
Tenslotte wil ik er nog op wijzen, dat analoge beschouwingen natuurlijk gelden voor zuurstof en andere niet-metalen. Zooals in „Die Theorie der Allotropie" pg. 195 e.v. is besproken, dwong ook de uitbreiding van deze theorie over de niet-metalen, aan te nemen, dat de atomen van alle elementen electronen kunnen afsplitsen en opnemen[1]). Het verschil tusschen de oplosbaarheden der positieve en negatieve ionen bij elementen met sterk metaal resp. sterk metalloid karakter, is zoo groot, dat ter verklaring van het electromotorisch gedrag in den regel alleen met de positieve of met de negatieve ionen behoeft rekening gehouden te worden. Maar zooals ook reeds werd opgemerkt, moet zeer zeker van genoemde veronderstelling gebruikt worden gemaakt, indien men de positieve ladingen van niet-metalen t.o.v. electrolyten en evenzoo het klein electrisch geleidingsvermogen van niet-metalen in electrisch neutralen toestand wil verklaren. Verder is genoemde suppositie ook noodig om het

---

[1]) Becker. Jahrb. der Radioaktivität. **9**, 52 (1912).

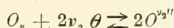
tot stand komen van verbindingen tusschen metalen duidelijk te maken. [1]).

Keeren wij nu terug tot de niet-metalen en kiezen wij dan tot voorbeeld de zuurstof, dan hebben wij te beschouwen twee volgende reacties:



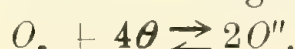
$$O_2 \rightleftarrows 2O^{v_1'} + 2v_1\theta$$

en



$$O_2 + 2v_2\theta \rightleftarrows 2O^{v_2''}$$

Daar $v_2 = 2$ kan de laatste reactie geschreven worden



$$O_2 + 4\theta \rightleftarrows 2O''.$$

Om de electrische overspanning van de zuurstof te verklaren is de laatste vergelijking voldoende. Er werd opgemerkt [2]) dat voor het geval van anodische polarisatie van een onaantastbare electrode of een traag metaal de afgescheiden zuurstof relatief te weinig electronen en te veel negatieve zuurstofionen moet bevatten, zoodat zuurstof in vormingstoestand of m. a. w. overspannen zuurstof, wanneer althans geen andere verschijnselen dit effect overdekken, direct na het ontstaan, een abnormaal klein electrisch geleidingsvermogen zou moeten bezitten.

Hebben wij nu een traag metaal, een metaal dus dat gemakkelijk is te verstoren en wij maken dit tot anode, dan zal er polarisatie plaats grijpen. Gaat de verstoring van het metaal zoover, dat er zuurstof tot afscheiding komt, dan zal, terwijl de metaalgrenslaag arm is aan ionen en electronen, ook de koëxisteerende zuurstofphase abnormaal arm aan electronen zijn. De metaalgrenslaag zal behalve de andere, in de koëxisteerende vloeistof aanwezige stoffen, ook zuurstof opgelost bevatten en het is duidelijk, dat de toestand van deze zuurstof, in het metaal opgelost, zal afhangen van den toestand van de zuurstof in de koëxisteerende zuurstoflaag.

Labatorium voor algemeene en anorganische Chemie der Universiteit.

Amsterdam, Februari 1923.

[1]) Theory of Allotropy p. 160.
Théorie de l'allotropie p. 206.

[2]) Theory of Allotropy p. 164.

Natuurkunde. — A. E. VAN ARKEL: „*Over de kristalstructuur van het witte tin*".

(Aangeboden door de Heeren P. EHRENFEST en H. R. KRUYT).

Bij de voortzetting van het onderzoek van Dr. BURGER [1]) over de eigenschappen van éénkristaldraden van tin werden Röntgenopnamen gemaakt om de ligging der kristallen ten opzichte van de draadas te bepalen. De resultaten van deze bepaling waren niet in overeenstemming met de kristalstructuur van het witte tin, zooals die door BIJL en KOLKMEIJER [2]) wordt opgegeven.

Deze onderzoekers vonden voor het tetragonale tin een kristalstructuur met drie atomen per element, welke atomen zoodanig geplaatst zijn, dat één de hoekpunten van het structuurelement vormt, terwijl de beide overige de gelijkwaardige zijwanden centreeren.

Aangezien bij deze structuur de structuurfactor [3]), waarmede de intensiteiten moeten worden vermenigvuldigd, gelijk is aan 9 wanneer de indices van het reflecteerend vlak alle even of alle oneven zijn en 1 in alle andere gevallen, zullen er dus bij deze structuur geen vlakken zijn, waarvan het maximum der reflectie geheel wegvalt. Dus zullen reflectielijnen van alle mogelijke kristalvlakken op de film aanwezig moeten zijn, in ieder geval die met kleine indices, die om verschillende redenen een grootere intensiteit hebben. Het is dus zeer eigenaardig, dat de reflecties der vlakken (100) en (110) ontbreken, terwijl de reflectie van (101) blijkens de opgave van BIJL wel aanwezig is. Zoo ontbreekt de reflectie (310) terwijl de theoretisch even zwakke reflectie van (410) aanwezig is. Op grond hiervan rijst twijfel aan de juistheid der opgegeven structuur.

In tabel I zijn naast elkaar gezet de waarden van $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$ gemeten door BIJL, die van JOHNSEN [4]), en het gemiddelde uit zes hier gemaakte opnamen, ten deele van Dr. BURGER afkomstig; vervolgens nog de intensiteiten, die men volgens BIJL zou moeten verwachten en de schattingen volgens BIJL. De onderlinge fout in onze

[1]) H. C. BURGER. Physica **2**, 56 (1922).

[2]) A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER. Versl. Kon. Akad. A'dam. **21**, 501 (1919). A. J. BIJL. Diss. Utrecht 1918.

[3]) Zie o.a. DEBIJE en SCHERDER. Physik Zeitschr. **18**, 293 (1917).

[4]) Door BIJL alleen aangehaald voorzoover er afwijkingen met zijn metingen waren.

opnamen is, afgezien van de eerste lijnen, ongeveer 0.3 °/₀. Zij zijn vooral met de waarden van JOHNSEN in goede overeenstemming.

TABEL I.

Intensiteit (ber.)	(geschat)	$\sin^2 \frac{\Theta}{2} \times 10^3$ (gemeten)	$\sin^2 \frac{\Theta}{2} \times 10^3$ (BIJL)	$\sin^2 \frac{\Theta}{2} \times 10^3$ (JOHNSEN)	$\sin^2 \frac{\Theta}{2} \times 10^3$ (ber. v. BIJL)
23	—	—	—		17.4
11	—	—	—		35
50	m	74	79	72	69
1.9	—	—	—		104
3.3	zz	—	124		121
78	zs	144	150	143	138
2.6	—	—	—		155
8.5	—	—	—		190
3.3	z	217	225		225
3.3	—	—	—		243
65	s	266	276		278
2.7	z	285	294		295
4.8	—	—	—		328
20.8	zz	—	343		347
2.2	m	356	365	348	382
4.0	—	—	—		399
4.2	zs	411	417	404	416
2.8	—	—	—		434
6.9	zz	—	466		451
14.6	—	—			486
4.8	m	496	508	491	502
4.4	—	—	-		538
47	s	560	556		555

BIJL en KOLKMEIJER hebben gebruik gemaakt van koperstraling. Op hun opnamen kunnen dus twee reeksen van lijnen voorkomen, waarvan de kwadraten der golflengten zich verhouden als 1 : 0,808. BIJL schrijft nu ongeveer de helft van de door hem waargenomen lijnen aan $K\alpha$ straling, de overige aan $K\beta$ straling toe. Bij onze

opnamen werd het Röntgenlicht eerst gefiltreerd door een nikkelvenstertje van 15 μ dikte. Uit ongeveer honderd opnamen van ander materiaal blijkt, dat het $K\beta$ licht zoodoende geheel wordt weggenomen. Bij het tin vinden we echter alle lijnen terug, die BIJL ook heeft gemeten, uitgezonderd drie n.l. de reflecties, waarvan de sinuskwadraten resp. gelijk zijn aan 0,124, 0,343 en 0,466. In 't vervolg noemen we een reflectie, waarvan $sin^2\frac{\Theta}{2} = 0{,}124$, steeds reflectie (lijn) 124. De lijnen 124, 343 en 466 kunnen we nu beschouwen als de β lijnen, behoorende bij de zeer sterke α lijnen 150, 417 en 556. Ze zouden dan moeten zijn, resp. 121, 338 en 450. Bij JOHNSEN komt nog voor de lijn 57. Deze is op te vatten als β lijn, behoorende bij de eveneens zeer sterke lijn 72 (bij JOHNSEN). Dat de overige β lijnen ontbreken is te verklaren uit de geringe intensiteit der β straling. Wanneer nu alle lijnen als α reflecties moeten worden opgevat, dan is de overeenstemming, wat de plaats der lijnen betreft, zeker niet voldoende nauwkeurig voor de lijn 365. Degene, die het dichtst hier in de buurt ligt, is 382. De waargenomen en berekende waarde van $sin^2 \frac{\Theta}{2}$ verschillen hier 4 °/₀, een onderscheid dat niet aan meetfouten mag worden toegeschreven.

Veel minder goed echter voldoen de intensiteiten der lijnen. Terwijl men volgens de tabel der berekende intensiteiten eenige uiterst donkere lijnen zou verwachten naast vele zwakke, varieert de intensiteit der lijnen betrekkelijk weinig. Alleen bij de hoogere reflectiehoeken treden eenige duidelijk sterkere lijnen op. Bezien we de tabel nauwkeuriger, dan valt al dadelijk op dat de eerste twee lijnen ontbreken, hoewel zij intensiteiten moeten hebben, resp. 7 en 3 maal sterker dan de lijn 225 die wel voorkomt. Bij lijn 225 volgt een tweede afwijking. Voor de lijnen, die aan weerszijden zouden moeten liggen, wordt bij berekening, resp. een dubbele en gelijke intensiteit gevonden. Waarom ontbreken deze beide? Hetzelfde geldt voor de lijn 294 met de intensiteit 2,7. Waarom ontbreekt hier lijn 398? Zeer sterk (intensiteit 20,8) zou moeten zijn lijn 343. BIJL schat de intensiteit als zeer zwak; op onze opnamen ontbreekt de lijn volkomen. Voor de daarop volgende, die wel aanwezig is, en zelfs als middelmatig sterk geschat wordt, is de berekende intensiteit ongeveer 10 maal kleiner. Lijn 417, als zeer sterk geschat, moest dezelfde intensiteit hebben als lijn 398 die ontbreekt. Vergelijken we nog even de lijnen 343 en 417

343, intensiteit ber. 20,8, geschat zeer zwak,
417, „ „ 4,2, „ „ sterk.

Volgens de intensiteiten zou men vervolgens moeten verwachten de zeer sterke lijnen 451 en 486. Zeer bedenkelijk is, dat slechts één lijn waargenomen wordt, n.l. 466, door BIJL als zeer zwak beschreven. Deze critiek zou nog verder zijn voort te zetten; naar ik meen bewijst echter de intensiteit der lijnen voldoende, dat de structuur, die BIJL aangeeft, niet de juiste kan zijn. Tegen deze structuur kunnen nog meer bezwaren worden ingebracht, o.a. dat de assenverhouding, die BIJL opgeeft, niet eenvoudig samenhangt met degene, die door MILLER [1]) gevonden is.

Vatten we in 't kort nog de bezwaren samen:

1. voor het ontbreken van een aantal lijnen wordt geen verklaring gegeven.

2. de waargenomen plaats van enkele lijnen is niet in overeenstemming met de berekende.

3. de intensiteiten voldoen niet.

4. de structuur verklaart niet dan zeer onbevredigend de door MILLER gemeten assenverhoudingen.

Tot een in alle opzichten bevredigende structuur komen we als volgt. Aangezien tin tetragonaal kristalliseert, moeten de sinuskwadraten voldoen aan de betrekking:

$$sin^2 \frac{\Theta}{2} = A\,(h_1^2 + h_2^2) + B\,h_3^2.$$

De gemeten sinuskwadraten voldoen nu aan de betrekking wanneer we aannemen

$$A = 0.00875$$
$$B = 0.0588.$$

Het aantal atomen per structuurelement wordt dan 8. Nemen we aan:

soortel. gew. $= 7,285$

atoomgew. $= 118,7$

$N = 0,6062 \times 10^{24}$,

golflengte $Cu_{K\alpha} = 1,539$ Å (gemiddelde van K_{α_1} en K_{α_2})

dan vinden we door berekening

$$A = 0,008745$$
$$B = 0,05878$$

wanneer de waarde die MILLER. van de assenverhouding opgeeft (6,722) als juist wordt aangenomen.

De indices der vlakken, die interferentielijnen geven, zijn blijkens de tabel óf alle even met door 4 deelbare som, óf alle oneven. Bij regulaire kristallen is dit het kenmerk voor diamantstructuur; voor

[1]) Ann. d. Physik. u. Chem. 58, 660 (1843).

het witte tin moeten we dus tetragonale diamantstructuur aannemen. Behalve de lijnen, die volgens berekening aanwezig moeten zijn, komen op onze opnamen geen andere voor; daarentegen zijn alle berekende lijnen, aanwezig. Voor een groot deel zijn ze echter tot paren vereenigd, die te dicht bijeen liggen om afzonderlijk te kunnen worden gemeten. Ten deele zijn deze dubbellijnen te onderscheiden doordat ze breeder zijn dan de overige; bij diegene, waar de onderlinge afstand het grootste is, zijn op sommige films duidelijk aanwijzingen van dubbel-structuur te zien, o.a. bij de lijnen 74 en 144.

Ook de waargenomen intensiteiten zijn met de aangenomen structuur in overeenstemming. De sterkste lijnen op de film zijn in tabel II met S aangegeven. Inderdaad wordt voor deze lijnen de grootste intensiteit berekend, gedeeltelijk omdat deze lijnen dubbellijnen zijn.

De reflecties van de vlakken 004 en 553 (= 713) zijn dubbel. Dit komt, omdat bij hooge reflectiehoeken het K_α doublet wordt opgelost. Berekenen we uit de beide dubbellijnen de verhouding der golflengten, dan vinden we resp.:

1.0027 en 1.0025

terwijl uit de waarden die SOMMERFELD [1]) opgeeft, volgt:

1.00254.

BIJL [2]) heeft reeds aangetoond, dat het grauwe tin diamantstructuur bezit. De structuren van grauw en wit tin zijn dus zeer na aan

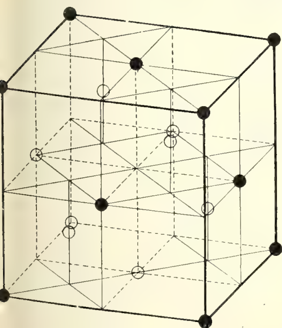


Fig. 1

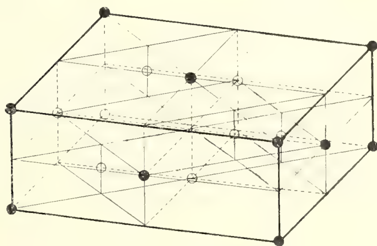


Fig. 2

elkaar verwant. In bijgaande teekeningen (fig. 1 en 2) zijn voorgesteld de structuurelementen van grauw en wit tin in natuurlijke verhouding.

[1]) Atombau und Spectrallinien 3e Auflage Braunschweiz 1922, blz. 188.

[2]) l. c.

TABEL II.

Afstanden	Intensiteit (geschat)	Intensiteit (ber.)	$10^3 \times \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ (ber.)	$10^3 \times \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ (gevonden)	Indices
4.54	s	22	70 76	74	220 111
6.40		17	140 146	144	400 311
7.96		4	216	217	331
8.98		6	270	266	202
9.24	s	9	280 286	285	440 511
10.50	s	9	350 356	356	620 531
11.42	s	8	410	411	422
12.85	s	5	496	496	711 en 551
13.69		4.3	547 550	548	113 602
13.87		4.2	560 564	560	800 731
14.79		1.3	617	615	313
15.11		1.3	630	634	660
16.08	s	5.8	687 690	690	333 642
16.41	s	4 6	700 706	703	840 751
17.30		2.1	757	755	513
17.71		2.0	776	777	911
18.73	s	5.8	827 830	827	533 822
19.05		1.9	846	840	931
20.97		2.7	910 914	917	1020 771
21.64 en 21.82		0.4	941	938 en 943	004
22.60 en 22.82		2.5	967	963 en 969	713 en 553

In fig. 3 is aangegeven een doorsnede volgens een (110) vlak door de beide structuurelementen, die hier met de middelpunten samenvallen. Met cirkeltjes zijn aangegeven de atomen van het grauwe, met gevulde cirkels die van het witte tin.

De overgang van grauw in wit tin kunnen we ons aldus voor-

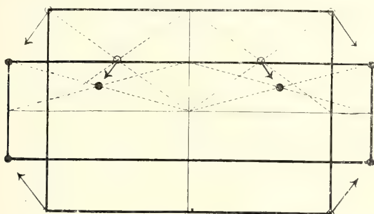


Fig. 3.

stellen. Een elementaire kubus van grauw tin, waarvan de lengte der ribben is 6.46 Å, wordt in een richting loodrecht op het (100) vlak tot iets meer dan de helft in elkaar gedrukt. De atomen wijken daarbij zijwaarts uit, zonder dat hun onderlinge ligging veranderd wordt. Daarmee is dan het structuurelement van wit tin met de lengte der ribben 3,17 en 8,22 Å gevormd. De kleinste afstand tusschen twee atomen verandert bij den overgang van 2,23 Å in 2,37 Å. Ondanks het toenemen van het soortelijk gewicht bij den overgang is toch de kleinste afstand tusschen de atomen iets grooter geworden.

Volgens GROTH [1]) behoort tin naar den kristalvorm tot de ditetragonale-bipyramidale (holoëdrische) klasse. Met de boven beschreven structuur is dit niet in overeenstemming; volgens deze moet tin de symmetrie hebben der skalenoëdrische klasse.

Hernieuwde metingen aan goedgevormde tinkristallen zullen moeten uitmaken of de uitwendige begrenzing der kristallen hiermede in overeenstemming is.

Tetragonale diamantstructuur was tot nu toe bij elementen niet waargenomen; van verbindingen zijn enkele voorbeelden bekend. De structuur, die het meest op die van tin gelijkt, is die van het koperkies ($Fe\ Cu\ S_2$).

BURDICK en ELLIS [2]) beschrijven deze aldus: op de hoeken van het

[1]) P. GROTH. Physikalische Kristallographie 3e Auflage Leipzig 1896. blz. 427.

[2]) C. L. BURDICK en J. H. ELLIS Journ. Am. Chem. Soc. XXXIX. 2518. (1917).

structuurelement staat een ijzeratoom, een tweede in het midden van boven- en ondervlak. Twee *Cu* atomen centreeren de zijvlakken, terwijl vier zwavelatomen staan op dezelfde plaats als de vier binnenste tin-atomen in fig. 1. De assenverhouding bij dit lichaam is 1 : 1 : 0,985. Volgens de structuur behoort dit lichaam eveneens in de skalenoëdrische klasse, waarbij het ook op grond zijner kristallographische eigenschappen wordt ingedeeld.

Eindhoven, Jan. 1923.

Natuurkundig Laboratorium der
N. V. Philips-Gloeilampenfabrieken.

Palaeontologie. — I. SWEMLE en L. RUTTEN. *„Nieuwe vondsten van pliocene en pleistocene zoogdieren in Noord-Brabant en hunne geologische beteekenis".*

(Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en H. A. BROUWER).

In het afgeloopen jaar ontving het Geologisch Instituut te Utrecht, gedeeltelijk door bemiddeling of op aanwijzing van 's Rijks Geologischen Dienst, gedeeltelijk van het Rijks Bureau voor Drinkwatervoorziening, een aantal resten van fossiele zoogdieren uit zuidelijk en westelijk Noord-Brabant, een streek, die in dit opzicht tot nu toe weinig heeft opgeleverd. Het is bekend, dat op sommige punten van Noord-Brabant vertegenwoordigers van de jongdiluviale fauna zijn gevonden (bijv. Bos primigenius Boj. bij den Bosch, Elephas primigenius Blumenb. bij Acht, Rhinoceros antiquitatis Blum. in het Hollandsch Diep). Merkwaardigerwijze heeft men echter op twee punten: bij Oosterhout in het Noordwesten en bij Westerhoven in het Zuiden der provincie resten eener pliocene fauna aangetroffen, n.l. Elephas meridionalis Nesti en Rhinoceros etruscus Falc. [1]).

De in het afgeloopen jaar gevonden resten zijn nu voor een deel afkomstig uit de zone, die zich tusschen Oosterhout en Westerhoven uitstrekt. Drie vondsten van zoogdieren, die tot de jongdiluviale fauna behooren, zijn gedaan in de omstreken van Esbeek, ZZO. van Tilburg, n.l. een kies van Elephas primigenius Blum., die door den heer SISSINGH op het terrein der steenbakkerij benoorden Esbeek onder een leemlaag op een diepte van 3 M. is gevonden, drie kiezen van Rhinoceros antiquitatis Blum., welke bij het graven van het Wilhelminakanaal en wel bij den aanleg der sluis bij Diessen op eene diepte van $2^1/_2$ M, in veenhoudende kleilagen zijn ontdekt, en een kies van Equus caballus L., die bij het graven van hetzelfde kanaal, oostelijk van de sluis van Diessen, op eene diepte van $3^1/_2$ M. is gevonden [2]).

Op zichzelf zijn deze fossielen niet bijzonder belangrijk. De kies van Elephas primigenius is een M III. sup. sin., waaraan nog

---

[1]) L. RUTTEN. Die Diluvialen Säugetiere der Niederlande. 1909.

[2]) Veel verder oostelijk, n.l. van Breugel aan de Dommel is nog een horenfragment van Bos primigenius Boj. afkomstig, dat in het afgeloopen jaar aan het Utrechtsche geologische instituut werd ten geschenke gegeven.

—$19^1/_2 x$ op 215 bij 100 bij 160 mm. te zien zijn [1]). Uit de buitengewoon dunne lamellen en de geringe dikte van het email blijkt met zekerheid, dat de kies tot El. primigenius behoort; merkwaardig is echter, dat de emailbanden een sterke en fijne plooiing vertoonen, wat over het algemeen bij El. primigenius niet voorkomt. De resten van Rhinoceros antiquitatis zijn drie bij elkaar hoorende kiezen der rechter onderkaak, nl. P3, M1, en M2. De maar weinig afgekauwde kiezen hebben aan een jong dier toebehoord; er kan geen twijfel aan bestaan, dat ze tot Rh. antiquitatis gerekend moeten worden: het zeer dikke email, de duidelijke streping der emailbanden, de diepe dalen en de geringe convexiteit der kiezen wijzen alle in dezelfde richting, terwijl overigens de kiezen bijna volmaakt overeenkomen met eene door J. Brandt afgebeelde suite [2]). Ook de kies van Equus caballus is een M. uit de onderkaak.

Van Oosterhout daarentegen, waar reeds vroeger op een niet nader gedefinieerde vindplaats in een oppervlakkige leemlaag kiezen en beenderen van Elephas meridionalis Nesti waren gevonden [3]), werden ons ook nu resten van beenderen en fragmenten van één of meer kiezen toegezonden, die tot deze soort behoorden. Ze werden aangetroffen op eene diepte van 34.75 M. -AP in de eerste van een vijftal boringen, die ten behoeve van de Waterleiding-Maatschappij voor Westelijk Noord Brabant zijn uitgevoerd. De boringen liggen links van den weg Breda—Oosterhout op de Vraggelsche heide.

De beenderen uit de boring laten geen nadere determinatie toe, maar een kiesfragment, waarschijnlijk een achterste deel van een M1 sup. sin. is volmaakt typisch voor Elephas meridionalis. Het vertoont -3x met een lengte van $7^1/_2$ en een breedte van 8—9 cM., terwijl de hoogte zonder wortel circa 8 cM. bedraagt. Het fragment was niet afgekauwd, maar werd doorgezaagd, waardoor de afkauwfiguur nagebootst werd. Kenmerkend voor El. meridionalis zijn: 1. de buitengewone dikte der lamellen, die al uit de lamellen-formule blijkt, 2. de zeer groote dikte van het email, die tot 4 mM. bedraagt, 3. de groote breedte en de geringe hoogte van de kies, 4. de wijze, waarop de afkauwingsfiguren ontstaan, n.l. door versmelting van vier annuli [4]) (zie figuur).

Niet alleen vindt men alle kenmerken van El. meridionalis in

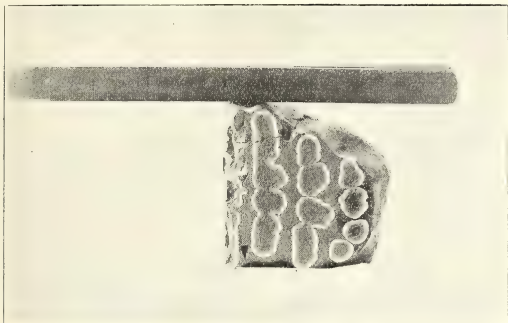
[1]) H. Pohlig. Nova Acta Acad. Car. Leop. 53, p. 251.

[2]) J. Brandt. Mém. Acad. St. Pétersbourg. 1849. T. XI.

[3]) L. Rutten. Die Diluvialen Säugetiere der Niederlande, 1909.

[4]) H. Pohlig. L. c. p. 130 en 140. A. Leith Adams. Palaeontogr. Soc. 35. 1881. p. 185. 191.

dit kiesfragment terug, maar bovendien exponeeren die kenmerken nog in de zeer groote dikte der lamellen en van het email.



Volgens de welwillende gegevens van Dr. J. STEENHUIS werd door 's Rijks Geologische Dienst het gedeelte der boring, waarin de kiesfragmenten gevonden zijn, geparallelliseerd met de klei van Tegelen, die men tot het jongste plioceen of het oudste pleistoceen kan rekenen. Het kiesfragment bevestigt deze parallellisatie, want ook in Tegelen is in den laatsten tijd Elephas meridionalis gevonden [1]). Uit het feit, dat de vroegere vondsten van El. meridionalis bij Oosterhout in eene leemgroeve aan de oppervlakte gedaan werden, kan blijken, dat in dit deel van Noord-Brabant het plioceen plaatselijk aan de oppervlakte treedt. Op Bijlagen 11 en 13 van het Eindverslag der Rijksopsporing van Delfstoffen is nu westelijk van Tilburg een ongeveer N40°W verloopende breuk aangegeven, die echter op Bijlage 11 circa 2 K.M. verder oostwaarts is geteekend dan op Bijlage 13. Noordoostelijk van deze breuk is sterk gedaald gebied aangegeven; zuidwestelijk ervan minder sterk gedaald gebied. Teekent men de vindplaatsen der pliocene of oudpleistocene fauna (Westerhoven en Oosterhout) in de kaart, dan ziet men, dat ze oostelijk van de breuk vallen, zooals die op Bijlage 13 is aangegeven, terwijl Westerhoven ook nog in het slenkgebied zou vallen, als men het breukverloop van Bijlage 11 aanneemt. Het is echter duidelijk, dat men alleen in het minst gedaalde gebied het plioceen aan de oppervlakte zal mogen verwachten, zoodat het wel zeker

[1]) S. RICHARZ. Centralbl. f. Miner. Geol. u. Pal. 1921 p. 664—669; id. Stadt Gottes 1921/22. Heft III.

is, dat de bovengenoemde breuk — die inderdaad slechts als een „vermoede” breuk op de kaart is aangegeven — oostwaarts verschoven zal moeten worden.

In dat geval komt echter de vindplaats van El. primigenius bij Esbeek zeker en die van Rh. antiquitatis en Eq. caballus bij Diessen waarschijnlijk westelijk van de breuk, dus in het minst gezonken gebied te liggen. Twee mogelijkheden doen zich dan voor: in de eerste plaats kan bij Diessen en Esbeek jonger diluvium over het gedenudeerde plioceen getransgredieerd zijn en in de tweede plaats is het mogelijk, dat de breuk, die we in het bovenstaande als een rechte lijn gedacht hebben, onregelmatiger verloopt, zoodat in werkelijkheid Esbeek en Diessen oostelijk ervan komen te liggen.

In elk geval blijkt uit het bovenstaande, dat jonge fossiele zoogdierresten in dit deel van Noord-Brabant, welks geologie nog verschillende verrassingen kan herbergen, vrij talrijk zijn, terwijl de mogelijkheid zich voordoet, dat ze ons zullen kunnen helpen om de tectoniek der provincie te ontwarren.

Zoowel de vroegere vondsten bij Westerhoven en Oosterhout als de recente bij Esbeek en Diessen zijn in oppervlakkige of bijna oppervlakkige leemlagen gedaan, die men zonder fossielvondsten zeker alle tot de „Argiles de la Campine” [1]) zou brengen. Er is al meer op gewezen, dat deze leemlagen van zeer verschillenden ouderdom kunnen zijn; de palaeontologische vondsten wijzen in dezelfde richting.

[1]) J. Lorié. Bull. Soc. Belge de Géol. XXI. 1907 p. 532—576.

Voor de boekerij wordt door den Heer Korteweg ten geschenke aangeboden een exemplaar van: Christiaan Huygens' *Recueil des observations astronomiques,* rédigé par D. J. Korteweg et A. A. Nijland. (Overdruk uit Tome XV der „Oeuvres complètes de Christiaan Huygens”).

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 24 MAART 1923.

DEEL XXXII.

N°. 3.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Mededeeling van den Heer A. F. HOLLEMAN dd. 14 Maart j.l., dat hij, wegens verblijf in het buitenland, gedurende de maanden Maart en April de vergaderingen niet zal kunnen bijwonen.

Voor kennisgeving aangenomen.

2°. Eene uitnoodiging van de „Société des Ingénieurs Civils de France" dd. 2 Maart j.l. tot bijwoning van het feest ter herdenking van haar 75-jarig bestaan, te vieren 4, 5 en 6 Mei e.k.

Op verzoek van den Voorzitter verklaart de Heer LELY zich bereid de Akademie te vertegenwoordigen. Aan het Genootschap zal hiervan bericht worden gezonden.

3°. Eene uitnoodiging van de „Société d'encouragement pour l'Industrie Nationale" dd. 16 Maart j.l. tot bijwoning der feestelijke herdenking van haar 122-jarig bestaan, te vieren op 7, 8, 9 en 10 Juni e.k.

Daar geen der leden zich hiervoor kan beschikbaar stellen, wordt besloten een gelukwensch te zenden.

4°. Eene missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 26 Februari j.l. N°. 815 Afd. K. W. met verzoek mede te deelen of de Heeren P. VAN ROMBURGH en G. A. F. MOLENGRAAFF bereid zijn de Nederlandsche Regeering, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, te vertegenwoordigen bij het „Pan Pacific Science Congress" te Sydney in Augustus a.s.

Op deze missive is bereids in bevestigenden zin geantwoord.

De Voorzitter vestigt er de bijzondere aandacht der vergadering op, dat in bedoelde missive is medegedeeld dat deze vertegenwoordiging zal moeten plaats hebben buiten bezwaar van 's Rijks Schatkist. Hij acht dit standpunt van den Minister, in verband met den bedenkelijken toestand van 's Lands finantien, momenteel zeer verklaarbaar. Het komt hem echter noodzakelijk voor er op te wijzen dat, zoodra de finantieele toestand der Schatkist verbetert, ook ten opzichte der vertegenwoordiging verandering dient te worden aangebracht. Hij zou het zeer betreuren indien de Regeering ook dàn nog de bestaande gedragslijn bleef volgen. Op deze wijze toch blijft vertegenwoordiging vaak achterwege waar zij dringend noodig is. Hij zal gaarne nagaan in hoeveel gevallen reeds, ter wille van de kosten, van vertegenwoordiging is afgezien en verzoekt den leden hem dienaangaande opgaven te willen verstrekken.

De Voorzitter deelt voorts mede, dat ook de Heer H. A. BROUWER het Congres te Sydney zal bijwonen en dat den Minister zal worden verzocht ook hem als Regeeringsvertegenwoordiger aan te wijzen.

Verder brengt de Voorzitter ter kennis der vergadering dat tot lid der I. C. O.-Commissie is toegetreden de Heer W. H. ARISZ te Djember en dat een in 't Engelsch gestelde lijst is gereed gemaakt van vraagstukken, welke aan de aandacht van het Congres te Sydney zullen worden onderworpen.

5°. Een schrijven van Prof. GUSTAV TAMMANN te Göttingen dd. 9 Maart j.l. kennis gevende, dat hij voornemens is de hem toegekende BAKHUIS ROOZEBOOM-medaille persoonlijk in ontvangst te komen nemen. De plechtige uitreiking zal plaats hebben in de Mei-vergadering der Afdeeling.

6°. Van den Heer Dr. H. A. NABER te Hoorn een exemplaar van zijn artikel „CORNELIS JACOBSZ. DREBBEL en de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam".

Voor kennisgeving aangenomen.

7°. Eene missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 10 Maart j.l. N°. 1150 Afd. K.W. met verzoek om advies omtrent de vraag welke geleerde in aanmerking zou kunnen komen voor uitzending naar Engeland nà het eindigen van de aan Dr. C. F. VAN DUIN verstrekte opdracht als „fellow" van het „Ramsay Memorial Fund".

Op verzoek van den Voorzitter deelt de Heer VAN ROMBURGH mede,

dat hij hierover met Prof. KAMERLINGH ONNES overleg zal plegen en de resultaten daarvan nader ter kennis der vergadering zal brengen.

8°. Eene missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, dd. 6 Maart j.l. N°. 1025 Afd. K.W. met verzoek om bericht en raad over twee rapporten van den Consul-Generaal te San Francisco. Het eerste, getiteld „Hawaiian Islands", wordt gesteld in handen van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en H. A. BROUWER; het tweede, getiteld: „Visit of Netherlands East Indian Delegate to the Leprosy Investigation Station at Honolulu, H. I. November 1922" wordt gesteld in handen der Heeren A. A. HIJMANS VAN DEN BERGH en C. EYKMAN ter fine van prae-advies.

9°. Een schrijven van den Heer L. E. J. BROUWER dd. 22 Maart j.l. van den volgenden inhoud:

Aan de Gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Daar, naar aan ondergeteekende gebleken is, de in de Gewone Vergadering van 24 Februari 1923 door den Voorzitter gedane mededeelingen aangaande de oprichting der Wetenschappelijke Internationale Samenwerkingscommissie bij velen den indruk hebben gewekt, dat de arbeid dezer Commissie essentieel impliceert verband met den Conseil International des Recherches en de daarmede samenhangende Unions, moet ondergeteekende er den nadruk op leggen, dat hij met de aanname van het lidmaatschap der Wetenschappelijke Internationale Samenwerkingscommissie heeft gemeend, geen ander mandaat te aanvaarden dan dat eener diligentie naar beste weten en krachten ten opzichte van het door den naam der Commissie uitgedrukte doel."

Dit schrijven wordt voor kennisgeving aangenomen.

10°. Een schrijven van de „Australian National Research Council" met verzoek om mededeeling of, behalve de officieele vertegenwoordigers onzer Regeering, ook vertegenwoordigers onzer Akademie het „Pan Pacific Science Congress" te Sydney zullen bijwonen.

Hierop zal worden geantwoord dat de aangewezen Regeeringsvertegenwoordigers tevens als afgevaardigden der Akademie het Congres zullen bijwonen.

11°. Bericht van overlijden op 8 Maart j.l. van het rustend lid der Akademie Prof. J. D. VAN DER WAALS Sr.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Naar aanleiding van dit overlijden zegt de Voorzitter:

Op 12 Maart l.l. stond het Bestuur dezer Afdeeling voor de geopende groeve van een man, aan wien de Afdeeling misschien meer te danken heeft dan aan een ander harer leden. In

JOHANNES DIDERIK VAN DER WAALS

verloor Nederland een van zijn grootste zonen, de natuurwetenschap een van haar edelste beoefenaars.

VAN DER WAALS was self-made man; geboren te Leiden op 23 November 1837, ontving hij aldaar lager onderwijs en studeerde voor onderwijzer. Vervolgens zette hij zijn studiën voort, ten gevolge waarvan hij weldra het Middelbaar Onderwijs-examen in Wiskunde en Natuurkunde kon afleggen.

Zoo werd hij reeds in 1864 leeraar aan de H. B. S. te Deventer, vanwaar hij twee jaren later naar den Haag verhuisde, waar hij eerst leeraar aan, later directeur van de H. B. S. was. Toen zag hij zich ook in de mogelijkheid gesteld akademische examens af te leggen, hoewel hij geen klassieke opleiding had ontvangen, en zoo kon hij op 14 Juni 1873 te Leiden tot doctor in de Wis- en Natuurkunde promoveeren op de dissertatie, die hem met één slag tot een der eerste levende physici stempelde: „Over de continuïteit van den gas- en vloeistoftoestand".

Ondertusschen werd de nieuwe Hooger-Onderwijswet ingevoerd en daarmede het Amsterdamsche Athenaeum tot Universiteit verheven. Hier werd VAN DER WAALS dadelijk in 1877 tot hoogleeraar in de physica benoemd; eerst stond hij alleen voor deze geheele wetenschap, waarbij hem pas veel later eerst JULIUS, toen SISSINGH en nog weer later ZEEMAN van een gedeelte van zijn taak kwamen ontlasten. Tot zijn 70ste jaar is VAN DER WAALS hier werkzaam gebleven, daarna, zoolang zijn vermogens het veroorloofden, voortwerkende aan zijn wetenschap, totdat ten slotte de

last der jaren zich helaas ook bemerkbaar begon te maken in de werkzaamheid van zijn geest, zoodat in den allerlaatsten tijd weinigen meer met hem in aanraking zijn gekomen.

Het zal wel nauwelijks noodig zijn hier over het wetenschappelijke werk van VAN DER WAALS veel te zeggen. Reeds de dissertatie was een baanbrekend onderzoek, dat MAXWELL aanleiding gaf tot de opmerking: „that there can be no doubt that the name of VAN DER WAALS will soon be among the foremost in molecular science"; en verder: „It certainly has directed the attention of more than one inquirer to the study of the Low-Dutch language in which it is written".

Een verhandeling van CLAUSIUS over warmte als beweging had VAN DER WAALS er toe gebracht een verklaring van de proeven van ANDREWS te zoeken en hier werd hij, als het ware door intuïtie, gevoerd tot zijn beroemde vergelijking, waarin hij het volumen van de moleculen en hun onderlinge aantrekking een rol liet spelen bij het verband tusschen drukking, volumen en temperatuur van gassen en vloeistoffen.

Een tweede groote ontdekking volgde 7 jaar later: de wet van de overeenstemmende toestanden. Schijnbaar zonder veel moeite, maar in werkelijkheid na zeer zware studie, vond VAN DER WAALS, dat, wanneer men den druk in deelen van den kritischen druk, het volumen in deelen van het kritische volumen, de temperatuur in deelen van de kritische temperatuur uitdrukt, de toestandsvergelijking na een algebraïsche substitutie voor alle stoffen gelijk wordt. Deze wet heeft als gids gediend voor alle latere onderzoekingen over het vloeibaar maken van gassen, zoowel aan DEWAR, waar het gold de waterstof, als aan KAMERLINGH ONNES ten opzichte van diens kryogene proeven, die bekroond werden door het vloeibaar maken van het helium.

De derde groote ontdekking van VAN DER WAALS had betrekking op de mengsels. In de verwarrende menigvuldigheid der verschijnselen bij mengsels heeft hij orde en regelmaat gebracht, door een gelukkige verbinding van de

moleculairtheorie met de tweede wet der thermodynamica in den vorm, waarin GIBBS ze bij zijn, beschouwingen over het evenwicht van heterogene substanties, gebezigd heeft. Het resultaat van zijn formules drukt hij grafisch uit met behulp van een bepaald oppervlak, dat in den vervolge steeds als het psi-vlak bekend is. De theorie der binaire mengsels werd het uitgangspunt voor reeksen van onderzoekingen van anderen op physisch gebied.

Naast deze baanbrekende onderzoekingen staat nog ander wetenschappelijk werk van VAN DER WAALS; ik zou kunnen wijzen op zijn thermodynamische theorie der capillariteit en op zoo menige andere publicatie. Maar ik moet mij beperken en daarom zou ik er hier alleen nog de aandacht op willen vestigen, dat bijna zijn geheele levenswerk het licht heeft gezien in de publicaties dezer Akademie.

Van onze Afdeeling was VAN DER WAALS lid sedert 1875. In 1888 werd hij ondervoorzitter; na het aftreden van OUDEMANS in 1896 werd hij secretaris en hij is dit gebleven, zelfs nog na het bereiken van den 70-jarigen leeftijd, tot April 1912, toen hij door ZEEMAN werd opgevolgd.

Gedurende 24 jaren is VAN DER WAALS zoo de ziel geweest van het Bestuur dezer Afdeeling. Ieder, die hem in functie gezien heeft, weet, dat hij zijn secretariaat met de uiterste nauwgezetheid vervulde en — hoe afkeerig hij ook moge geweest zijn van nieuwigheden — hier danken wij mede aan hem o. a. een vervanging van de oude Verslagen en Mededeelingen door het moderne Zittingsverslag en zeer in het bizonder de Engelsche vertaling daarvan, waaraan onze Afdeeling een groot deel van haar beteekenis heeft te danken. Men kan verder gaan en zeggen, dat de bloei van onze natuurwetenschappen, niet het minst op het gebied der physica, mede door dit tijdschrift mogelijk is geworden.

Het aftreden van VAN DER WAALS als secretaris ligt reeds meer dan 10 jaar achter ons en zoo zullen er onder de jongere leden velen zijn, die den grooten geleerde, die zich daarna weinig meer liet zien, nauwelijks van aangezicht gekend hebben, laat staan, dat zij eenig begrip hebben van de overheerschende rol, die hij hier in de Akademie speelde.

Een enkele maal waren er wel eens meeningsverschillen, maar uit eerbied voor den grooten man, aan wien de Akademie zooveel te danken had, legde men zijn eigen meening dan dikwijls het zwijgen op.

Als docent had VAN DER WAALS zijns gelijken niet. Hij kwam hier tegelijkertijd met twee andere mannen, die met hem de glorie der Amsterdamsche Universiteit hebben uitgemaakt, met VAN 'T HOFF en HUGO DE VRIES. Later heeft hij zelf BAKHUIS ROOZEBOOM hier gebracht. Ik herinner mij nog levendig, hoe ik als jong student onder den indruk kwam van de colleges van alle drie, in een tijd, toen de propaedeutische colleges nog niet aan lectoren of buitengewone hoogleeraren werden overgelaten. Hoe pakte VAN DER WAALS mij daarbij door de strenge scherpte van zijn betoog, dat toevallig juist over de warmteverschijnselen liep en dat geïllustreerd werd door zeer demonstratieve proeven, door zijn assistent genomen. Want experimentator was VAN DER WAALS niet; hij was het type van den zuiver theoretischen physicus. Maar toch wist hij ook in het laboratorium leiding te geven, en hoe groot is het aantal dergenen geweest die aan zijn theoretische beschouwingen de grondslagen danken voor hun experimenteel werk! Ik wees er reeds op, maar ik zou het scherper kunnen uitdrukken door te zeggen, dat de geheele moderne ontwikkeling der physica in Nederland, waarop wij zoo trotsch zijn, voor een groot deel aan VAN DER WAALS te danken is.

Door de engere leerlingen hoorde men steeds met groote vereering spreken over zijn colleges en zijn leiding en dat niettegenstaande hij veel eischte; want gemakkelijk was VAN DER WAALS niet. Onder de studenten waren velen, die zelfs eenigszins bang voor hem waren, die met schrik en beven naar een tentamen of een examen toe gingen. Geheel ten onrechte, voor wie de wetenschap ernstig nam; want inderdaad was VAN DER WAALS iemand met een zacht hart, maar hij duldde geen spelen met de wetenschap en kon dan wel eens aan zijn verontwaardiging uiting geven in niet zeer malsche termen. Dit gevoegd bij de eenigszins scherpe krakende stem maakt het begrijpelijk, dat een

aantal studenten, die hem niet goed kenden, min of meer bang voor hem waren. Daarbij kwam, dat men VAN DER WAALS weinig zag lachen; de grondtrek van zijn karakter was ernstig. En toch, ook hier moest men hem nader kennen, om hem somtijds zeer opgewekt te zien. Vroeger wellicht meer dan in later tijd, sedert de dood van zijn vrouw een zeer zware schaduw op zijn leven had geworpen.

Wanneer in volgende eeuwen de geschiedenis van Nederland en van de Nederlandsche wetenschap in de tweede helft der 19e eeuw beschreven zal worden, zal men zeker opmerken, hoe op een tijd, die zich kenmerkte door een zekere dufheid en doodschheid, een geweldige opbloei der natuurwetenschappen volgde en daar is VAN DER WAALS een der grootsten geweest, die den weg gewezen heeft aan vele anderen.

Dat men zijn werk ook in het buitenland onder het allerbeste wist te waardeeren vermeldde ik reeds; het is bovendien gebleken uit de vele hooge onderscheidingen, die hem ten deel zijn gevallen. Zelf heeft hij als een bijzondere eer gevoeld de toekenning van den Nobelprijs en het lidmaatschap van de „Académie des Sciences" te Parijs. Maar wij kunnen er van verzekerd zijn, dat ook in komende eeuwen de naam van VAN DER WAALS genoemd zal worden onder de groote physici der negentiende eeuw.

Plantkunde. — De Heer SCHOUTE brengt, mede namens de Heeren VAN ITERSON en BLAAUW, het volgende rapport uit:

De verhandeling van Dr. A. C. J. VAN GOOR, getiteld: „Die holländischen Meeresalgen insbesondere der Umgebung von Helder, des Wattenmeeres, und der Zuidersee", bevat als hoofdbestanddeel een systematische opsomming van de tot dusver aan de Nederlandsche kusten gevonden Rood-, Bruin- en Groenwieren. Hierbij is van elke soort vermeld waar en wanneer zij is aangetroffen en waar zij haar verspreidingsgebied heeft buiten Nederland. Bijna steeds komen daarbij dan mededeelingen omtrent eigen waarnemingen van den schrijver, waarbij ook de tijd der fructificatie wordt vermeld, en een kritische beschouwing van de juistheid der determinaties van vroegere auteurs.

Schrijver heeft hiervoor een omvangrijke studie gemaakt van de zeer verspreide literatuur, heeft de voornaamste Nederlandsche wier-herbaria nauwkeurig geraadpleegd en heeft vooral zelf in alle jaargetijden een groot aantal waarnemingen verricht. Hierdoor is een geheel ontstaan, dat voor zoover zulks in dergelijke zaken bereikbaar is, een hoogen graad van volledigheid bezit en dat daardoor alleen reeds groote waarde heeft.

Verder bevat het werk een aantal kortere hoofdstukken, o. a. over de rijpingstijd der wieren, over wier-associaties en over de geschiedenis der wier-flora; ook treffen wij er een sleutel in aan ter bepaling onzer zeewieren.

We hebben hier dus een werk voor ons, dat een belangrijk onderdeel onzer Nederlandsche flora op grond van eigen waarneming grondiger en uitvoeriger behandelt dan dit tot dusver door vorige schrijvers is geschied en het is reeds hierom gewenscht, dat het werk gepubliceerd wordt.

Alvorens echter aan de Afdeeling voor te stellen de verhandeling onder onze Werken op te nemen, wenschen ondergeteekenden te wijzen op enkele bedenkingen, die bij hen zijn gerezen, en waaraan de schrijver althans ten deele zeker gemakkelijk zal kunnen tegemoet komen.

In de eerste plaats de titel van het werk: "Die holländischen Meeresalgen". Aangezien in de verhandeling noch de Blauwwieren, noch de Kiezelwieren zijn behandeld, is de titel wel wat algemeen gesteld, en niet geheel in overeenstemming met den inhoud.

Verder zijn de titels van één hoofdstuk en van eenige paragrafen, naar het ons voorkomt zonder eenige noodzaak, in het Latijn gesteld. Een titel als "Generum clavis analytica" wekt de verwachting

dat er inderdaad een in het Latijn geschreven sleutel zal volgen, zooals men die meermalen in systematische werken aantreft. Dit is echter niet het geval; de tabel is evenals al het andere in het Duitsch geschreven.

Hoofdstuk VI, over de samenstelling en de vermoedelijke geschiedenis van onze wierflora, doet, hoewel het veel aantrekkelijks heeft, toch enkele bezwaren rijzen. Wanneer schrijver vaststelt, dat van de Nederlandsche zeewieren 96 °/₀ ook worden aangetroffen aan de Engelsche kust, en slechts 56 °/₀ bij Helgoland, dan volgt daaruit nog niet onomstootelijk, dat onze flora veel meer met de Engelsche overeenstemt dan met de Helgolandsche. Immers de flora van een klein gebied als Helgoland zal allicht veel armer zijn dan die van Engeland; voor een goede beoordeeling zou men ook dienen te weten hoeveel van de Engelsche en van de Helgolandsche soorten bij ons worden aangetroffen. Schrijver vindt het zeer opmerkelijk, dat 86 °/₀ van onze soorten ook in Noord-Amerika groeien, en slechts 76 °/₀ aan de Deensche kust; ook dit berust op dezelfde oorzaak, en in ieder geval zeggen deze getallen zonder de reciproke waarden niet heel veel.

Ten slotte heeft de Commissie nog één belangrijk bezwaar tegen het geheele werk, en dat is de omstandige en omslachtige wijze waarop alles wordt meegedeeld. Op tal van plaatsen treffen we herhalingen aan.

Ook doet het in den "Index topographicus" eigenaardig aan, dat alle in het werk vermelde plaatsen vrij uitvoerig worden omschreven.

Wanneer het primitieve kaartje, dat aan het werk is toegevoegd, en waarop al de plaatsen met letters worden aangeduid, wordt vervangen door een beter, waarop de plaatsnamen voluit staan, dan kan de heele Index topographicus o. i. vervallen.

De Commissie hoopt en vertrouwt, dat de schrijver geneigd zal zijn het werk in de genoemde opzichten te herzien en met de gemaakte opmerkingen rekening te houden; overigens wil de Commissie op grond van de aangegeven verdiensten de opneming van het werk in de Verhandelingen der Akademie met klem aan de Afdeeling aanbevelen.

(get.) G. van Iterson Jr.
,, A. H. Blaauw.
,, J. C. Schoute.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusies van dit rapport. De Heer Schoute zal zich in verbinding stellen met den schrijver om het manuscript in den voorgestelden zin te wijzigen.

De Heer P. van Romburgh brengt vervolgens, mede namens de Heeren F. A. F. C. Went en J. Böeseken, prae-advies uit over een verslag van den Heer A. Goudswaard omtrent een door dezen gevonden bereidingswijze van aloïne, welk verslag door den Minister van Koloniën aan de Afdeeling werd gezonden met verzoek haar oordeel te mogen vernemen,

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusies van dit prae-advies, dat thans ter kennis van den Minister zal gebracht worden.

De Voorzitter herinnert er aan, dat dit jaar weer een oproeping gedaan moet worden van personen, die in aanmerking wenschen te komen voor uitzending naar de laboratoria van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg op kosten van het Buitenzorg-fonds, aangevuld met eene Rijkssubsidie. Hij noodigt derhalve de leden-botanici der Afdeeling uit, om, na overleg met de hoogleeraren in de plantkunde aan de Rijks-Universiteiten, niet behoorende tot de leden der Akademie, eene oproeping te doen, opdat uit de zich aanmeldende candidaten de Afdeeling een voordracht ter uitzending aan den Minister van O. K. en W. zal kunnen overleggen.

Geologie. — L. RUTTEN: „*Geologische gegevens uit het gebied van den „Vogelkop" van Nieuw Guinea.*"

Het groote noordwestelijke schiereiland van Nieuw Guinea behoort nog tot de minst bekende deelen van den Indischen Archipel. In nieuweren tijd heeft R. D. M. VERBEEK in zijn „Molukkenverslag" er eenige gegevens over kunnen mededeelen [1]), C. E. A. WICHMANN heeft op een tocht van de oostkust naar Horna een geplooide, kolenhoudende formatie ontdekt [2]), en het is aangetoond, dat deze kolenhoudende formatie van tertiairen ouderdom is [3]). Gedurende de laatste jaren — tusschen 1917 en 1921 — heeft echter de dienst van het Mijnwezen in Nederlandsch Indië uitvoerige onderzoekingen in Noord Nieuw Guinea laten verrichten en daarbij ook in den „vogelkop" naar olie en steenkool geprospecteerd. De resultaten dezer onderzoekingen zijn nog niet gepubliceerd [4]). Voor eenige jaren ontving ik echter van den chef van het Mijnwezen in Nederlandsch Indië een vrij groote collectie kalksteenen en mergels ter bewerking. De bestudeering dezer verzameling is nu vrijwel afgeloopen. Het heeft weinig zin om hier in detail mededeelingen te doen over deze verzameling, welker beschrijving waarschijnlijk elders zal gepubliceerd worden. Wel is het misschien de moeite waard om een kort overzicht over de verkregen resultaten te geven.

Hoewel het niet absoluut zeker is, dat alle onderzochte gesteenten van tertiairen ouderdom zijn, mag dit voor de allermeeste toch als vaststaande worden beschouwd. Gaat men nu op het bijgevoegde kaartje na, uit welke deelen van den „vogelkop" de bestudeerde gesteenten afkomstig zijn, dan wordt het onmiddellijk duidelijk, dat *tertiaire afzettingen in het noordwestelijke Nieuw Guinea een zeer groote verspreiding moeten hebben.* Volmaakt in harmonie met wat overigens op Nieuw Guinea bekend is, schijnen echter onder de tertiaire afzettingen *eocene gesteenten zeer schaarsch te zijn.* Slechts in twee gebieden werden ze aangetroffen: in de eerste plaats tus-

1) Jaarboek Mijnwezen Ned. Indië 1908. Wetensch. Gedeelte.

2) Nova Guinea. IV. 1917.

3) Nova Guinea. VI. 2. 1914.

4) I. C. O.-Commissie, The history and present state of scientific research in the Dutch East Indies. Geology. p. 28. 1923.

schen het eiland Roemberpon en Horna, waar naast oligomiocene kalksteenen op twee vindplaatsen Nummulieten-Alveolinenkalksteen



en Alveolina-Lacazinakalksteen verzameld zijn, terwijl van den Kampong Horna Lacazina-kalksteenen afkomstig zijn; in de tweede plaats uit het noordwestelijk gedeelte van den „vogelkop”, waar éénmaal Lacazinakalksteenen verzameld zijn. Terwijl hieruit al blijkt, dat eoceen een zeer geringe verspreiding heeft, moet nog opgemerkt worden, dat de gesteenten van de beide vindplaatsen, waar alleen Lacazina werd gevonden, nog niet met absolute zekerheid tot het eoceen kunnen gebracht worden, al is de waarschijnlijkheid bijzonder groot. Uit het gebied tusschen Roemberpon (Amberpon) en Horna heb ik reeds vroeger gesteenten beschreven, die op grenslagen tusschen eogeen en neogeen wijzen [1]).

Van een bijzonder groot aantal vindplaatsen zijn daarentegen *kalksteenen van litorale facies uit het oudere neogeen* bekend, die door het voorkomen van Lepidocyclina, Miogypsina en Cycloclypeus gekarakteriseerd worden. Reeds vroeger [1]) waren dergelijke kalksteenen beschreven uit het gebied tusschen Roemberpon en Horna en uit de Andai-rivier bij Manokwari. Het blijkt nu, dat zij in een breede noord-zuid gerichte zone bewesten Roemberpon optreden; dat ze zich bij Manokwari zeker nog een eind verder zuidwaarts uitstrekken dan Andai, en dat men ze vervolgens in een zone, die de geheele noordkust van den „vogelkop” volgt, tot op het eiland

---

[1]) Nova Guinea. VI. 2. 1914.

Batanta aantreft. Men ziet onmiddellijk, dat we hier met eene betrekkelijk vrij smalle zone van oud-neogeen te doen hebben, die de oostkust en de noordkust van den „vogelkop" volgt. Het is mogelijk, dat ook in de meer westwaarts en zuidwaarts gelegen gebieden van den „vogelkop" nog oud-neogeen voorkomt, maar het is toch wel merkwaardig, dat er onder de talrijke gesteenten, die door mij uit die gebieden onderzocht zijn, geen enkel was, dat met zekerheid tot het oudere neogeen kon gebracht worden. Voor een deel is dit — zooals we straks zullen zien — het gevolg ervan, dat de facies der gevonden gesteenten indifferent is, dat men óf met fossielvrije gesteenten te doen heeft óf met gesteenten, die in een diepere zee zijn afgezet, waarin men de voor het litorale oudneogeen zoo karakteristieke fossielen niet mag verwachten. Maar daarnaast treden toch in het zuidelijk deel van den „vogelkop" herhaaldelijk gesteenten op, die van litorale facies zijn, waarin bijvoorbeeld Lithothamnium, Operculina en Amphistegina, welke in het oudere neogeen steeds de begeleiders van de Lepidocyclinen enz. zijn, voorkomen, maar waarin de voor het oudere neogeen kenmerkende Foraminiferen ontbreken. We zullen in dergelijke gevallen zeker met *jong-neogeen* te doen hebben, *waarop trouwens ook vaak de habitus der gesteenten wijst.* Zoo komt in het stroomgebied van de Aer Beraoer en van de Aer Klasaman een reeks van gesteenten voor, die tot het jong neogeen moeten gerekend worden. Een tweede gebied van waarschijnlijk jong-neogene gesteenten, deels van echt litoralen habitus ligt ten Noorden van het Amaroe-meer. Tusschen het Amaroe-meer en de Aer Beraoer zijn een aantal gesteenten gevonden: globigerinenmergels, fijnkorrelige kalkzandsteenen en dergelijke, die ten eenenmale indifferent zijn, zoodat over hunnen ouderdom niets gezegd kan worden. Hetzelfde geldt van eenige gesteenten uit het gebied bezuiden het Amaroe-meer. Van een lange lijst van gesteentemonsters, die in een west-oost gerichte zone ver benoorden het Amaroe-meer verzameld zijn, is het zeker, dat ze tot het neogeen behooren, maar hunne fossielen en hunne facies zijn te weinig karakteristiek om te kunnen uitmaken, of men met oud- of jong-neogeen te doen heeft. In enkele gesteenten werden echter onzekere Lepidocyclinen aangetroffen; de overige zijn tot de „indifferente gesteenten" gebracht. Ten laatste komen onder gesteenten uit het stroomgebied van de Aer Sebjar eenige litorale kalken voor, waarin „oudere" vormen ten eenenmale ontbreken, zoodat we ook hier waarschijnlijk met jonger neogeen te maken hebben. Daarentegen moeten een aantal zeer fijnkorrelige kalkzandsteenen en globigerinenkalken, die oostelijk van de Moetoeri-rivier verzameld zijn,

tot de „indifferente gesteenten" gerekend worden. Het is mogelijk, dat zij van oud-neogenen ouderdom zijn, omdat in het oostwaarts aangrenzende gebied — bewesten Roemberpon — enkele overgangsgesteenten tusschen echte litorale Lepidocyclinenkalken en Globigerinenkalken aangetroffen zijn.

Een laatste gebied van waarschijnlijk jong-neogene gesteenten treft men noordelijk en westelijk van Manokwari aan. Hier komen Globigerinenmergels en rulle kalkzanden voor, die wel is waar geen kenmerkende fossielen bevatten, maar die om hun zeer jongen habitus toch waarschijnlijk tot het jongere neogeen moeten gebracht worden. Inderdaad komt hiermede overeen, dat sommige kalksteenen in dit gebied van litorale facies zijn, maar geen Lepidocyclina, Cycloclypeus of Miogypsina bevatten. Reeds vroeger zijn van het eilandje Manaswari bij Manokwari kalksteenen beschreven, die voor jong-neogeen zijn gehouden [1]).

Tusschen de vindplaatsen van oud-neogene kalken bezuiden Manokwarie en die bewesten Roemberpon ligt het hooge Arfakgebergte, dat volgens Verbeek [2]) en Wichmann [3]) uit dieptegesteenten, schisten en leien bestaat. Uit het gebied zuidoostelijk van het Arfakgebergte ontving ik nu drie gesteenten, die zeer waarschijnlijk tertiair zijn en die uit *detritus van het Arfakgebergte* zijn opgebouwd. Het zijn drie grofkorrelige arkosen van marine genese, die naast Koralen zeer schaarsche Globigerinen bevatten. Aan mineralen komen veel kwarts, orthoklaas, perthiet en minder plagioklaas en biotiet voor: we hebben blijkbaar met den detritus van zure granieten te doen.

Ook in het *noordelijk deel van den „vogelkop"* treffen we in de gesteenten van tertiairen ouderdom — en wel vooral in de oudneogene gesteenten — herhaaldelijk grofkorreligen *detritus van oude gesteenten* aan, een bewijs ervoor, dat in de diepte — en wellicht ook nog aan de oppervlakte — *een gebergte van veel oudere gesteenten moet voorkomen.* Op de plaatsen, die op het kaartje met eene σ zijn aangegeven, komen n. l. in de kalksteenen afgerolde fragmenten van kwartsiet en phylliet voor. Een gesteente uit het stroomgebied der Aer Sebjar bevatte korrels van perthiet en orthoklaas, die aan de detritus-gesteenten van het Arfakgebergte doen denken.

Zonder twijfel zullen de publicaties van het Mijnwezen over deze „oudere gesteenten" in den „vogelkop" interessante gegevens bevatten.

---

[1]) Nova Guinea. VI. 2. p. 29. 42.

[2]) Nova Guinea IV. p. 97.

[3]) Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. (2). 21. 1904.

Scheikunde. — F. A. H. SCHREINEMAKERS: „*In-, mono- en divariante evenwichten*" XXIII.

Evenwichten van n komponenten in n + 1 phasen, als de hoeveelheid van één der komponenten tot nul nadert. De invloed van een nieuwe stof op een invariant evenwicht (*Vervolg*).

Wij schrijven de isovolumetrische reactie van een evenwicht $E(x=0)$:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots = 0 \quad \Sigma (\lambda H)_V > 0 \quad \Sigma (\lambda V) = 0. \quad . \quad (1)$$

en de isentropische:

$$\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \ldots = 0 \quad \Sigma (\mu H) = 0 \quad \Sigma (\mu V)_H > 0. \quad . \quad (2)$$

In reactie (1) vormen zich dus bij warmtetoevoer, en in (2) bij volumenvergrooting die phasen, die een negatieven reactiecoefficient hebben. Wij hebben dus

$$\Sigma (\lambda x)_V = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \text{ en } \Sigma (\mu x)_H = -\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 - \ldots$$

Trekt men beide reactievergelijkingen (1) en (2) van elkaar af, na de eerste met μ_1 en de tweede met λ_1 vermenigvuldigd te hebben, dan vindt men de reactie:

$$(\mu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \mu_2) F_2 + (\mu_1 \lambda_3 - \lambda_1 \mu_3) F_3 + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin de entropieverandering is $\mu_1 \Sigma (\lambda H)_V$ en de volumenverandering $-\lambda_1 \Sigma (\mu V)_H$.

Daar (3) de reactie voorstelt, die in het evenwicht $(F_1) = F_2 + F_3 + \ldots$ kan optreden, heeft men:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_1 = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\Sigma (\lambda H)_V}{\Sigma (\mu V)_H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hierin geeft $\left(\frac{dP}{dT}\right)_1$ de richting aan van kurve (F_1) in het invariante punt. Op dezelfde wijze vindt men:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_2 = -\frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\Sigma (\lambda H)_V}{\Sigma (\mu V)_H}; \left(\frac{dP}{dT}\right)_3 = -\frac{\mu_3}{\lambda_3} \frac{\Sigma (\lambda H)_V}{\Sigma (\mu V)_H} \text{ enz.} \quad (5, 6)$$

Daar men uit (1) en (2) ook de temperatuur- en de drukrichting der verschillende monovariante kurven kan afleiden, is het P,T-diagram dus quantitatief bepaald.

Wij voegen aan het evenwicht nu een nieuwe stof X toe, die in

de phasen F_1 F_2 ... met de concentraties x_1 x_2 ... optreedt. Volgens (13) en (15) (XXII) hebben wij nu:

$$\frac{\Sigma(\lambda H)_V}{RT} \cdot (dT)_x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots = -\Sigma(\lambda x)_V. \quad . \quad (7)$$

$$\frac{\Sigma(\mu V)_H}{RT} \cdot (dP)_x = -(\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 \ldots = \Sigma(\mu x)_H. \quad . \quad (8)$$

Met behulp van (4) enz. kan men hiervoor ook schrijven:

$$\frac{\Sigma(\mu V)_H}{RT} \cdot (dT)_x = -x_1\mu_1\left(\frac{dT}{dP}\right)_1 - x_2\mu_2\left(\frac{dT}{dP}\right)_2 - \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{\Sigma(\lambda H)_V}{RT} \cdot (dP)_x = x_1\lambda_1\left(\frac{dP}{dT}\right)_1 + x_2\lambda_2\left(\frac{dT}{dP}\right)_2 + \quad . \quad . \quad (10)$$

Uit (8) en (9) volgt:

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_x = -\frac{x_1\mu_1}{\Sigma(\mu x)_H} \cdot \left(\frac{dT}{dP}\right)_1 - \frac{x_2\mu_2}{\Sigma(\mu x)_H} \cdot \left(\frac{dT}{dP}\right)_2 - \quad . \quad . \quad (11)$$

uit (7) en (10):

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_x = -\frac{x_1\lambda_1}{\Sigma(\lambda x)_V} \cdot \left(\frac{dP}{dT}\right)_1 - \frac{x_2\lambda_2}{\Sigma(\lambda x)_V} \cdot \left(\frac{dP}{dT}\right)_2 - \quad . \quad . \quad (12)$$

en uit (7) en (8):

$$\frac{\Sigma(\mu V)_H}{\Sigma(\lambda H)_V} \cdot \left(\frac{dP}{dT}\right)_x = -\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots} \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Wij zien uit (7) dat men $(dT)_x$ kan uitdrukken met behulp van de isovolumetrische reactie (1); uit (9) blijkt dat men $(dT)_x$ echter niet kan uitdrukken met behulp van de isentropische reactie (2) alleen, maar dat men dan tevens de richtingen der monovariante kurven (F_1) (F_2) ... van het evenwicht $E(x=0)$ moet kennen.

Uit (8) blijkt dat men $(dP)_x$ kan uitdrukken met behulp van de isentropische reactie (2); uit (10) ziet men echter dat men $(dP)_x$ niet kan bepalen met behulp van de isovolumetrische reactie alleen, maar dat men daartoe tevens weer de richtingen der kurven (F_1) (F_2) ... moet kennen.

De richting der monovariante kurve E is, zooals uit (13) blijkt, te bepalen met behulp der isovolumetrische en isentropische reactie; uit (11) en (12) volgt dat zij ook te bepalen is met behulp der richtingen der kurven (F_1) (F_2) ... en één der beide reacties.

Voegt men een nieuwe stof X toe, die alleen in één der phasen b.v. in F_1 optreedt, dan moet men in (7)—(13) $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ ... stellen. Daar nu $\Sigma(\lambda x)_V = -\lambda_1 x_1$ is, volgt uit (12):

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_x = \left(\frac{dP}{dT}\right)_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wat natuurlijk eveneens dadelijk uit (11) volgt. Kurve E en (F_1) hebben in het invariante punt dus dezelfde raaklijn. Dat zij van dit punt uit ook in dezelfde temperatuur — en drukrichting gaan, volgt uit (7) en (8). Is nl. λ_1 positief, dan volgt uit reactie (1) dat kurve (F_1) van uit het invariante punt naar hoogere temperaturen gaat. Daar uit (7) echter volgt dat $(dT)_x$ dan ook positief is, gaat kurve E dus eveneens naar hoogere T. Is λ_1 negatief dan gaan kurve (F_1) en E beide naar lagere T. Uit (2) en (8) volgt dat beide kurven ook dezelfde drukrichting hebben.

In overeenstemming met vroeger (Mededeeling XXII) vinden wij dus: treedt de nieuwe stof alleen in de phase F_1 op, dan valt kurve E samen met kurve (F_1).

Treedt de nieuwe stof alleen op in de phasen F_1 en F_2 dan gaat (12) over in:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + K\lambda_2}\left(\frac{dP}{dT}\right)_1 + \frac{K\lambda_2}{\lambda_1 + K\lambda_2}\left(\frac{dP}{dT}\right)_2 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarin $K = \frac{x_2}{x_1}$. Hieruit volgt:

$$d\left(\frac{dP}{dT}\right)_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + K\lambda_2)^2}\left[\left(\frac{dP}{dT}\right)_2 - \left(\frac{dP}{dT}\right)_1\right]dK \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Om de gedachten te bepalen nemen wij aan dat $\left(\frac{dP}{dT}\right)_2$ grooter is dan $\left(\frac{dP}{dT}\right)_1$. Wij onderscheiden nu twee gevallen.

1. λ_1 en λ_2 hebben hetzelfde teeken. Uit (15) en (16) blijkt het volgende. Als K verandert van 0 tot ∞ dan neemt $\left(\frac{dP}{dT}\right)_x$ toe van $\left(\frac{dP}{dT}\right)_1$ tot $\left(\frac{dP}{dT}\right)_2$ zonder maximum, minimum of discontinu te worden.

2. λ_1 en λ_2 hebben tegengesteld teeken. Als K verandert van 0 tot ∞ dan neemt $\left(\frac{dP}{dT}\right)_x$ zonder maximum of minimum te worden af van $\left(\frac{dP}{dT}\right)_1$ tot $-\infty$, gaat discontinu over tot $+\infty$ en daalt dan tot $\left(\frac{dP}{dT}\right)_2$.

Zijn λ_1 en λ_2 beide positief, dan gaan volgens reactie (1) beide kurven (F_1) en (F_2) van uit het invariante punt naar hoogere temperaturen; zijn λ_1 en λ_2 beide negatief dan gaan beide kurven naar lagere T; hebben λ_1 en λ_2 tegengesteld teeken, dan gaan beide

kurven van uit het invariante punt in tegengestelde temperatuurrichting.

Uit dit alles volgt dat de raaklijn aan kurve E ligt binnen den hoek, gevormd door de kurven (F_1) en (F_2). [Onder hoek verstaan wij natuurlijk den hoek, die kleiner is dan 180°]. Daar voor $K = 0$ (dus $x_2 = 0$) kurve E met (F_1) en voor $K = \infty$ (dus voor $x_1 = 0$) kurve E met (F_2) samenvalt, volgt dus de eigenschap, die wij reeds in de vorige mededeeling ook afleidden, nl.:

Kurve E ligt tusschen de kurven (F_1) en (F_2) of met andere woorden: in het veld $(F_1\ F_2)$.

Wij vinden echter ook nog:

Kurve E ligt des te dichter bij kurve (F_1), naar gelang de concentratie van de nieuwe stof in de phase F_1 ten opzichte van die in F_2 grooter is; en des te dichter bij kurve (F_2), naar gelang de concentratie van de nieuwe stof in de phase F_2 ten opzichte van die in F_1 grooter is.

Treedt de nieuwe stof alleen op in de phasen $F_1\ F_2$ en F_3, dan vindt men in overeenstemming met vroeger dat kurve E in het veld $(F_1\ F_2\ F_3)$ ligt.

Ligt een der kurven b.v. (F_3) tusschen de beide andere (F_1) en (F_2) dan ligt kurve E ook tusschen (F_1) en (F_2). Ligt echter geen der drie kurven tusschen de beide andere, dan kan kurve E van uit het invariante punt in elke willekeurige richting gaan.

Wij beschouwen thans het binaire evenwicht

$$E\,(x = 0) = F + L_1 + L_2 + G$$

wij stellen de samenstelling, de entropie en het volumen van

F	door	y	$1-y$	H en	V
L_1	„	y_1	$1-y_1$	H_1 en	V_1
L_2	„	y_2	$1-y_2$	H_2 en	V_2
G	„	y_3	$1-y_3$	H_3 en	V_3

voor. Voegt men een nieuwe stof X toe, dan noemen wij haar concentratie in deze phasen $x\ x_1\ x_2$ en x_3.

Om de isovolumetrische en isentropische reactie af te leiden gaan wij uit van 2 willekeurige reacties; wij kiezen daartoe:

$$F + a\,L_2 \rightarrow (1 + a)\,L_1 \qquad \triangle H \ \triangle V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$(1 + b)\,L_2 \rightleftarrows F + b\,G \qquad \triangle H' \ \triangle V' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Hierin is:

$\triangle H = (1 + a)\,H_1 - H - aH_2 \qquad \triangle H' = H + bH_3 - (1 + b)\,H_2$

$\triangle V = (1 + a)\,V_1 - V - aV_2 \qquad \triangle V' = V + bV_3 - (1 + b)\,V_2$

In (17) en (18) kunnen a en b zoowel positief als negatief zijn. Uit (17) en (18) volgt voor de isovolumetrische reactie:

$$(\Delta V + \Delta V')\, F - (1+a)\, \Delta V'\, L_1 + [a \Delta V' - (1+b)\, \Delta V]\, L_2 + b \Delta V \,.\, G = 0$$
$$\Delta H \Delta V' - \Delta H' . \Delta V \quad 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

en voor de isentropische reactie:

$$-(\Delta H + \Delta H')\, F + (1+a) \Delta H' .\, L_1 - [a \Delta H' - (1+b) \Delta H]\, L_2 - b \Delta H \,.\, G = 0$$
$$0 \quad \Delta H \Delta V' - \Delta H' \Delta V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Wij voegen nu aan dit evenwicht $E(x=0)$ een nieuwe stof X toe, die alleen in de vloeistoffen L_1 en L_2 optreedt. Met behulp van (19) en (20) volgt dan uit (7) en (8):

$$M \,.\, (dT)_x = -(1+a)\, \Delta V' .\, x_1 + [a \Delta V' - (1+b)\, \Delta V]\, x_2 \;. \quad (21)$$
$$M \,.\, (dP)_x = -(1+a)\, \Delta H' .\, x_1 + [a \Delta H' - (1+b)\, \Delta H]\, x_2 \;. \quad (22)$$

waarin:

$$M = (\Delta H . \Delta V' - \Delta H' . \Delta V) : RT$$

Uit (21) en (22) volgt: voegt men aan het evenwicht $E(x=0)$ een nieuwe stof toe, die alleen in de beide vloeistoffen optreedt, dan kan zoowel de temperatuur als de druk verhoogd of verlaagd worden.

Wij zullen nu aannemen dat de vier phasen ten opzichte van elkaar liggen, zooals op de lijn YZ in fig. 1. Wij hebben dan

$$y > y_1 > y_2 > y_3$$

Uit (17) en (18) volgt ter bepaling van a en b:

$$y + a\, y_2 = (1+a)\, y_1 \qquad (1+b)\, y_2 = y + b y_3$$

$$a = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} \qquad b = \frac{y - y_2}{y_2 - y_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

zoodat a en b positief zijn. Wij nemen verder aan dat F en L_1 en ook dat L_1 en L_2 niet zeer dicht bij elkaar liggen, zoodat a niet zeer klein en ook niet zeer groot is. Als F en L_2 en eveneens L_2 en G niet te dicht bij elkaar liggen, dan is b eveneens niet zeer klein en niet zeer groot.

Daar $\Delta V'$ nu positief en zeer groot is ten opzichte van ΔV is M positief.

Verder kan men de volgende gevallen onderscheiden

$$a) \quad \left.\begin{array}{llll} \Delta H > 0 & \Delta V \gtrless 0 & \Delta H' > 0 & \Delta V' > 0 \\ \multicolumn{2}{l}{a \Delta H' - (1+b) \Delta H > 0} & \multicolumn{2}{l}{a \Delta V' - (1+b) \Delta V > 0} \end{array}\right\} \quad (24)$$

$$b) \quad \left.\begin{array}{llll} \Delta H > 0 & \Delta V \gtrless 0 & \Delta H' > 0 & \Delta V' > 0 \\ \multicolumn{2}{l}{a \Delta H' - (1+b) \Delta H < 0} & \multicolumn{2}{l}{a \Delta V' - (1+b) \Delta V > 0} \end{array}\right\} \quad (25)$$

$$c) \quad \left.\begin{array}{llll} \Delta H > 0 & \Delta V \gtrless 0 & \Delta H' < 0 & \Delta V' > 0 \\ \multicolumn{2}{l}{a \Delta H' - (1+b) \Delta H < 0} & \multicolumn{2}{l}{a \Delta V' - (1+b) \Delta V > 0} \end{array}\right\} \quad (26)$$

In elk der drie bovengenoemde gevallen is in (21) de coefficient van x_1 negatief en van x_2 positief; wij hebben dus:

$$(dT)_x \gtrless 0 \quad \text{als} \quad \frac{x_2}{x_1} \gtrless \frac{(1+a)\,\Delta V'}{a\,\Delta V' - (1+b)\,\Delta V} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Daar $\Delta V'$ zeer groot is ten opzichte van ΔV volgt hieruit met behulp van (23) bij benadering:

$$(dT)_x \gtrless 0 \quad \text{als} \quad \frac{x_2}{x_1} \gtrless \frac{y-y_2}{y-y_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

In het sub b genoemde geval zijn in (22) de coefficienten van x_1 en x_2 negatief, zoodat $(dP)_x$ ook negatief is; de druk wordt dus verlaagd.

Om het teeken van $(dP)_x$ nader te onderzoeken schrijven wij voor (22)

$$M\,(dP)_x = \left[x_2 - \frac{\Delta H'}{\Delta H' - \dfrac{1+b}{a}\Delta H} \cdot \frac{1+a}{a}\,x_1\right] N \quad . \quad . \quad (29)$$

waarin:

$$N = a\,\Delta H' - (1+b)\,\Delta H$$

Zet men hierin de waarde van a uit (23) dan kan men voor (29) schrijven:

$$M\,.\,(dP)_x = \left[\frac{x_2}{x_1} - \frac{\Delta H'}{\Delta H' - \dfrac{1+b}{a}\Delta H} \cdot \frac{y-y_2}{y-y_1}\right] N x_1 \quad . \quad . \quad (30)$$

Beschouwt men de drie bovengenoemde gevallen a, b en c dan kan men voor (30) schrijven:

$$a) \qquad (dP)_x = \left[\frac{x_2}{x_1} - (1+K)\frac{y-y_2}{y-y_1}\right] L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$$b) \qquad (dP)_x = -\left[\frac{x_2}{x_1} + K\frac{y-y_2}{y-y_1}\right] L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$c) \qquad (dP)_x = \left[-\frac{x_2}{x_1} + (1-K)\frac{y-y_2}{y-y_1}\right] L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

waarin L, K, $1+K$ en $1-K$ positief zijn. In elk der drie formulen hebben L en K verschillende waarden.

Om het bovenstaande toe te passen nemen wij de fig. 1 en 2, waarin XY een zijde is van den komponentendriehoek XYZ. De punten FL_1 L_2 en G stellen de vier phasen van het invariante binaire evenwicht $E(x=0) = F + L_1 + L_2 + G$ voor. Voegt men een nieuwe stof X toe, dan ontstaat het ternaire evenwicht $E = F + L_1 + L_2 + G$. De vloeistoffen L_1 en L_2 doorloopen dan

de kurven $L_1 q_1 r_1$ en $L_2 q_2 r_2$; daar de nieuwe stof niet vluchtig is, doorloopt G een deel der lijn XZ.

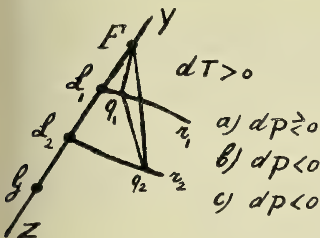


Fig. 1.

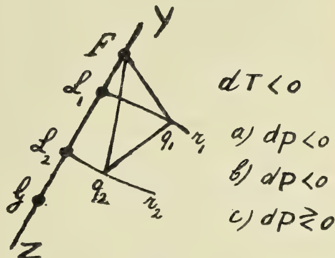


Fig. 2.

Voegt men slechts weinig van de nieuwe stof toe, dan worden de vloeistoffen voorgesteld door de punten q_1 en q_2 in de onmiddellijke nabijheid van L_1 en L_2; duidelijkheidshalve zijn ze in de figuren op grooteren afstand geteekend.

In fig. 1 is:

$$\frac{x_2}{y-y_2} > \frac{x_1}{y-y_1} \qquad \text{of} \qquad \frac{x_2}{x_1} > \frac{y-y_2}{y-y_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

dus volgens (28): $(dT)_x > 0$, zooals ook in de figuur is aangegeven. Uit (31)—(33) volgt:

$$\begin{aligned} &\text{in geval } a \text{ is } (dP)_x \gtrless 0 \\ &\quad ,, \quad ,, \quad b \ ,, \ (dP)_x < 0 \\ &\quad ,, \quad ,, \quad c \ ,, \ (dP)_x < 0 \end{aligned}$$

zooals eveneens in fig. 1 is aangegeven.

In fig. 2 is:

$$\frac{x_2}{y-y_2} < \frac{x_1}{y-y_1} \quad \text{of} \quad \frac{x_2}{x_1} < \frac{y-y_2}{y-y_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Uit (28) volgt: $(dT)_x < 0$. Uit (31)—(33) volgt:

$$\begin{aligned} &\text{in geval } a \text{ is } (dP)_x < 0 \\ &\quad ,, \quad ,, \quad b \ ,, \ (dP)_x < 0 \\ &\quad ,, \quad ,, \quad c \ ,, \ (dP)_x \gtrless 0 \end{aligned}$$

zooals eveneens in fig. 2 is aangegeven.

In fig. 1 kan in het geval a de druk zoowel rijzen als dalen; uit (31) blijkt dat $(dP)_x$ positief zal zijn voor groote waarden van $x_2 : x_1$. Daar L_1 (en dus ook q_1) de vloeistof is, die het meest van

de vaste stof F bevat, zullen wij L_1 (en dus ook q_1) de geconcentreerde en L_2 (en dus ook q_2) de verdunde oplossing noemen.

Wij vinden dus het volgende:

Keert de driephasendriehoek vast-vloeistof-vloeistof zijn geconcentreerde oplossing naar de zijde van den componenten-driehoek (fig. 1), dan rijst de temperatuur en daalt in het algemeen de druk; alleen als de concentratie van de nieuwe stof in de verdunde vloeistof (dus x_2) veel grooter is dan in de geconcentreerde (dus x_1), dan kan in het geval a de druk ook rijzen.

In fig. 2 kan in het geval c de druk zoowel rijzen als dalen; uit (33) blijkt dat $(dP)_x$ positief zal zijn voor kleine waarden van $x_2 : x_1$.

Wij vinden dus het volgende:

Keert de driephasendriehoek vast-vloeistof-vloeistof zijn geconcentreerde vloeistof van de zijde van den komponentendriehoek af (fig. 2), dan daalt de temperatuur en in het algemeen ook de druk. Alleen als de concentratie van de nieuwe stof in de geconcentreerde oplossing (dus x_1) veel grooter is dan in de verdunde (dus x_2) dan kan in het geval c de druk ook rijzen.

Wij kunnen de vorige uitkomsten ook krijgen door gebruik te maken van het P,T-diagram van het evenwicht $E(x=0)$. Wij kunnen dit op de volgende wijze afleiden.

De temperatuur-richting van het evenwicht $(G) = F + L_1 + L_2$ wordt bepaald door het teeken van den coefficient van de phase G in de isovolumetrische reactie (19). Daar $b \triangle V$ zoowel positief als negatief kan zijn, kan kurve (G) van uit het invariante punt i zoowel naar hoogere als lagere temperaturen gaan.

De drukrichting van het evenwicht (G) wordt bepaald door het teeken van den coefficient van G in de isentropische reactie (20). Daar $-b \triangle H$ in elk der gevallen a, b en c negatief is, gaat kurve (G) van uit het invariante punt i naar hoogere drukken.

Daar verder volgens (17):

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_G = \frac{\triangle H}{\triangle V}$$

en $\triangle V$ zeer klein is, gaat kurve (G) van uit punt i dus bijna vertikaal in de hoogte. In fig. 3 en 4 is deze kurve vertikaal naar boven geteekend; de dubbele pijl geeft aan dat zij van i uit zoowel naar rechts als naar links kan gaan.

Daar de coefficient $-(1+a)\triangle V'$ van de phase L_1 in elk der gevallen a, b en c negatief is, gaat volgens (19) kurve $(L_1) = F + L_2 + G$ van uit punt i naar lagere temperaturen (fig. 3 en 4).

In de gevallen a en b is de coefficient $(1+a)\triangle H_1$ van phase L_1 in vergelijking (**20**) positief, zoodat kurve (L_1) van i uit naar lagere drukken gaat (fig. 3). In het geval c is $(1+a)\triangle H^1$ negatief en gaat kurve (L_1) dus van i uit naar hoogere drukken (fig. 4). Dit is ook in overeenstemming met wat uit (18) volgt nl.:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{L_1} = \frac{\triangle H'}{\triangle V'}$$

Wij hebben de richting der kurven (G) en (L_1) dus bepaald; fig. **3** geldt voor de gevallen a en b, fig. 4 voor geval c.

Wij zouden met behulp van (19) en (20) verder ook de ligging der kurven (F) en (L_2) kurven afleiden en dan kunnen aantoonen dat de vier kurven ten opzichte van elkaar liggen zooals in fig. 3 en **4**. [Men zie b.v. Mededeeling **XIII**]. Nu wij de ligging der kurven (G) en (L_1) echter kennen, kunnen wij die van (F) en (L_2) echter veel gemakkelijker vinden door gebruik te maken van den regel voor de ligging der vier monovariante kurven van een binair evenwicht. [Men zie Mededeeling I, fig. 2].

Volgens dezen regel moet men, als men van kurve (G) in de richting van de wijzers van een uurwerk naar kurve (L_1) gaat,

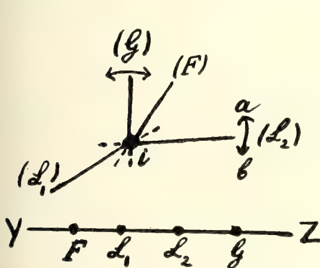


Fig. 3.

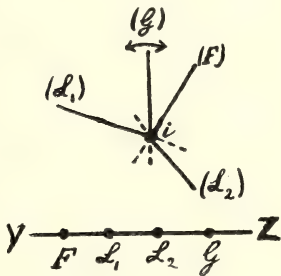


Fig. 4.

eerst kurve (F) en daarna kurve (L_2) ontmoeten. Daar verder (G) en (F) een bundel moeten vormen en hun verlengde tusschen (L_1) en (L_2) moeten liggen en daar de hoek tusschen twee op elkaar volgende kurven altijd kleiner dan 180° moet zijn, volgt hieruit voor de kurven (F) en (L_2) eene ligging als in de fig. 3 en 4.

In fig. 3 is kurve (L_2) horizontaal geteekend, zij kan van i uit zoowel naar boven als naar beneden gaan; dit is aangegeven door het dubbel pijltje. Gaat zij van i uit naar boven, dan moet haar

verlengde toch altijd boven kurve (L_1) liggen. Uit den coefficient van de phase L_2 in reactie (20) blijkt dat kurve (L_2) in geval a van i uit naar boven en in geval b van i uit naar beneden moet gaan. Ook dit is in fig. 3 aangegeven.

Nu wij het P, T—diagram van het evenwicht $E(x=0)$ kennen kunnen wij de ligging van de kurve E gemakkelijk bepalen. Uit onze algemeene beschouwingen in het begin van deze mededeeling volgt nl. dat kurve E moet liggen tusschen de kurven (L_1) en (L_2) Voor $x_2 : x_1 = \infty$ valt kurve E met (L_2) samen, voor $x_2 : x_1 = 0$ met kurve (L_1). Verandert $x_2 : x_1$ van ∞ tot 0 dan beweegt kurve E zich in de richting van de wijzers van een uurwerk van uit (L_2) naar (L_1).

Wij nemen nu eerst het geval a, zoodat wij ons in fig. 3 kurve (L_0) van uit i naar boven geteekend moeten denken. Laat men nu $x_2 : x_1$ van ∞ tot 0 veranderen, dan volgt uit de liggingen, die de kurve E kan krijgen, dat de volgende gevallen kunnen optreden:

$$(dT)_x > 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x > 0$$
$$(dT)_x > 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$
$$(dT)_x < 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$

In geval b moeten wij ons in fig. 3 kurve (L_2) van uit i naar beneden denken. Laat men $x_2 : x_1$ veranderen van ∞ van 0, dan volgt uit de ligging van kurve E:

$$(dT)_x > 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$
$$(dT)_x < 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$

In geval c geldt fig. 4. Verandert $x_2 : x_1$ weer van ∞ tot 0, dan volgt uit de ligging van kurve E:

$$(dT)_x > 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$
$$(dT)_x < 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x < 0$$
$$(dT)_x < 0 \quad \text{en} \quad (dP)_x > 0$$

Men ziet dat deze afleidingen met de vorige en met de fig. 1 en 2 in overeenstemming zijn.

Onze vorige beschouwingen gelden alle in de veronderstelling dat de vier phasen $F\, L_1 L_2$ en G ten opzichte van elkaar liggen als in de fig. 1—4 aangegeven. Liggen de vier phasen anders ten opzichte van elkaar, dan kan de lezer op overeenkomstige wijze alles afleiden.

Wij zullen nu aannemen dat de nieuwe stof vluchtig is, zoodat hij in de phasen $L_1 L_2$ en G met de concentraties $x_1 x_2$ en x_3 optreedt.

Met behulp van (7) en (19) vindt men:

$$M(dT)_x = -(1+a)\,\Delta V' x_1 + [a\Delta V_1 - (1+b)\,\Delta V]\, x_2 + b\,\Delta V \,.\, x_3 \qquad (36)$$

en met (8) en (20):

$$M.(dP)_x = -(1+a)\Delta H' x_1 + [a\Delta H' - (1+b)\Delta H] x_2 + b\Delta H\, x_3 \qquad (37)$$

waarin

$$M = (\Delta H . \Delta V' - \Delta H' . \Delta V) : RT$$

zoodat temperatuur- en drukrichting van kurve E door (36) en (37) bepaald zijn.

Daar ΔV zeer klein is in vergelijking met V' kan men in (36), zoolang x_3 niet zeer groot is, de termen met ΔV verwaarloozen; bij benadering volgt dan:

$$(dT)_x \gtrless 0 \quad \text{voor} \quad \frac{x_2}{x_1} \gtrless \frac{y-y_2}{y-y_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Eerst voor zeer groote waarden van x_3 in vergelijking met x_1 en x_2 en zal de term $b\Delta V . x_3$ in (36) een groote rol gaan spelen en zal bij benadering

$$(dT)_x = \frac{RT\,\Delta V}{\Delta H . \Delta V'} bx_3 = \frac{RT}{\Delta V'} . \left(\frac{dT}{dP}\right)_G bx_3 \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

zijn.

In (37) is ΔH niet klein in vergelijking met $\Delta H'$ en zal de term $b\Delta H . x_3$ dus reeds bij niet te kleine waarden van x_3 zijn invloed doen gelden.

In het algemeen zal dus, naarmate de nieuwe stof vluchtiger is, zijn invloed op $(dT)_x$ en $(dP)_x$ grooter zijn en zich eerder doen gelden op $(dP)_x$ dan op $(dT)_x$.

Wij kunnen over de ligging van kurve E ook iets afleiden met behulp van de algemeene beschouwingen in het begin dezer mededeeling. Hieruit volgt nl. dat kurve E moet liggen of tusschen de kurven (L_1) en (L_2) of tusschen (L_1) en (G) of tusschen (L_2) en (G). Daar in de fig. 3 en 4 het verlengde van elk dezer drie kurven tusschen de beide andere ligt, kan kurve E dus van uit punt i in iedere richting gaan.

De temperatuur kan dus zoowel toe- als afnemen, en de druk kan zoowel bij toe- als bij afnemende temperatuur rijzen of dalen, al naar gelang de ligging van kurve E.

Uit (12) volgt:

is x_1 uiterst klein ten opzichte van x_2 en x_3 dan ligt kurve E tusschen (G) en (L_2);

is x_2 uiterst klein ten opzichte van x_1 en x_3 dan ligt kurve E tusschen (G) en (L_1);

is x_3 uiterst klein ten opzichte van x_1 en x_2 dan ligt kurve E tusschen (L_1) en (L_2);

is x_1 uiterst groot ten opzichte van x_2 en x_3 dan ligt kurve E in de nabijheid van (L_1);

is x_2 uiterst groot ten opzichte van x_1 en x_3 dan ligt kurve E in de nabijheid van (L_2);

is x_3 uiterst groot ten opzichte van x_1 en x_2 dan ligt kurve E in de nabijheid van (G).

In elk dezer gevallen kan men uit de fig. 3 en 4 dadelijk zien welke teekens $(dT)_x$ en $(dP)_x$ kunnen hebben.

Is b.v. x_2 zeer klein ten opzichte van x_1 en x_3 dan ligt kurve E tusschen (L_1) en (G); geldt nu fig. 4 dan zal de druk dus altijd toenemen en de temperatuur afnemen. Alleen in het bijzondere geval dat x_3 ook nog uiterst groot is ten opzichte van x_1 en tevens $\Delta V > 0$ [kurve (G) gaat dan van i uit een weinig naar rechts] kan de temperatuur een weinig dalen.

Voegt men een nieuwe stof toe, die niet vluchtig is, maar mengkristallen vormt met de vaste stof F, dan hebben wij in fig. 3 en 4 te maken met de kurven (F) (L_1) en (L_3). Uit de ligging dezer drie kurven ten opzichte van elkaar blijkt dat de vorige beschouwingen ook voor dit geval gelden.

Wil men $(dT)_x$ berekenen dan moet men zooals uit (19) blijkt in (36) $b \Delta V x_3$ vervangen door $(\Delta V + \Delta V')\, x$. Verwaarloost men weer de termen met ΔV dan vindt men:

$$M(dT)_x = [x - (1+a)\, x_1 + a x_2]\, \Delta V'$$

of

$$(dT)_x = \frac{RT}{\Delta H} \cdot \frac{x\,(y_1 - y_2) - (y - y_2)\, x_1 + (y - y_1)\, x_2}{y_1 - y_2} \quad . \quad . \quad (40)$$

In fig. 5 en 6 stelt YZ een zijde van den komponentendriehoek voor, $F\, L_1\, L_2$ en G de vier phasen van het invariante binaire evenwicht $E(x=0)$. Voegt men een nieuwe stof toe, dan ontstaat het ternaire evenwicht $E = F + L_1 + L_2 + G$. De vaste stof F en de vloeistoffen L_1 en L_2 doorloopen dan de kurven $F\,q\,r$, $L_1\, q_1\, r_1$ en $L_2\, q_2\, r_2$. Voegt men slechts weinig van de nieuwe stof toe, dan worden de 3 phasen voorgesteld door de punten $q\, q_1$ en q_2, die men zich in de onmiddellijke nabijheid van de zijde YZ moet denken.

Stelt men: $t = x\,(y_1 - y_2) - (y - y_2)x_1 + (y - y_1)x_2$ en beschouwt men x en y als loopende coördinaten, dan stelt $t = 0$ de vergelijking voor van de rechte lijn, die in fig. 5 en 6 door q_1 en q_2 gaat.

Ligt het punt q op de lijn $q_1 q_2$ dan is $t = 0$; het teeken van $(dT)_x$ wordt dan bepaald door de termen, die in (40) verwaarloosd zijn.

Ligt q rechts van de lijn $q_2 q_1$ (nl. als men van q_2 naar q_1 gaat), zooals in fig. 5, dan is $t > 0$; ligt q links van de lijn $q_2\, q_1$, zooals in fig. 6, dan is $t < 0$. Hieruit volgt dus dat in fig. 5 de temperatuur

toe- en in fig. 6 de temperatuur afneemt, zooals ook in beide figuren is aangegeven.

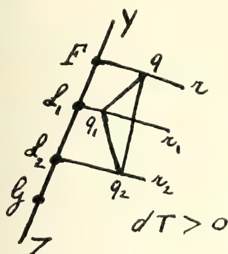


Fig. 5.

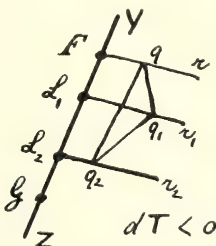


Fig. 6.

Wij vinden dus het volgende:

voegt men aan het invariante binaire evenwicht $E\,(x=0) = F + L_1 + L_2 + G$ een niet vluchtige stof toe, die met de vaste stof F mengkristallen vormt, dan wordt

de temperatuur verhoogd, als de driephasendriehoek vast-vloeistof-vloeistof zijn geconcentreerde vloeistof naar de zijde van den komponentendriehoek keert (fig. 5)

en verlaagd, als die driephasendriehoek zijn geconcentreerde oplossing van die zijde afkeert. (fig. 6).

Bij vergelijking van fig. 1 met fig. 5 en van fig. 2 met fig. 6 zal de lezer zien dat dus voor de temperatuursverandering dezelfde regels gelden onverschillig of de nieuwe stof al of niet met F mengkristallen vormt.

Ten slotte zouden wij nog het algemeene geval kunnen behandelen dat de nieuwe stof niet alleen mengkristallen vormt met F maar ook vluchtig is.

Uit fig. 3 en 4 volgt, in verband met de beschouwingen in het begin dezer mededeeling, dat kurve E van uit punt i in alle richtingen kan gaan.

Om $(dT)_x$ te bepalen moet men in (36) nu nog den term $(\Delta V + \Delta V')\,x$ opnemen; wij krijgen dan weer bij benadering (40), tenzij x_3 uiterst groot is.

De fig. 5 en 6 blijven dus ook in dit geval gelden, tenzij de driephasendriehoek $q\,q_1\,q_2$ zeer smal wordt en de concentratie van de nieuwe stof in den damp uiterst groot is.

(*Wordt vervolgd*).

Leiden. Anorganisch Chem. Lab.

Wiskunde. — JAN DE VRIES: „*Afbeelding van de lijnelementen van een vlak op de raaklijnen van een hyperboloïde*".

1. Om een afbeelding te verkrijgen van de lijnelementen (P,l) van een vlak α beschouw ik een hyperboloïde H, die α in A raakt en volgens de rechten a_1 en a_2 snijdt. Zij R de projectie van P op H uit het op H gelegen punt O, ϱ het raakvlak in R, r de snijlijn van ϱ met het vlak Ol, dan beschouw ik r als het *beeld* van het door P en l gevormde *lijnelement.*

Is, omgekeerd, r een raaklijn van H, R het raakpunt, P de projectie van R, l de projectie van r, dan heeft het lijnelement (P,l) de raaklijn r tot beeld [1]).

De rechten van H, die elkaar in O snijden, noem ik b_1 en b_2; b_1 snijdt α in een punt B_1 van a_2, b_2 gaat door een punt B_2 van a_1.

2. Als l door B_1 gaat en P met B_1 samenvalt, dan is R het raakpunt van het vlak $b_1 l$, en elke in dat vlak gelegen raaklijn r kan als beeld (B_1,l) worden beschouwd. Dus is (B_1,l) een *singulier* element en zijn beeld de waaier (r) om R. Als l om B_1 wentelt, doorloopt de waaier (r) de parabolische bilineaire congruentie, met richtlijn b_1, gevormd door de raaklijnen, die hun raakpunten op b_1 hebben. Analoog zijn de lijnelementen (B_2,l) *singulier.*

Is B een willekeurig punt der rechte $b \equiv B_1B_2$, dan ligt R in O. Het lijnelement (B,b) is dus ook *singulier* en wordt afgebeeld door den waaier (o) der rechten, die H in O aanraken, en in het raakvlak ω liggen.

Dus is, omgekeerd, elke raaklijn o *singulier*, daar zij alle elementen (B,b) afbeeldt. Maar tevens is zij het beeld van alle elementen, waarvan het punt P in den doorgang van o ligt, want r wordt uit O geprojecteerd door elk vlak, dat r bevat. De waaier (O,ω) is dus het beeld van het nulstelsel N (0,1), waarin N op b ligt.

Zij g_1 een rechte van H, die b_2 en a_2 snijdt, zoodat haar projectie $\bar{g}_1$ door B_2 gaat. Daar elk punt van g_1 als raakpunt R is te beschouwen, is P een willekeurig punt van $\bar{g}_1$ en g_1 het beeld van alle op $\bar{g}_1$ gelegen lijnelementen. De rechten der regelscharen (g_1) en (g_2) zijn dus *singuliere raaklijnen.*

[1]) Een fraaie afbeelding der lijnelementen van α op de punten der ruimte vindt men in het proefschrift van Dr. G. SCHAAKE. (*Afbeeldingen van figuren op de punten eener lineaire ruimte*, P. Noordhoff, 1922).

3. Door het symbool (λ,π) worde een stelsel van lijnelementen (P,l) aangeduid, waarin de punten P op een kromme van den graad π liggen, en de rechten l een kromme van de klasse λ omhullen.

Het beeld van een *waaier* (1,0) is blijkbaar een *waaier* van raaklijnen. Als P in A ligt, valt de waaier (r) met den waaier (A,l) samen. De waaiers (B_1,l) en (B_2,l) worden afgebeeld door congruenties (1,1) (zie § 2).

Het beeld van een *stelsel* (0,1) bestaat uit de raaklijnen van een kegelsnede λ^2, gelegen in het projecteerend vlak der vaste rechte l.

Een *stelsel* (1,1) bestaat uit de lijnelementen, waarvan P op een rechte c ligt en l door een punt D gaat. Als P de rechte c beschrijft, doorloopt R een kegelsnede γ^2 (door O) en ϱ omhult den raakkegel, die de pool van het vlak γ van γ^2 tot top heeft. Het vlak $\delta \equiv Ol$ wentelt om $d \equiv OD$ en beschrijft een bundel, die projectief is met het stelsel der raakvlakken ϱ (index 2). De beeldrechten r beschrijven dus een *kubisch regelvlak,* waarvan d de dubbele richtlijn en γ^2 een richtkromme is.

De doorsnee van dit regelvlak $(r)^3$ met het vlak γ bestaat blijkbaar uit de kegelsnede γ^2 en de raaklijn o, die op c rust, en het beeld is van het tot (1,1) behoorend lijnelement (B,b). De snijpunten van γ^2 met c liggen op de rechten a_1 en a_2; de lijnelementen, waartoe zij behooren, worden afgebeeld door de raaklijnen van $(r)^3$, die, afgezien van o, op c rusten. Tot $(r)^3$ behooren twee rechten van H; zij snijden elkaar op d en zijn de beelden der lijnelementen, waarvoor l door B_1 of B_2 gaat.

4. Zij nu gegeven een *stelsel* (λ,π). De kromme (P), die van den graad π is, wordt uit O geprojecteerd door een kegel van denzelfden graad en deze snijdt H volgens een kromme (R) van den graad 2π (met dubbelpunt in O). Het poolvlak van het willekeurig gekozen punt F bevat dus 2π punten R; hieruit volgt, dat de raakvlakken ϱ een oppervlak van de klasse 2π omhullen. Bij elk vlak ϱ behoort één vlak Ol; daarentegen zijn aan een vlak Ol (dat π punten P bevat) π vlakken ϱ toegevoegd. De vlakken Ol en de raakvlakken ϱ bepalen op een willekeurige rechte een verwantschap met kenmerkende getallen $\lambda\pi$ en 2π. Door elke coïncidentie gaat een beeldrechte r, dus wordt het *stelsel* (λ,π) door een *regelvlak* van den graad $(\lambda + 2)\pi$ afgebeeld.

Een stelsel (λ,π) bevat 2λ rechten l, die door B_1 of door B_2 gaan. Daar zij elk π lijnelementen dragen, bevat het regelvlak 2λ *rechten der hyperboloïde,* die ieder π-voudige rechten van het regelvlak zijn.

Het stelsel $(1,\pi)$, waarin de punten P een kromme (P) van den

graad π vormen, die een $\varkappa$-voudig punt D heeft, terwijl alle rechten l in D samenkomen, vereischt een afzonderlijke beschouwing. Immers hier bevat een vlak Ol slechts $(\pi-\varkappa)$ punten P, bepaalt dus slechts $(\pi-\varkappa)$ vlakken ϱ. De kenmerkende getallen der verwantschap tusschen de punten eener rechte zijn thans $(\pi-\varkappa)$ en 2π, zoodat het *stelsel* $(1,\pi)$ wordt afgebeeld door een *regelvlak* van den graad $(3\pi-\varkappa)$, waarop de rechte OD blijkbaar 2π-voudig is.

Een stelsel $(1,\pi)$ van de hier bedoelde soort vindt men bij een *nulstelsel* $N(\mu,\nu)$, als men de meetkundige plaats zoekt van de nulpunten der stralen van een waaier om een punt D. Deze *nulkromme* is toch een kromme van graad $(\mu+\nu)$ met μ-voudig punt D, zoodat de lijnelementen een stelsel $(1,\mu+\nu)$ vormen.

5. Een *nulstelsel* $N(\mu,\nu)$ wordt afgebeeld door een stralencongruentie $[r]$. De rechte a_1 is nulstraal voor ν van haar punten P en de raaklijn r, die (P,a_1) afbeeldt, valt langs a_1. Dus zijn a_1 en a_2 ν-voudige stralen der congruentie; de veldgraad van $[r]$ is dus 2ν.

Zij Q de centrale projectie van het punt F. De nulkromme van Q wordt geprojecteerd door een kegel van den graad $(\mu+\nu)$ en deze heeft $2(\mu+\nu)$ punten R gemeen met de kegelsnede volgens welke H wordt gesneden door het poolvlak van F. Hieruit volgt, dat de stergraad der congruentie $2(\mu+\nu)$ is. Het beeld van een $N(\mu,\nu)$ is dus een *congruentie* $(2\mu+2\nu, 2\nu)$.

Een *bilineair nulstelsel* $N(1,1)$ wordt dus door een congruentie $(4,2)$ afgebeeld. De *singuliere punten* S_1, S_2, S_3 bepalen op H drie punten R_1, R_2, R_3; deze zijn de toppen van drie waaiers (r_1), (r_2), (r_3) welke de waaiers om de punten S afbeelden, dus *singuliere punten* der congruentie $[r]$. De lijnelementen op de drie *singuliere rechten* $s_1 \equiv S_2S_3$, s_2 en s_3 worden afgebeeld door de raaklijnen van drie kegelsneden σ_k^2 door O. De vlakken σ_k, waarin zij liggen, zijn *singuliere vlakken* der congruentie. Ook het vlak $\sigma \equiv R_1R_2R_3$ is *singulier*, want het bevat van elk der waaiers (r_k) een straal. Alle raaklijnen der kegelsnede σ^2, waarin H door σ wordt gesneden, behooren dus tot $[r]$. Op σ^2 ligt een punt B_1^* van b_1 en een punt B_2^* van b_2. Ook deze twee punten zijn *singulier*, want de raaklijn in B_1^* aan σ^2 behoort als beeld bij het lijnelement van $N(1,1)$ dat in B_1 zijn nulpunt heeft; maar dit wordt afgebeeld door *elken* straal van den waaier (r) om B_1^*.

Het nulpunt der rechte b wordt afgebeeld door den waaier (O,ω); dus is ook O een *singulier punt* der congruentie $(4,2)$.

6. De *omhullingskegel* met top F is de afbeelding van een ∞^1

stelsel van lijnelementen, waarvan de punten P gelegen zijn op de kegelsnede π^2, welke de centrale projectie is van de kegelsnede ϱ^2 in het poolvlak van F. De rechten l gaan door de projectie Q van F. Elke rechte l is de projectie van een kegelsnede door O, bevat dus twee punten P, overeenkomende met de twee in Ol gelegen punten R van ϱ^2. De kegel om F heeft dus tot beeld een stelsel (1,2). De kegelsnede π^2 gaat door B_1 en B_2, het punt Q is dubbel te tellen als klassekromme van l.

Als F de rechte f doorloopt vormen de overeenkomstige raakkegels een *congruentie* (2,2) met *richtlijn* f. De aanrakingskrommen ϱ^2 gaan door de snijpunten S_1^*, S_2^* van H met de poollijn van f en rusten op b_1 en b_2. Dus vormen de krommen π^2 een bundel met de basispunten B_1, B_2, S_1, S_2, die *singuliere nulpunten* zijn. Door een punt P gaat één rechte l; immers het overeenkomstige punt R draagt één raaklijn r, die op f rust en tot projectie heeft de rechte $l \equiv PQ$.

Een rechte l bepaalt een punt Q van de projectie q van f, dus een punt F en hieruit gaan twee raaklijnen r naar de in Ol gelegen kegelsnede. De bedoelde *congruentie* (2,2) wordt dus afgebeeld door een *nulstelsel* $N(1,2)$.

De rechte f snijdt het raakvlak $\omega \equiv b_1 b_2$ in een punt F^*, waarvan de projectie S op b ligt en *singulier nulpunt* is, omdat de raaklijn OS alle lijnelementen om S afbeeldt.

De snijpunten F_1^* en F_2^* van f met H zijn singulier voor de congruentie (2,2); hun projecties F_1 en F_2 op α zijn dus *singuliere nulpunten.*

Hiermee zijn de *zeven singuliere nulpunten* aangewezen, welke $N(1,2)$ moet hebben [1]).

Door F_1^* gaan twee rechten g_1 en h_2 van H, door F_2^* twee rechten g_2 en h_1. Die vier rechten vormen een scheeve vierzijde; g_1 en g_2 snijden elkaar in S_1^*, h_1 en h_2 in S_2^*; g_1 en h_1 rusten op b_2, g_2 en h_2 op b_1. De projecties $\bar{g}_1$, $\bar{h}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{h}_2$ dezer rechten zijn blijkbaar *singuliere nulstralen* en vormen een vierzijde, welke de singuliere nulpunten S_1, S_2; F_1, F_2; B_1, B_2 tot hoekpunten heeft. Immers $B_1 \equiv \bar{g}_2 \bar{h}_2$, $B_2 \equiv \bar{g}_1 \bar{h}_1$; $F_1 \equiv \bar{g}_1 \bar{h}_2$, $F_2 \equiv \bar{g}_2 \bar{h}_1$; $S_1 \equiv \bar{g}_1 \bar{g}_2$, $S_2 \equiv \bar{h}_1 \bar{h}_2$.

Het vlak Of snijdt H volgens een kegelsnede, waarvan de raaklijnen tot $[r]$ behooren; dus is de rechte q (projectie van f) een *singuliere nulstraal.* Op q liggen de singuliere nulpunten F_1, F_2 en S. Maar S is doorgang van een raaklijn o, dus tevens een punt van den *singulieren nulstraal* $b \equiv B_1 B_2$. De singuliere elementen van $N(1,2)$

---

[1]) Zie b.v. mijn mededeeling over vlakke lineaire nulstelsels in deel XXI der Verslagen (bl. 1070).

vormen dus de figuur der hoekpunten, nevenhoekpunten en zijden van een *volledigen vierhoek*. Dit nulstelsel is dus gelijksoortig met het $N(1,2)$ dat ontstaat, wanneer men aan elke rechte haar snijpunten met de kegelsnede, waarin zij door een involutorische quadratische verwantschap wordt gesneden, als nulpunten, toevoegt [1]).

7. Door vijf raaklijnen r wordt een *lineaire complex* A bepaald; deze heeft met den raaklijnencomplex van H een congruentie (2,2) gemeen. De afbeelding op α is weer een *nulstelsel* $N(1,2)$; immers een punt P bepaalt een punt R en in ϱ ligt één straal van den waaier, die in A het nulpunt van ϱ tot top heeft; en een rechte l bepaalt op H een kegelsnede, waarvan twee raaklijnen tot den lineairen complex behooren.

Deze heeft met elk der regelscharen van H twee rechten gemeen; zij vormen een scheeve vierzijde $g_1\,g_2\,h_1\,h_2$, waarvan de hoekpunten *singuliere punten* zijn voor de congruentie (2,2). Immers, het punt $g_1\,g_2$ is in A nulpunt van het vlak ϱ, dat door g_1 en g_2 is bepaald, zoodat alle raaklijnen in dat punt tot de beide complexen behooren. Bijgevolg zijn de punten $\overline{g}_1\,\overline{g}_2$, $\overline{g}_2\,\overline{h}_1$, $\overline{h}_1\,\overline{h}_2$ en $\overline{h}_2\,\overline{g}_1$ *singuliere nulpunten* van het in α gelegen nulstelsel (1,2).

Daar g_1 en h_1 op b_2 rusten, gaan $\overline{g}_1$ en $\overline{h}_1$ door B_2; dus zijn B_1 en B_2 *singuliere nulpunten*. De zes nulpunten zijn ook hier de hoekpunten van een volledige vierzijde, waarvan de zijden *singuliere nulstralen* zijn. De waaier (O,ω) bevat een straal van A, die dan ook tot de congruentie behoort; zijn doorgang S is het *zevende singuliere punt* van $N(1,2)$. Daar S op b ligt, terwijl B_1 en B_2 singulier zijn, is ook b een *singuliere nulstraal*.

8. De raaklijnencomplex $\{r\}$ heeft met een complex van den n^{en} graad, Γ^n, een *congruentie* $(2n, 2n)$ gemeen, die tot beeld heeft een *nulstelsel* $N(n,2n)$. Met elke regelschaar van H heeft Γ^n $2n$ rechten gemeen; dus bezit het nulstelsel $4n$ *singuliere rechten*, waarvan $2n$ door B_1 en $2n$ door B_2. Dus zijn B_1 en B_2 *singuliere nulpunten*. Blijkbaar is de rechte b een *singuliere nulstraal*.

[1]) Het algemeene nulstelsel (1,2) heeft geen singuliere nulstralen (t.a.p. bl. 1072).

Wiskunde. — H. D. KLOOSTERMAN: „*Een stelling betreffende machtreeksen van oneindig veel veranderlijken, met toepassing op reeksen van* DIRICHLET"[1]).

(Aangeboden door de Heeren J. C. KLUIJVER en P. EHRENFEST).

§ 1. Door H. BOHR[2]) is een belangrijk verband gevonden tusschen de theorie der reeksen van DIRICHLET eenerzijds en de theorie der machtreeksen van oneindig veel veranderlijken andererzijds (we zullen afgekort schrijven: machtreeksen v. o. v. v.). Laat

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad , \quad s = \sigma + it \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

een gewone reeks van DIRICHLET voorstellen. Zet men $x_1 = \frac{1}{2^s}$, $x_2 = \frac{1}{3^s}, \ldots x_m = \frac{1}{p_m^s}, \ldots$ (waar p_m het m-de priemgetal is), en is $n = p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \ldots p_{n_r}^{\nu_r}$ de ontbinding van n in priemfaktoren, dan kan men de reeks (1) *zuiver formeel* schrijven als een machtreeks v. o. v. v., als volgt:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \ldots x_{n_r}^{\nu_r} =$$

$$c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha \leq \beta}} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots \\ \alpha \leq \beta \leq \gamma}} c_{\alpha\,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots$$

Het bedoelde verband is door BOHR o.a. toegepast op het z.g. *absolute konvergentieprobleem* voor de reeksen van DIRICHLET, d. w. z. de bepaling van de absolute konvergentie-abscis van (1) (de onderste grens van alle getallen β, zoodanig dat (1) voor $\sigma > \beta$ absoluut konvergeert), met behulp van (liefst zoo eenvoudig mogelijke) analytische eigenschappen van de door (1) voorgestelde functie. Laat B de absolute konvergentie-abscis van (1) zijn en D de onderste grens van alle getallen α, zoodanig, dat $f(s)$ voor $\sigma > \alpha$ *regulair* en *begrensd* is. Het absolute konvergentieprobleem is opgelost als men het verschil $B - D$ kent. BOHR bewijst, dat $B = D$ voor iedere reeks van

[1]) Uitvoeriger mededeelingen hieromtrent zullen elders verschijnen.
[2]) Göttinger Nachrichten, 1913.

DIRICHLET, die *zuiver formeel* voorgesteld kan worden in één van de beide volgende vormen:

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}$$

of

$$f(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right),$$

of wat op hetzelfde neerkomt, voor iedere reeks van DIRICHLET, waarvoor de bijbehoorende machtreeks v. o. v. v. den vorm

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Q_n(x_n)) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

heeft, waar $Q_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ een machtreeks is in x_n zonder konstanten term. Dit hangt daarmee samen, dat de machtreeksen (2) en (3) de eigenschap hebben, dat uit

a. Begrensdheid [1]) voor $|x_n| \leqslant G_n$ $(n = 1, 2, \ldots .)$, volgt

b. Absolute konvergentie voor $|x_n| \leqslant \theta G_n$, waar θ een willekeurig positief getal in het interval $0 \leqslant \theta < 1$ is [2]).

Beschouwen we de machtreeksen (2) en (3), dan zien we, dat de veranderlijken x_n in zekere mate afgezonderd van elkaar optreden. Dit voerde BOHR tot het vermoeden, dat de gelijkheid $B = D$ geldt voor iedere reeks van DIRICHLET, waarbij de veranderlijken in de

---

[1]) Naar HILBERT (Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variabeln, Palermo Rendiconti, Bd. 27, pag. 67) heet een machtreeks v. o. v. v. begrensd, als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

1⁰. De machtreeksen $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ (*Abschnitte*), die men uit de machtreeks v. o. v. v. verkrijgt, door daarin $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = 0$ te zetten, zijn, voor alle waarden van m, in het gebied $|x_1| \leqslant G_1$, $|x_2| \leqslant G_2, \ldots . |x_m| \leqslant G_m$, absoluut konvergent.

2⁰. Er bestaat een van m onafhankelijk getal K, zoodanig, dat, voor iedere m, in het gebied $|x_1| \leqslant G_1$, $|x_2| \leqslant G_2, \ldots . |x_m| \leqslant G_m$ de ongelijkheid

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K$$

geldt.

[2]) Zooals bekend is, volgt *b* uit *a* voor *iedere* machtreeks van een *eindig* aantal veranderlijken. Oorspronkelijk had HILBERT (zie noot [1])) dit ook voor o. v. v. als vanzelfsprekend aangenomen. BOHR wees er echter op dat dit onjuist is, nl. door het construeeren van een voorbeeld.

bijbehoorende machtreeks v. o. v. v. niet al te zeer vermengd voorkomen. Bevestiging hiervan is het doel van dit opstel. Men kan nl. bewijzen dat $B = D$ voor iedere reeks van DIRICHLET, die *formeel* in den volgenden vorm geschreven kan worden:

$$f(s) = \varphi\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right),$$

waar φ een willekeurige (niet konstante[1]) geheele transcendente functie is. Als gevolg van het reeds meermalen genoemde verband tusschen de twee theorieën is hiermede de volgende stelling betreffende machtreeksen v. o. v. v. equivalent.

Stelling. Is φ een geheele transcendente functie en $Q_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ een *formeele*[2]) machtreeks in x_n, zonder konstanten term en is de machtreeks v. o. v. v. $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \varphi(Q_1(x_1) + Q_2(x_2) + \ldots + Q_m(x_m) + \ldots)$ voor $|x_n| \leqq G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ begrensd, dan is ze voor $|x_n| \leqq \theta G_n$ absoluut konvergent, als $0 < \theta < 1$.

In het volgende zal het bewijs van deze stelling in het kort worden weergegeven.

§ 2. Eenvoudigheidshalve nemen we $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = G > 1$, zoodanig dat $\theta G < 1$.

Vanwege de begrensdheid (zie noot [1]), vorige blz.) bestaat er een van m onafhankelijke konstante K, zoodanig, dat

$$|\varphi(Q_1(x_1) + Q_2(x_2) + \ldots + Q_m(x_m))| < K. \quad . \quad . \quad (4)$$

Het eerste gedeelte van het bewijs van de stelling van § 1 houdt zich bezig met een discussie van de machtreeksen $Q_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Bewezen wordt, dat uit (4) volgt, dat deze alle een zeker konvergentiegebied bezitten. Een verder onderzoek toont, dat zich 2 gevallen kunnen voordoen:

1°. De functies $Q_n(x_n)$ zijn alle regulair voor $|x_n| < G$. Dit is het algemeene geval.

2°. Heeft de geheele transcendente functie $\varphi(y)$ den vorm $V\left(e^{\frac{y}{M}}\right)$ (waar V weer een geheele transcendente functie is), dan kan men slechts besluiten, dat de functies $Q_n(x_n)$ logarithmen zijn, van voor $|x_n| < G$ regulaire functies, n.l. den vorm $Q_n(x_n) = \log(1 + R_n(x_n))$ hebben, waar $R_n(x_n)$ voor $|x_n| < G$ regulair is en $R_n(0) = 0$[3]).

[1]) Voor konstante φ is het triviaal.

[2]) D. w. z. bestaan van een konvergentiegebied wordt niet à priori aangenomen, maar zal blijken een gevolg van de overige gegevens te zijn.

[3]) Interessant is, dat klaarblijkelijk de reeks (2) met $\varphi(y) = y$ tot het eerste geval behoort en de reeks (3) met $\varphi(y) = e^y$, $V(z) = z$, tot het tweede geval.

Kortheidshalve beperken we ons verder tot het eerste geval. (Het bewijs in het tweede geval is niet wezenlijk verschillend, hoewel in details iets ingewikkelder). Dan zijn de functies $Q_n(x_n)$, vanwege $G > 1$ alle in hun resp. cirkels $|x_n| \leqq 1$ regulair.

Voor iedere functie $f(z)$, die regulair is in den cirkel $|z| \leqq 1$, en waarvoor $f(0) = 0$, kunnen we een getal r definieeren als volgt: r is de straal van den grootsten cirkel, waarvan alle punten getallen voorstellen, die door $f(z)$ in den cirkel $|z| \leqq 1$ worden aangenomen. Laat r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de overeenkomstige grootheid voor $Q_n(x_n)$ zijn. Dan bewijzen we nu eerst, dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergeert.

Daartoe beschouwen we (4), geldig voor alle waarden van $x_1, x_2, \ldots x_m$, waarvoor $|x_n| \leqq G$ $(n = 1, 2, \ldots m)$, dus zeker voor $|x_n| \leqq 1$. Omdat $\varphi(y)$ een geheele transcendente functie is, kunnen we een positief getal L zoo groot kiezen, dat het maximum van $|\varphi(y)|$, op den cirkel $|y| = L$, grooter dan K is. Stel nu, dat voor één of andere waarde van m: $r_1 + r_2 + \ldots + r_m > L$. Dan was het maximum van $|\varphi(y)|$ op den cirkel $|y| = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$, grooter dan K. Laten we nu de veranderlijken x_n $(n = 1, 2, \ldots m)$ hun resp. cirkels $|x_n| \leqq 1$ doorloopen, dan neemt daarbij $Q_n(x_n)$ alle waarden op den cirkel $|Q_n(x_n)| = r_n$ aan, en bijgevolg neemt $Q_1(x_1) + Q_2(x_2) + \ldots + Q_m(x_m)$ alle waarden op een cirkel met straal $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ aan. In het bijzonder kunnen we een stel waarden $x'_1, x'_2, \ldots x'_m$ vinden, zoodanig dat

$$y = Q_1(x'_1) + Q_2(x'_2) + \ldots + Q_m(x'_m) = (r_1 + r_2 + \ldots + r_m)e^{i\psi},$$

waar $(r_1 + r_2 + \ldots + r_m)e^{i\psi}$ dat punt van den cirkel $|y| = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ is, waar $|\varphi(y)|$ zijn maximum bereikt. Vólgens het bovenstaande zou dus

$$|\varphi(Q_1(x'_1) + Q_2(x'_2) + \ldots + Q_m(x'_m))| > K,$$

wat in strijd is met (4). De veronderstelling $r_1 + r_2 + \ldots + r_m > L$ kan dus onmogelijk waar zijn. Daar L van m onafhankelijk is, volgt hieruit de konvergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

We passen nu toe de volgende stelling van BOHR [1]):

Stel dat de functie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(f(0) = 0)$, regulair is in den cirkel $|z| \leqq 1$. Laat $M(\varrho)$ het maximum zijn van $|f(z)|$ op den cirkel $|z| = \varrho$ $(0 < \varrho < 1)$. Is dan r de boven reeds gedefinieerde

[1]) Nog niet gepubliceerd.

grootheid, dan is $r \geqslant k\,M(\varrho)$, waar k een slechts van ϱ afhankelijke konstante is (die dus dezelfde is voor alle functies, die aan de voorwaarden van de stelling voldoen).

Is $M_n(\varrho)$ dus het maximum van $Q_n(x_n)$ op den cirkel $|x_n| = \varrho$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dan is $r_n \geqslant k\,M_n(\varrho)$. Daar, zooals boven bewezen is, de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergeert, is dus ook de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n(\varrho)$ voor $\varrho < 1$ konvergent. Hieruit laat zich de stelling van § 1 gemakkelijk afleiden.

Want stel $Q_n(x_n) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p^{(n)} x_n^p \; (n = 1, 2, \ldots)$. Dan is

$$|a_p^{(n)}| \leq \frac{M_n(\varrho)}{\varrho^p} \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ p = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} (\varrho < 1).$$

Is $\Theta = \theta\, G$ (waar θ de in de stelling genoemde grootheid is), dan volgt hieruit voor $\Theta < \varrho < 1$ $\left(\text{neem b.v. } \varrho = \frac{1+\Theta}{2}\right)$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_p^{(n)}|\, \Theta^p \leq \frac{2\,\Theta\, M_n(\varrho)}{1-\Theta}$$

Hieruit volgt de konvergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |a_p^{(n)}|\, \Theta^p\,,$$

en omdat $\varphi(y)$ een machtreeks is, die voor alle y konvergeert, de konvergentie van

$$\varphi\,\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |a_p^{(n)}|\, \Theta^p\Big).$$

Dit houdt in het bijzonder in, de absolute konvergentie van de gegeven machtreeks v. o. v. v. voor $|x_n| \leqslant \Theta = \theta\, G\, (n = 1, 2 \ldots)$.

Het is niet te loochenen, dat het gegevene: φ is een geheele transcendente functie, ietwat onaesthetisch is. Of de stelling geldig blijft, als men φ door een willekeurige (zuiver formeele) machtreeks vervangt, is echter door den schrijver niet kunnen nagaan. In elk geval is de beschreven methode niet zonder meer van toepassing.

Kopenhagen, November 1922.

Wiskunde. — C. B. BIEZENO: *„Een toepassing van de leer der integraalvergelijkingen op de bepaling van de elastische lijn van een over zijn geheele lengte elastisch ondersteunden balk."*

(Aangeboden door de Heeren J. C. KLUIJVER en D. J. KORTEWEG).

1. In deel III, § 48 van het bekende leerboek „Vorlesungen über Technische Mechanik" (5e druk) van FÖPPL wordt een constructie besproken, met behulp waarvan de elastische lijn van een over zijn geheele lengte elastisch ondersteunden balk te benaderen zou zijn.

Wanneer in de differentiaalvergelijking dezer lijn

$$EI\,y'''' + ky = q$$

waarin EI den constanten stijfheidsfactor, k den z.g. beddingscoëfficiënt en q de continue belasting van den balk voorstelt, de functie y als een bekende mocht worden aangezien, zou door viervoudige integratie van $\frac{q-ky}{EI}$ —wat grafisch overeenkomt met de constructie van de elastische lijn van een door bekende krachten belasten balk — deze functie teruggevonden moeten worden.

Het ligt dus voor de hand tastenderwijze een beloop voor de elastische lijn aan te nemen — zoodanig natuurlijk, dat de uit dit beloop voortvloeiende reactiekrachten van den bodem met de gegeven uitwendige belasting van den balk evenwicht maken — om na viervoudige integratie van de aangenomen functie en aanpassing aan de voorwaarden, dat voor de integratiefunctie de tweede en derde afgeleide voor $x = 0$ en $x = l$ ($l =$ lengte balk) nul moeten zijn, te controleeren of het verkregen resultaat overeenstemt met de aangenomen kromme.

„Im allgemeinen", aldus FÖPPL t. a. p., „wird man zunächst eine „starke Abweichung in der Gestalt beider Kurven finden. Dann „ändert man die zuerst gezeichnete Belastungsfläche so ab, dasz „sich die Lastverteilung jetzt der Gestalt der gefundenen elastischen „Linie nähert und wiederholt das Verfahren für diese zweite „Annahme. Die Uebereinstimmung zwischen Belastungsfläche und „zugehöriger elastischen Linie wird jetz besser werden und nach „mehrmaliger Wiederholung findet man mit hinreichender Genauig„keit die wirkliche Druckverteilung".

Hoewel het zeer goed mogelijk is, dat onder bepaalde omstandig-

heden, en vooral bij gelukkig gekozen beginkromme, na eenige herhalingen der beschreven handelwijze een — voor een technisch doel — voldoende overeenstemming tusschen de verkregen en aangenomen krommen zal kunnen optreden, is in het algemeen de convergentie van het proces niet verzekerd.

In de volgende aanteekeningen moge een constructie beschreven worden waarbij de verlangde convergentie gewaarborgd is.

2. Wanneer in de vergelijking

$$E\,I\,y'''' + k\,y = q$$

die met $\frac{k}{El} = k', \frac{q}{El} = q'$ in den vorm

$$y'''' + k'\,y = q'$$

geschreven kan worden, $y'''' = \varphi(x)$ gesteld wordt, gaat zij over in

$$\varphi(x) + k' \int_0^x \varphi(x)\,dx^4 = q' + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

of, met toepassing van de bekende betrekking

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx^4 = \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\,\varphi(s)\,ds$$

in

$$\varphi(x) + k' \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\,\varphi(s)\,ds = q' + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Hierin zijn A, B, C en D de nader te bepalen constanten, met behulp waarvan voldaan moet worden aan de eischen, dat voor $x = 0$ en $x = l, y''$ en $y''' = 0$ zijn.

De voorwaarden, dat voor $x = 0$, y'' en y''' gelijk nul zijn, maken, zooals uit:

$$y = \int_0^x \varphi(x)\,dx^4 - \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{k'}$$

blijkt, dat de coëfficiënten A en B nul gesteld moeten worden. De beide andere voorwaarden bepalen C en D.

3. Volgens Volterra wordt van:

$$\varphi(x) + k' \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\,\varphi(s)\,ds = q' + Cx + D$$

de oplossing verkregen, door te stellen:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + k'\varphi_1(x) + k'^2\varphi_2(x) + k'^3\varphi_3(x) + \ldots .$$

waarin:

$$\varphi_0(x) = q' + Cx + D$$

$$\varphi_1(x) = -\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\varphi_0(s)\,ds$$

$$\varphi_2(x) = -\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\varphi_1(s)\,ds$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = -\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\varphi_{n-1}(s)\,ds.$$

Deze oplossing is echter grafisch slechts dàn op te stellen, wanneer de coefficiënten C en D bekend zijn. Daar deze coefficienten evenwel door voorwaarden bepaald worden, die aan de 2e en 3e afgeleide van y (dus aan de 2e en 1e integraal van $\varphi(x)$) zijn opgelegd in een punt, welks abscis van nul verschilt, zijn zij van te voren niet berekenbaar.

4. Intusschen kan aan dit bezwaar tegemoet gekomen worden, door te stellen

$$\chi_0(x) = q' + C_0 x + D_0$$

waarin C_0 en D_0 twee constanten zijn, bepaald door:

$$\int_0^l \chi_0(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^l \chi_0(x) \, . \, x\,dx = 0.$$

Behalve dat dan — zooals later blijken zal — C en D grafisch gemakkelijk te bepalen waarden verkrijgen, wordt bovendien bereikt, dat de functie

$$\overline{\varphi_1}(x) = -\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\chi_0(s)\,ds$$

behalve voor $x = 0$, ook voor $x = l$ aan de eischen

$$\overline{\varphi_1}''' = 0, \; \overline{\varphi_1}'' = 0, \text{ of aan } \int_0^l \chi_0(x)\,dx = 0, \quad \int_0^l dx \int_0^x \chi_0(x)\,dx = 0$$

voldoet.

Immers

$$\overline{\varphi''}_1(x)_{x=l} = -\int_0^l dx \int_0^x \chi_0(x)\,dx = \Big\{ -x\int_0^x \chi_0(x)\,dx \Big\} + \int_0^l x\,\chi_0(x)\,dx = 0.$$

Wanneer op de door VOLTERRA aangegeven wijze uit $\overline{\varphi_1}(x)$ de functie $\overline{\varphi_2}(x)$ zou worden afgeleid, zou $\overline{\varphi_2}(x)$ natuurlijk niet meer de eigenschap hebben, dat $\overline{\varphi_2}''$ en $\overline{\varphi_2}'''$ voor $x = l$ nul zouden zijn. De functie $\chi_1(x)$ daarentegen, gedefinieerd door:

$$\chi_1(x) = -\left[\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\chi_0(s)\,ds + C_1 x + D_1\right]$$

waarin C_1 en D_1 coëfficienten zijn, bepaald door de betrekkingen

$$\int_0^l \chi_1(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^l \chi_1(x)\,.\,x\,dx = 0$$

zal onder behoud der aan $\overline{\varphi_1}(x)$ toegeschreven eigenschappen, bij viervoudige integratie aanleiding geven tot een nieuwe functie, waarvoor de tweede en derde afgeleiden voor $x = l$ wèl nul worden.

Het ligt derhalve voor de hand een niewe reeks functies $\chi(x)$ te definieeren door:

$$\chi_0(x) = q' + C_0 x + D_0$$

$$\chi_1(x) = -\left[\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\chi_0(s)\,ds + C_1 x + D_1\right]$$

$$\chi_2(x) = -\left[\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\chi_1(s)\,ds + C_2 x + D_2\right]$$

$$\vdots$$

$$\chi_n(x) = -\left[\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\chi_{n-1}(s)\,ds + C_n x + D_n\right]$$

waarin de coëfficiënten C_i en D_i gebonden zijn door de voorwaarden

$$\int_0^l \chi_i(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^l \chi_i(x)\,.\,x\,dx = 0$$

en te stellen:

$$\varphi = \chi_0(x) + k'\chi_1(x) + k'^2\chi_2(x) + \ldots .$$

Deze functie toch blijkt bij substitutie in:

$$\varphi(x) + k'\int_0^x \frac{(x-s)^3}{3!}\varphi(s)\,ds = q' + Cx + D$$

formeel aan deze vergelijking te voldoen, terwijl tevens de uit $\varphi(x)$ voortvloeiende

$$y = \frac{q' - \varphi}{k'} = \frac{q' - (q' + C_0 x + D_0) - k'\chi_1(x) - k'^2\chi_2(x) - k'^2\chi_1(x) - \ldots}{k'} =$$

$$= -\frac{C_0 x + D_0}{k'} - \chi_1(x) - k'\chi_2(x) - k'^2\chi_3(x) \ldots$$

formeel aan de gestelde randvoorwaarden voldoet.

Bedoelde substitutie levert immers, wanneer de onder het integraalteeken voorkomende reeks term voor term geintegreerd mag worden:

$$C_0 x + D_0 - k'(C_1 x + D_1) - k'^2(C_2 x + D_2) - \ldots = Cx + D.$$

Indien de convergentie van de in het eerste lid dezer vergelijking voorkomende reeks verzekerd is, kan over de grootheden C en D achteraf zoodanig worden beschikt, dat een identiteit ontstaat.

Uit den aard der zaak zou nu eerst een onderzoek moeten volgen naar de geldigheid (resp. naar het geldigheidsgebied) van het omschreven iteratieproces.

Voor dit onderzoek zij echter verwezen naar een op deze mededeeling aansluitende verhandeling van den Heer Droste. Hier worde volstaan met de vaststelling van het feit, dat convergentie gewaarborgd is zoolang $\dfrac{kl^4}{EI} < 500$; en nader aangetoond hoe het behandelde proces grafisch kan worden uitgevoerd.

5. Men denke zich den balk, inplaats van met de er in werkelijkheid op staande belasting voor een oogenblik belast door een andere, lineair verloopende $q_0 = \alpha x + \beta$; welke met de eerste statisch aequivalent is. Dan zal de bij deze hulpbelasting optredende inzakking y_0 in den grond bepaald zijn door

$$y_0 = \frac{\alpha x + \beta}{k}.$$

Deze inzakking kan als eerste benadering voor de gezochte doorbuiging van den balk worden aangezien. Zij houdt verband met de uitdrukking $C_0 x + D_0$ welke in N°. 3 gedefinieerd is.

Immers $\alpha x + \beta$ moet voldoen aan de betrekkingen:

$$\int_0^l (\alpha x + \beta)\, dx = \int_0^l q\, dx$$

$$\int_0^l (\alpha x + \beta) \, . \, x\, dx = \int_0^l q \, . \, x\, dx$$

terwijl $C_0 x + D_0$ bepaald is door:

$$\int_0^l (C_0\, x + D_0)\, dx = -\int_0^l q'\, dx = -\int_0^l \frac{q}{EI}\, dx$$

$$\int_0^l (C_0\, x + D_0) \, . \, x\, dx = -\int_0^l q' \, . \, x\, dx = -\int_0^l \frac{q}{EI} \, . \, x\, dx.$$

Hieruit volgt, dat $\alpha x + \beta \equiv - EI\,(C_0 x + D_0)$, zoodat

$$y_0 = \frac{\alpha\, x + \beta}{k} = -\frac{C_0\, x + D_0}{k'}.$$

De werkelijke belasting op den balk wijkt van de juist gedefinieerde af met het bedrag

$$q_1 = q - q_0 = q - (\alpha\, x + \beta) = EI\, (q' + C_0\, x + D_0) = EI\, \chi_0\, (x).$$

Door toevoeging van deze belasting — die een evenwichts-krachtsysteem vormt — aan de belasting q_0, zou men dus den werkelijken belastingtoestand herstellen.

Met deze belastingstoevoeging gaat echter een vervorming van den balk gepaard, bepaald door:

$$E\, I\, y'''' = E\, I\, \chi_0\, (x)$$

zoodat

$$y_1 = \int_0^x \chi_0\, (x)\, dx^4 = \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3\,!} \chi_0\, (s)\, ds + A_1\, x^3 + B_1\, x^2 + C_1\, x + D_1.$$

Daar de tweede en derde afgeleiden van y_1 voor $x = 0$ nul zijn, is $A_1 = 0$ en $B_1 = 0$. Men kieze nu C_1 en D_1 zoodanig, dat

$$\int_0^l y_1\, dx = 0$$

$$\int_0^l y_1 \, . \, x\, dx = 0.$$

Dan is in de eerste plaats y_1 identiek met $-\chi_1\, (x)$. In de tweede

plaats is echter de tusschen $x = 0$ en $x = l$ door ky_1 gedefinieerde belasting een evenwichtskrachtsysteem. Werd deze laatste op den bodem aangebracht, dan zou deze den vorm y_1 aannemen, waardoor aaneensluiting van bodem en balk andermaal mogelijk zou worden. Intusschen zal de bodembelasting door den balk geleverd moeten worden, zoodat de indrukking y_1 van den bodem noodzakelijk een reactiebelasting $-ky_1$ op den balk in het leven roept. Door deze reactiebelasting zal de balk een nieuwe vormverandering y_2 ondergaan bepaald door:

$$E\, I\, y_2'''' = -\, k\, y_1 = k\, \chi_1\,(x)$$

waaruit op overeenkomstige wijze als zooeven volgt:

$$y_2 = k' \left\{ \int_0^x \frac{(x-s)^3}{3\,!}\, \chi_1\,(s)\, ds + C_2\, x + D_2 \right\}.$$

Wordt ook nu verlangd, dat C_2 en D_2 zoo gekozen worden, dat de uit y_2 volgende belasting ky_2 op te vatten is als een evenwichtskrachtsysteem, zoodat het hiervoor beschreven proces kan worden herhaald, dan blijkt, dat:

$$y_2 = -\, k'\, \chi_2\,(x).$$

Hieruit wordt weer afgeleid $y_3 = -\, k'^2\, \chi_3(x)$ enz., waarmee is aangetoond, dat de termen van de in N°. 4 voor y gevonden reeks:

$$y = -\, \frac{C_0\, x + D_0}{k'} - \chi_1\,(x) - k'\, \chi_2\,(x) - k'^2\, \chi_3\,(x) \ldots$$

elastische lijnen voorstellen van een op bepaalde wijze belasten balk.

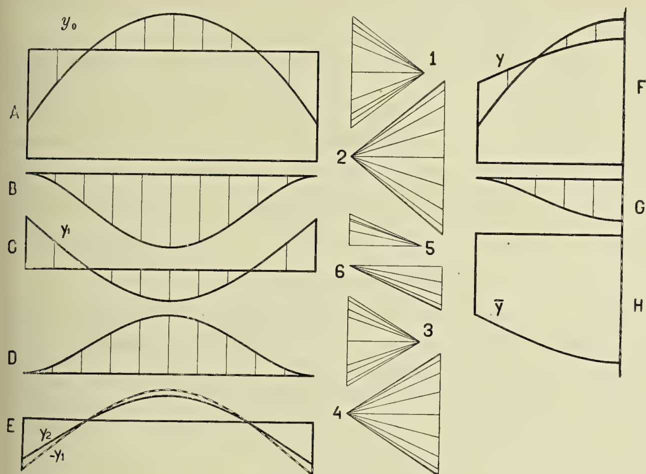
6. De in het vorige nummer omschreven constructie is nader uitgevoerd in fig. 1, voor het geval, dat:

$l = 200$ cm., $b =$ breedte van den balk $= 25$ cm., $I = 5000$ cm^4. $E = 100000$ KG/cm^2; $EI = 5 \times 10^8$ KG.cm^2, $\bar{k} = 5$ KG/cm^3, $k = b\bar{k} = 125$ KG/cm^2. De middelloodlijn op den balk is voor het beschouwde belastingsgeval een lijn van symmetrie. De belastingslijn verloopt parabolisch; de specifieke belasting aan de uiteinden is $^1/_4$ van die in het midden. De totale belasting bedraagt 15000 KG. Als lengteschaal in horizontale richting is aangenomen $n = 5$ (1 cm $\longleftrightarrow$ stelt dus voor 5 cm $\longleftrightarrow$).

De doorbuigingen zijn 25 maal vergroot geteekend, zoodat 1 cm. $\updownarrow$ voorstelt $^1/_{25}$ cm $\updownarrow$.

De lineair verloopende belasting q_0, welke met de parabolische

belasting q statisch gelijkwaardig is, zal den balk de constante inzakking



$$y_0 = \frac{15000 \text{ KG}}{125 \text{ KG/cm}^2 \times 200 \text{ cm}} = 0{,}6 \text{ cm. geven.}$$

Deze inzakking wordt in verband met de aangenomen ↕ lengteschaal in de teekening voorgesteld door 25 × 0,6 cm = 15 cm.; zij is in fig. 1a aangegeven door de rechte lijn y_0.

Deze rechte lijn kan tevens op schaal de belasting q_0 voorstellen; in dit geval is 1 cm. ↕ op te vatten als $\frac{15000 \text{ KG.}}{200 \times 15 \text{ cm}} = 5 \text{ KG/cm}$ (stel m_1 KG/cm).

Op deze schaal is in fig. 1a nu ook de parabolisch verloopende belasting q ingeteekend, zoodat de — de eerste benaderingskromme y_1 bepalende — belasting $q—q_0$ door het in fig. 1a gearceerde belastingsoppervlak wordt voorgesteld.

Op de bekende wijze is nu bij de belasting $q—q_0$ de elastische lijn geteekend; eerst is met behulp van poolfiguur 1 de momentenlijn geconstrueerd (zie fig. 1b); daarna met behulp van poolfiguur 2 de kromme y_1 (zie fig. 1c).

Ter bepaling van den te gebruiken poolsafstand H_2 merke men het volgende op.

In fig. 1*a* stelt 1 cm ⟷ voor *n* cm ⟷; 1 cm. ↕ daarentegen m_1 KG/cm. Dus stelt 1 cm² van fig. 1a voor nm_1 KG.

Wordt nu aangenomen, dat in poolfiguur 1, 1 cm. (hetzij ⟷ hetzij ↕) voor zal stellen m_2 cm² van fig 1a (in de teekening is $m_2 = 5$ genomen), en wordt de lengte van den eersten poolsafstand H_1 cm (hier 10 cm) gesteld, dan stelt H_1 dus voor: $m_1\, m_2\, n\, H_1$ K.G.

Dan stelt derhalve 1 cm. ↕ in fig. 1*b* voor: $m_1 m_2 n^2 H_1$ KG. cm. De oppervlakte-eenheid in fig. 1*b* krijgt dan bij de volgende integratie de beteekenis van $\frac{m_1 m_2 n^3 H_1}{EI}$ eenheden.

Wanneer nu 1 cm. van den poolafstand H_2, m_3 cm², (hier 10 cm²) van het in fig. 1*b* gevonden oppervlak voorstelt, heeft H_2 de beteekenis van: $\frac{m_1 m_2 m_3 n^3 H_1 H_2}{EI}$ eenheden, zoodat ten slotte in fig. 1*c* een ↕ cm. voorstelt:

$$\frac{m_1\, m_2\, m_3\, n^4\, H_1 H_2}{EI}\; cm.$$

Daar de kromme y_1 op dezelfde schaal geteekend moet worden als de kromme y_0, zal derhalve:

$$\frac{m_1\, m_2\, m_3\, n^4\, H_1\, H_2}{EI} = {}^1/_{25}$$

moeten zijn, waaruit volgt:

$$H_2 = \frac{1}{25}\,\frac{EI}{m_1\, m_2\, m_3\, n^4\, H_1} = 12{,}8\; cm.$$

Is y_1 eenmaal bepaald, dan kan het nu besproken teekenwerk herhaald worden om y_2 te vinden, enz., en wel zóó lang tot de gevonden benaderingstermen klein genoeg zijn om te worden verwaarloosd. Optelling van de reeds bepaalde doorbuigingen levert dan benaderend de gezochte elastische lijn *y*. De mogelijkheid van controle op de mate van benadering ontstaat, wanneer aan de gevonden eindkromme de gronddruk ontleend wordt en bij de totale belasting, (d.i. dus de gegeven uitwendige belasting èn de gronddruk belasting), de elastische lijn geconstrueerd wordt. Wanneer de kromme *y* juist was, zou de op deze wijze bepaalde elastische lijn $\bar{y}$ ermee moeten overeenstemmen. De controle is in fig. 1*f*, *g*, *h* uitgevoerd.

Zooals blijkt zijn de krommen $\bar{y}$ en y niet van elkaar te onderscheiden.

7. Omtrent de wijze, waarop door sommeering van de krommen $y_0 y_1 \ldots$ de kromme y bepaald is, moet nog een opmerking worden gemaakt. Bij het teekenen van de verschillende benaderingskrommen blijkt nl. dat de krommen y_2 en y_1 affien zijn. Wordt de evenredigheidsfactor, met behulp waarvan kromme y_2 uit de kromme y_1 kan worden afgeleid $-\mu$ genoemd, dan zullen ook de ordinaten van y_3 het $-\mu$-voud van de overeenkomstige ordinaten van y_2 zijn. Hieruit volgt, dat de bijdrage in de ordinaat van eenig punt van den balk van alle benaderingskrommen $y_1, y_2 \ldots y_n$ gevonden kan worden als de som van een meetkundige reeks van termen, waarvan de eerste term en de rede aan de krommen y_1 en y_2 te ontleenen zijn.

De kromme y is dus op te vatten als de som van de kromme y_0 en de somkromme van alle volgende benaderingsfuncties.

Het is van belang op te merken, dat ook voor het geval de rede van de hiervoor genoemde reeks in absolute waarde grooter dan 1 is, zoodat van een sommatie harer termen geen sprake kan zijn, het gevolgde teekenproces onder omstandigheden toch kan dienen om de gevraagde elastische lijn te bepalen.

Indien n.l. een belasting $-ky_n$ aanleiding geeft tot een doorbuiging $-\mu y_n$, zal de functie νy_n, waarin ν een nog nader te bepalen constante is, aan de vergelijking $EI\,y'''' + ky = -ky_n$ voldoen.

Daar n.l. $-EI\mu y_n'''' = -ky_n$, vindt men, dat voldaan zou moeten worden aan:

$$\nu \frac{ky_n}{\mu} + k\nu y_n = -ky_n$$

zoodat

$$\nu = \frac{-\mu}{\mu + 1}.$$

Men kan de einddoorbuiging van den balk dus verkrijgen door bij de som der krommen $y_0, y_1 \ldots y_n$ nog op te tellen $\frac{-\mu}{\mu+1} y_n$, of wat op hetzelfde neerkomt, bij $y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}$, op te tellen $\left(1 + \frac{-\mu}{1+\mu}\right) y_n = \frac{1}{1+\mu} y_n$.

Zoodra zich dus twee op elkaar volgende gelijkvormige benaderingskrommen voordoen, kan het teekenproces beëindigd worden.

Hoewel nu — behalve bij zeer speciale belastingsgevallen — na

een eindig aantal iteraties de bedoelde gelijkvormigheid exact niet zal kunnen optreden, zal zij bij benadering toch vrij spoedig zijn waar te nemen. Verwaarloost men derhalve in het laatst gevonden belastingsvlak, dàt gedeelte, dat de gelijkvormigheid met het voorgaande stoort, dan zal de hiervoor besproken handelwijze kunnen worden toegepast mits: 1°. de gemaakte verwaarloozing klein is, en 2°. de verwaarloosde belasting niet bij voortgezette iteratie aanleiding tot steeds grootere belastingsvlakken zou geven. Dit laatste is gewaarborgd, wanneer $\frac{kl^4}{EI} < 14600$.

Daar de juistheid van de hiervoor gegeven uitspraak het gemakkelijkst wordt aangetoond door gebruikmaking van de door den Heer Droste gegeven ontwikkelingen, wordt naar zijn verhandeling verwezen.

Delft, Maart 1923.

Wiskunde. — J. DROSTE: *„Een toepassing van de leer der integraalvergelijkingen op de bepaling der elastische lijn van een over zijn geheele lengte elastisch ondersteunden balk."*

(Aangeboden door de Heeren J C. KLUIJVER en D. J. KORTEWEG).

1. Onder bovenstaanden titel verschijnt gelijktijdig in deze verslagen een verhandeling [1]) van den Heer BIEZENO. De daarin onder 4 gestelde vraag naar de geldigheid van het in die verhandeling gebruikte iteratieproces wordt hier beantwoord.

Daartoe merke men op, dat de functie van x, die aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \lambda y = q'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en aan de randvoorwaarden voldoet, een meromorfe functie van λ is. Men zou die functie door middel van de methode van de variatie der constanten kunnen vinden en haar dan naar opklimmende machten van λ kunnen ontwikkelen; de convergentiestraal R van de op den eersten term (die λ^{-1} als factor bevat) volgende machtreeks kan men dan gemakkelijk berekenen. Dan moet nog onderzocht worden of de reeks voor $\lambda = k'$ overeenstemt met die van mededeeling I; alleen in dat geval is laatstgenoemde reeks voor $k' < R$ geldig. Terwille van dit onderzoek en ook om een oordeel te krijgen over de asymptotische evenredigheid der functies $\chi_n(x)$ (zie I, 7), zullen wij gebruik maken van de methode, die steunt op de theorie der integraalvergelijking van FREDHOLM.

2. Wij stellen een functie van x op, die aan

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \lambda y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

voldoet in het interval $(0, l)$, de randvoorwaarden $y'' = y''' = 0$ aan beide randen bevredigt en die continu is met haar eerste drie afgeleiden overal in $(0, l)$ met dit voorbehoud, dat y''' voor $x = \xi$ een sprong vertoont, aldus:

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\xi-0}^{\xi+0} = 0.$$

[1]) Voortaan aangeduid met: Mededeeling I.

Deze functie noemen wij $K(x, \xi, \lambda)$; zij stelt de doorbuiging voor van den balk, wanneer deze belast is met een last 1, die in het punt ξ geconcentreerd is.

Stellen wij $\lambda = -\varrho^4$, dan zal de functie

$$\mp \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \varrho (x-\xi) - \sin \varrho (x-\xi) \}$$

(het bovenste teeken voor $x \leqq \xi$, het onderste voor $x \geqq \xi$) aan alle eischen voldoen, behalve aan de randvoorwaarden.

Stellen wij nu

$$K(x, \xi, \lambda) = \mp \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \varrho (x-\xi) - \sin \varrho (x-\xi) \} +$$

$$+ A \cosh \varrho (x - \tfrac{1}{2}) + B \sinh \varrho (x - \tfrac{1}{2} l) + C \cos \varrho (x - \tfrac{1}{2} l) + D \sin \varrho (x - \tfrac{1}{2} l),$$

dan kunnen wij A, B, C en D zoo bepalen, dat $K(x, \xi, \lambda)$ aan de randvoorwaarden voldoet. Dit geeft de vergelijkingen

$$- A \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l + B \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l + C \cos \tfrac{1}{2} \varrho l - D \sin \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \varrho\xi + \sin \varrho\xi \},$$

$$- A \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l + B \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l - C \sin \tfrac{1}{2} \varrho l - D \cos \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \cosh \varrho\xi + \cos \varrho\xi \},$$

$$- A \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l - B \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l + C \cos \tfrac{1}{2} \varrho l + D \sin \tfrac{1}{2} \varrho l =$$

$$= \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \varrho (l-\xi) + \sin \varrho (l-\xi) \},$$

$$- A \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l - B \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l - C \sin \tfrac{1}{2} \varrho l + D \cos \tfrac{1}{2} \varrho l =$$

$$= \frac{1}{4\varrho^3} \{ \cosh \varrho (l-\xi) + \cos \varrho (l-\xi) \}.$$

Door optelling van de eerste en derde vergelijking benevens van de tweede en vierde verkrijgt men twee vergelijkingen, die alleen A en C bevatten. Door aftrekking van de eerste en derde vergelijking benevens van de tweede en vierde vindt men twee vergelijkingen, die alleen B en D bevatten. We krijgen zoodoende

$$- A \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l + C \cos \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l \cosh \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} \varrho l) + \sin \tfrac{1}{2} \varrho l \cos \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) \},$$

$$- A \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l - C \sin \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l \cosh \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) + \cos \tfrac{1}{2} \varrho l \cos \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) \},$$

$$B \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l - D \sin \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l \sinh \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) + \cos \tfrac{1}{2} \varrho l \sin \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) \},$$

$$B \cosh \tfrac{1}{2} \varrho l - D \sin \tfrac{1}{2} \varrho l = \frac{1}{4\varrho^3} \{ \sinh \tfrac{1}{2} \varrho l \sinh \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) - \sin \tfrac{1}{2} \varrho l \sin \varrho (\xi - \tfrac{1}{2} l) \},$$

Uit deze vergelijkingen kan men A, B, C en D gemakkelijk oplossen; stellen wij

$$\Delta_1(\varrho) = \cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l + \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l,$$

$$\Delta_2(\varrho) = \cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l - \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l,$$

dan wordt

$$-4\varrho^3 \Delta_1(\varrho) \{ A \cosh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) + C \cos \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \} =$$
$$= (\cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l + \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l) \cosh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \cosh \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l)$$
$$+ \cosh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \cos \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l) + \cos \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \cosh (\xi-\tfrac{1}{2}l)$$
$$+ (\cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l - \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l) \cos \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \cos \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l),$$

$$-4\varrho^3 \Delta_2(\varrho) \{ B \sinh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) + D \sin \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \} =$$
$$= (\cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l - \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l) \sinh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \sinh \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l)$$
$$+ \sinh \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \sin \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l) + \sin \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \sinh \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l)$$
$$+ (\cosh \tfrac{1}{2}\varrho l \cos \tfrac{1}{2}\varrho l + \sinh \tfrac{1}{2}\varrho l \sin \tfrac{1}{2}\varrho l) \sin \varrho (x-\tfrac{1}{2}l) \sin \varrho (\xi-\tfrac{1}{2}l).$$

Hiermede is de functie $K(x, \xi, \lambda)$ berekend; zij blijkt een breuk te zijn met den noemer $4\varrho^3 \Delta_1(\varrho) \Delta_2(\varrho)$. De waarden van λ, die dezen noemer 0 maken, zijn de karakteristieke getallen van het probleem en zijn, daar $K(x, \xi, \lambda)$ in x en ξ symmetrisch is, alle reëel. Daaruit volgt, dat de overeenkomstige waarden van ϱ een argument hebben, dat een veelvoud is van $\frac{\pi}{4}$; wij kunnen echter gemakkelijk aantoonen, dat dit een even veelvoud is, m. a. w. dat de waarden van ϱ reëel of zuiver imaginair zijn en dat de overeenkomstige waarden van λ dus negatief of nul zijn. Daartoe schrijven wij eerst $2\Delta_1(\varrho)\Delta_2(\varrho)$ in den vorm $1 - \cosh \varrho l \cos \varrho l$ en substitueeren hierin $\varrho l = \alpha + i\beta$; stellen wij dan het reëele deel gelijk aan nul, dan komt er

$$\cosh \alpha \cosh \beta \cos \alpha \cos \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \sin \alpha \sin \beta = 1,$$

waaraan voor $\beta = \pm \alpha \neq 0$ niet voldaan kan worden, omdat dan $\sinh^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ zou moeten zijn, hetgeen voor $\alpha \neq 0$ niet mogelijk is. Derhalve zijn de waarden van ϱ reëel en zuiver imaginair en zijn de karakteristieke getallen *negatief*, waarbij nog de waarde $\lambda = 0$ komt.

Is voorts ϱ een wortel van $\Delta_1(\varrho) = 0$, dan is ook $i\varrho$ (en bijgevolg ook $-\varrho$ en $-i\varrho$) een wortel; hetzelfde geldt voor de wortels van $\Delta_2(\varrho) = 0$. Wij noemen de positieve wortels van de vergelijking

$$tgh\, p = -tg\, p,$$

naar opklimmende grootte gerangschikt, $p_1, p_2, \ldots$ en de positieve wortels van

$$tgh\, p = tg\, p,$$

evenzoo gerangschikt, $q_1, q_2, \dots$ De karakteristieke getallen zijn dan

$$0, -\left(\frac{2\,p_n}{l}\right)^4, -\left(\frac{2\,q_n}{l}\right)^4 \dots (n = 1, 2, \dots)$$

3. Wij willen ook de karakteristieke functies berekenen. Zij p een der getallen p_n en q een der getallen q_n; wij zoeken dan de drie volgende limieten:

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^4\, K(x, \xi, \lambda),\ \lim_{\rho \to 2p/l} \left\{\rho^4 - \left(\frac{2p}{l}\right)^4\right\} K(x, \xi, \lambda),\ \lim_{\rho \to 2q/l} \left\{\rho^4 - \left(\frac{2q}{l}\right)^4\right\} K(x,\xi,\lambda).$$

Tot geen dezer limieten draagt de term $\mp \frac{1}{4\rho^3}\{\sinh \rho\,(x-\xi) - \sin \rho\,(x-\xi)\}$ iets bij.

Voor de eerste limiet vindt men dadelijk:

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^4\, K(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{l} - \frac{12}{l^3}(x - \tfrac{1}{2}\,l)(\xi - \tfrac{1}{2}\,l).$$

Tot de tweede limiet draagt alleen de term $A \cosh \rho\,(x - \frac{1}{2}\,l) + C \cos \rho\,(x - \frac{1}{2}\,l)$ bij. Vooreerst wordt nu

$$\lim_{\rho \to 2p/l} \frac{\rho^4 - (2p/l)^4}{-4\,\rho^3\,\Delta_1(\rho)} = \frac{1}{-l \cosh p \cos p}$$

en de teller der breuk, die wij voor $A \cosh \rho\,(x - \frac{1}{2}\,l) + C \cos \rho\,(x - \frac{1}{2}\,l)$ gevonden hebben, gaat voor $\rho = {}^{2p}/_{l}$ over in

$$\cosh 2p\left(\frac{x}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\left\{(\cosh p \cos p + \sinh p \sin p) \cosh 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right) + \cos 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

$$+ \cos 2p\left(\frac{x}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\left\{\cosh 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right) + (\cosh p \cos p - \sinh p \sin p) \cos 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

Uit $\cosh p \sin p + \sinh p \cos p = 0$ volgt nu echter

$$\cosh p \cos p - \sinh p \sin p = \frac{\cosh p}{\cos p},$$

$$\cosh p \cos p + \sinh p \sin p = \frac{\cos p}{\cosh p},$$

en de teller is dus

$$\left\{\cosh 2p\left(\frac{x}{l} - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{\cosh p}{\cos p} \cos 2p\left(\frac{x}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\right\}\left\{\frac{\cos p}{\cosh p} \cosh 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right) + \cos 2p\left(\frac{\xi}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

Wij vinden zoo:

$$\lim_{\rho \to 2p/l} \left\{\rho^4 - \left(\frac{2p}{l}\right)^4\right\} K(x, \xi, \lambda) =$$

$$-\frac{1}{l}\left\{\frac{\cosh 2p\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cosh p}+\frac{\cos 2p\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cos p}\right\}\left\{\frac{\cosh 2p\left(\frac{\xi}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cosh p}+\frac{\cos 2p\left(\frac{\xi}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cos p}\right\}.$$

Evenzoo:

$$\lim_{\rho\to 2q/l}\left\{\rho^4-\left(\frac{2q}{l}\right)^4\right\}K(x,\xi,\lambda)=$$

$$-\frac{1}{l}\left\{\frac{\sinh 2q\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sinh q}+\frac{\sin 2q\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sin q}\right\}\left\{\frac{\sinh 2q\left(\frac{\xi}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sinh q}+\frac{\sin 2q\left(\frac{\xi}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sin q}\right\}.$$

Stellen wij nu

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{l}},\ \varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\left\{\frac{\cosh 2p_n\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cosh p_n}+\frac{\cos 2p_n\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\cos p_n}\right\},$$

$$\psi_0(x)=\frac{2\sqrt{3}}{l\sqrt{l}}(x-\tfrac{1}{2}),\ \psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\left\{\frac{\sinh 2q_n\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sinh q_n}+\frac{\sin 2q_n\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sin q_n}\right\},$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

dan zijn $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ $(n=0,1,2\ldots.)$ de genormeerde orthogonale functies; zij voldoen aan de randvoorwaarden en aan (2), wanneer in die vergelijking λ door het bijbehoorende karakteristieke getal vervangen is.

Teekent men nu in één figuur de krommen $y=tgx$, $y=tghx$ en $y=-tghx$, dan ziet men terstond, dat p_n een hoek in het $2n$-de kwadrant is; q_n ligt in het $(2n+1)$ste kwadrant. Voor $n\to\infty$ naderen p_n en q_n tot de middens der kwadranten, waarin zij gelegen zijn. Daaruit volgt, dat $\cos p_n$ en $\sin p_n$ tot $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ naderen en het is nu dadelijk te zien, dat de volstrekte waarde van $\varphi_n(x)$ en $\psi_n(x)$ beneden een van x en n onafhankelijke grens ligt. Daar verder

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n}=\pi$$

is, zijn de in

$$K(x,\xi,\lambda)=\frac{\varphi_0(x)\varphi_0(\xi)+\psi_0(x)\psi_0(\xi)}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda+(2p_n/l)^4}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)\psi_n(\xi)}{\lambda+(q_n/l)^4}\ .\ \ .\ \ .\ \ .\quad (3)$$

voorkomende reeksen uniform convergent en het tweede lid is daarom gelijk aan $K(x,\xi,\lambda)$.

4. Zij nu y de gezochte oplossing van (1), d.i. de oplossing, waarvoor $y'' = y''' = 0$ is voor $x = 0$ en $x = l$ en die met haar eerste drie afgeleiden in $(0, l)$ continu is; wij staan echter toe dat y'''' in een eindig aantal punten a_i een sprong vertoont, hetgeen zich zal voordoen, wanneer $q'(x)$ in a_i discontinuïteiten heeft, waarvoor $q'(a_i + 0)$ en $q(a_i - 0)$ bestaan. De punten a_i en de waarde ξ verdeelen het interval $(0, l)$ in een aantal deelen; in het inwendige van elk dier deelen is

$$\frac{d}{dx}[y''' K(x, \xi, \lambda) - y'' K'(x, \xi, \lambda) + y' K''(x, \xi, \lambda) - y K'''(x, \xi, \lambda)] =$$
$$= y'''' K(x, \xi, \lambda) - y K''''(x, \xi, \lambda).$$

Integreert men deze vergelijking over elk der deelen en telt men de uitkomsten op, dan vindt men, daar $y'' = y''' = K''(x, \xi, \lambda) = K'''(x, \xi, \lambda) = 0$ voor $x = 0$ en $x = l$ en $y, y', y'', y''', K, K', K'', K'''$ overal continu zijn, behalve dat K''' in ξ met 1 toeneemt,

$$-y(\xi) = \int_0^l \{y''''(x) K(x, \xi, \lambda) - y(x) K''''(x, \xi, \lambda)\} dx.$$

Vervangt men hierin y'''' en K'''' door $q' - \lambda y$ en $-\lambda K$ volgens (1) en (2), dan komt er

$$y(\xi) = \int_0^l K(x, \xi, \lambda) q'(x) dx$$

of, na verruiling van x en ξ, daar $K(x, \xi, \lambda)$ in x en ξ symmetrisch is,

$$y(x) = \int_0^l K(x, \xi, \lambda) q'(\xi) d\xi.$$

Indien op de balk, in plaats van de belasting $q(x)$, N geconcentreerde lasten Q_i staan op de plaatsen ξ_i, dan zal

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} Q'_i K(x, \xi_i, \lambda)$$

zijn, waarin $Q'_i = Q_i/EI$ is. Draagt de balk zoowel de belasting $q(x)$ als ook de geconcentreerde lasten Q_i, dan wordt

$$y(x) = \int_0^l K(x, \xi, \lambda) q'(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{N} Q'_i K(x, \xi_i, \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit (4) volgt, dat y een meromorfe functie van λ is met de polen 0, $-({}^{2p_n}/_l)^4$ en $-({}^{2q_n}/_l)^4$. Men ziet dit in, door (3) in (4) te

substitueeren en de integratie termsgewijze te verrichten, hetgeen wegens de uniforme convergentie van (3) geoorloofd is.

Ontwikkelt men de zoo verkregen functie in een reeks, die naar opklimmende machten van λ voortloopt (de eerste term begint in het algemeen met λ^{-1}), dan zal die reeks in het algemeen convergeeren voor $|\lambda| < ({}^{2p_1}/_l)^4$; alleen dan zal zij voor grootere waarden van $|\lambda|$ nog goed zijn, wanneer uit (4) de term met den noemer $\lambda + ({}^{2p_1}/_l)^4$ wegvalt. Ingeval alle Q_i's nul zijn geschiedt dit, wanneer $q(x)$ orthogonaal is ten aanzien van $\varphi_1(x)$. Indien dus de in Mededeeling I opgegeven reeks juist is en indien niet toevallig

$$\int_0^l q(x)\,\varphi_1(x)\,dx = 0$$

is, kan zij alleen convergeeren voor

$$\frac{kl^4}{EJ} \leqq (2p_1)^4 = 500{,}54665 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Uit (4) laat zich nog een gevolgtrekking maken, die wij later zullen gebruiken. Stel, op de balk staat alleen een belasting $p(x)$ per lengteëenheid; die belasting zij een evenwichtskrachtsysteem, zoodat

$$\int_0^l p(x)\,dx = \int_0^l x\,p(x)\,dx = 0$$

is, of, wat op hetzelfde neerkomt,

$$\int_0^l p(x)\,\varphi_0(x)\,dx = \int_0^l p(x)\,\psi_0(x)\,dx = 0.$$

Uit (4), waarin nu $q'(x)$ door $p(x)/EI$ vervangen moet worden en $Q'_i = 0$ is, volgt dan

$$y(x) = \int_0^l \overline{K}(x, \xi, \lambda)\,p(\xi)\,d\xi,$$

waarin $\overline{K}(x, \xi, \lambda)$ ontstaat uit $K(x, \xi, \lambda)$ door in (3) den term met den noemer λ weg te laten. Stellen wij thans $\lambda = 0$, waardoor $\overline{K}(x, \xi, \lambda)$ overgaat in

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(\xi)}{({}^{2p_n}/_l)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(\xi)}{({}^{2q_n}/_l)^4}, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dan vinden wij

$$y(x) = \frac{1}{EI}\int_0^l K(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Dit stelt de doorbuiging voor, die de balk onder den invloed van het evenwichtskrachtsysteem $p(x)$ zou ondergaan, indien de bodem geen weerstand bood; zij is zoo, dat

$$\int_0^l y(x)\, dx = \int_0^l x\, y(x)\, dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

is, daar $K(x, \xi)$ orthogonaal is t.o. van $\varphi_0(x)$ en $\psi_0(x)$. Door de voorwaarden (8) wordt de doorbuiging geheel bepaald en (7) stelt die doorbuiging voor.

5. Wij gaan thans bewijzen, dat de uit (4) voortvloeiende reeksontwikkeling voor $\lambda = k'$ met de voor y in mededeeling I gegeven reeks overeenkomt. Stellen wij de iteraties van $K(x, \xi)$ door $K_2(x, \xi)$, $K_3(x, \xi)$ .... voor, dan is voor $|\lambda| < ({}^{2p_1}/_l)^4$

$$\overline{K}(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) - \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) \; . \; . \; . \; ,$$

$$\int_0^l \overline{K}(x, \xi, \lambda)\, q'(\xi)\, d\xi = \int_0^l K(x, \xi)\, q'(\xi)\, d\xi - \lambda \int_0^l K_2(x, \xi)\, q'(\xi)\, d\xi + . \; . \; . \; ,$$

zooals in de theorie der integraalvergelijkingen bewezen wordt. Dientengevolge gaat (4) voor $\lambda = k'$ over in

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \quad (9)$$

waarin

$$y_0(x) = \frac{1}{k}\left\{\varphi_0(x)\int_0^l \varphi_0(\xi)\, q(\xi)\, d\xi + \psi_0(x)\int_0^l \psi_0(\xi)\, q(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \varphi_0(x) \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \varphi_0(\xi_i) + \psi_0(x) \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \psi_0(\xi_i)\right\}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI}\int_0^l K(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi + \frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{N} Q_i\, K(x, \xi_i),$$

$$y_2(x) = -k'\left\{\frac{1}{EI}\int_0^l K_2(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi + \frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{N} Q_i\, K_2(x, \xi_i)\right\} =$$

$$= -\frac{k}{EI}\int_0^l K(x, \xi)\, y_1(\xi)\, d\xi,$$

. . . .

$$y_{n+1}(x) = -\frac{k}{EI}\int_0^l K(x, \xi)\, y_n(\xi)\, d\xi,$$

. . . .

Elk der functies $y_n(x)$, behalve $y_0(x)$, voldoet aan (8).

Wij zullen nu bewijzen, dat de termen $y_0, y_1, y_2, \ldots$ dezelfde zijn als de gelijknamige grootheden in I, 5, waarmee dan voor $Q_i = 0$ ook de overeenstemming der reeks $y_0 + y_1 + \ldots$ met de reeks van I, 4 is aangetoond.

Vooreerst is nu blijkbaar $y_0(x)$ een lineaire functie van x; de functie $k y_0(x)$ stelt de in I, 5 gedefinieerde lineaire belasting $\alpha x + \beta$ voor, die met de gegeven belasting statisch aequivalent is. Immers men heeft

$$k\int_0^l y_0(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \int_0^l \varphi_0(\xi)\, q(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \varphi_0(\xi_i),$$

$$k\int_0^l y_0(x)\, \psi_0(x)\, dx = \int_0^l \psi_0(\xi)\, q(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \psi_0(\xi_i),$$

en zet men hierin de uitdrukkingen voor de functies $\varphi_0(x)$ en $\psi_0(x)$, dan komt er

$$\int_0^l k\, y_0(x)\, dx = \int_0^l q(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

$$\int_0^l (x - \tfrac{1}{2})\, k y_0(x)\, dx = \int_0^l (\xi - \tfrac{1}{2})\, q(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^{N} Q_i(\xi_i - \tfrac{1}{2}),$$

waarmede de bewering is bewezen.

Laat men nu in (9) de doorbuiging y_0 weg, dan stellen de andere termen samen de overblijvende doorbuiging voor. Voor $k = 0$ gaat deze over in y_1 en dus stelt y_1 de doorbuiging voor, die de balk ondergaat onder de werking der evenwichtsbelasting, die na aftrek van $\alpha x + \beta$ van de gegeven belasting overblijft, ingeval de bodem geen weerstand biedt ($k = 0$). Bovendien voldoet $y_1(x)$ aan (8) en dus is $y_1(x)$ identiek met de grootheid y_1 in I, 5.

De door deze doorbuiging y_1 ontstane bodemreactie is een belasting $-k y_1$ van den balk, die daardoor, wanneer hij onbelemmerd door den bodem buigen kan, een aan (1) voldoende doorbuiging zal verkrijgen, die wij uit (7) vinden, nl.

$$- \frac{k}{EI} \int_0^l K(x,\xi) y_1(\xi) \, d\xi,$$

d. i. de doorbuiging $y_2(x)$; deze is dus dezelfde als de gelijknamige in I, 5. Op deze wijze kunnen wij doorgaan en zien zoo, dat reeks (9) overeenstemt met de reeks uit mededeeling I.

7. Wanneer de reeksontwikkeling niet convergeert, kan het gebeuren, dat de in I medegedeelde graphische integratiemethode met een kleine wijziging blijft gelden (zie I, 7); dit berust hierop, dat van de functies $y_n(x)$ twee opvolgende voor voldoend groote n bij benadering evenredig zijn. Wij zullen dit nu bewijzen; nauwkeuriger uitgedrukt: wij zullen aantoonen, dat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_{n+1}(x)}{y_n(x)} = -\mu$$

is, waarin μ niet van x afhangt.

Men heeft voor $K_n(x, \xi)$ de absoluut en uniform convergente reeks

$$K_n(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m(x) \, w_m(\xi)}{\lambda_m^n},$$

waarin λ_m de getallen $({}^{2p_i}/_l)^4$ en $({}^{2q_i}/_l)^4$ in volgorde van grootte voorstellen en $w_m(x)$ de bij λ_m behoorende genormeerde karakteristieke functies. Stellen wij nu

$$\int_0^l w_m(\xi) \, q'(\xi) \, d\xi + \sum_{m=1}^{N} Q'_i w_m(\xi_i) = P_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dan is

$$y_n(x) = (-k')^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m w_m(x)}{\lambda_m^n} \, (n = 1, 2, \ldots)$$

een absoluut en uniform convergente reeks. Zij nu h de kleinste waarde van m, waarvoor P_m van 0 verschilt, dan is

$$y_n(x) = \frac{(-k')^{n-1}}{\lambda_h^{n-1}} \left\{ P_h \, w_h(x) + \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)^n \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+m}}\right)^n P_m \, w_m(x) \right\}.$$

De reeks, die in het tweede lid dezer vergelijking optreedt, heeft een volstrekte waarde, die kleiner is dan de van n onafhankelijke som der convergente reeks

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_{h+m}} \left| P_m \, w_m(x) \right|.$$

Daaruit en uit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)^n=0$$

volgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_h^n}{(-k')^{n-1}}\,y_n(x)=P_h\,w_h(x).$$

Dus wordt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}(x)}{y_n(x)}=-\frac{k'}{\lambda_h}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\lambda_h^{n+1}}{(-k')^n}\,y_{n+1}(x)}{\dfrac{\lambda_h^n}{(-k')^{n-1}}\,y_n(x)}=-\frac{k'}{\lambda_h},$$

waarmede de stelling bewezen is; en wel is

$$\mu=-\frac{k'}{\lambda_h}.$$

Heeft men nu bij het teekenen der achtereenvolgende doorbuigingen $y_0, y_1, y_2, \ldots$ gevonden, dat $y_{n+1} : y_n$ van x voldoende onafhankelijk is, dan zal men (zie I, 7) soms

$$\bar{y}_n=y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{1+\dfrac{k'}{\lambda_h}}$$

als de doorbuiging mogen beschouwen. Want men heeft

$$y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{1+\dfrac{k'}{\lambda_h}}=\sum_{\nu=1}^{n-1}(-k')^{\nu-1}\sum_{m=h}^{\infty}\frac{P_m\,w_m(x)}{\lambda_m^{\nu}}+\frac{y_n}{1+\dfrac{k'}{\lambda_h}}$$

$$=\sum_{m=h}^{\infty}\frac{P_m\,w_m(x)}{\lambda_m+k'}\left\{1-\left(-\frac{k'}{\lambda_m}\right)^{n-1}\right\}+\sum_{m=h}^{\infty}\frac{P_m\,w_m(x)}{\lambda_m^n}\cdot\frac{(-k')^{n-1}}{1+\dfrac{k'}{\lambda_h}}$$

$$=\sum_{m=h}^{\infty}\frac{P_m\,w_m(x)}{\lambda_m+k'}-\sum_{m=h}^{\infty}P_m\,w_m(x)\left(\frac{-k'}{\lambda_m}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{\lambda_m+k'}-\frac{\lambda_h}{\lambda_m(\lambda_h+k')}\right\}.$$

Daar nu

$$y=y_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_m\,w_m(x)}{\lambda_m+k'}$$

is, wordt

$$\bar{y}_n-y=-\sum_{m=h+1}^{\infty}P_m\,w_m(x)\left(\frac{-k'}{\lambda_m}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{\lambda_m+k'}-\frac{\lambda_h}{\lambda_m(\lambda_h+k')}\right\},$$

daar er nul komt voor $m=h$. Is nu $k'<\lambda_{h+1}$, dan heeft deze

reeks voor $n \rightarrow \infty$ tot limiet 0, hetgeen blijkt, door haar in den vorm

$$\overline{y_n} - y = -\left(\frac{-k'}{\lambda_{h+1}}\right)^{n-1} \sum_{m=h+1}^{\infty} P_m w_m(x) \left(\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_m}\right)^{n-1} \left\{\frac{1}{\lambda_m + k'} - \frac{\lambda_h}{\lambda_m(\lambda_h + k')}\right\}$$

te schrijven, daar de volstrekte waarde der hierin voorkomende reeks kleiner is dan de som der convergente reeks

$$\sum_{m=h+1}^{\infty} \frac{| P_m w_m(x) |}{\lambda_m + k'}$$

Voor voldoend groote n zal men dus $\overline{y_n}$ als de gezochte doorbuiging y mogen beschouwen, mits $k' < \lambda_{h+1}$ is. Is na h de eerste waarde van m, waarvoor P_m van nul verschilt, g, dan wordt $k' < \lambda_g$ de voorwaarde, waaronder $\overline{y_n}$ voor voldoend groote n inplaats van y mag genomen worden.

Scheikunde. — J. P. WIBAUT en J. J. DIEKMANN: „*Onderzoekingen over de additie van water aan aethyleen en propyleen.*" (Voorloopige mededeeling).

(Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en P. VAN ROMBURGH).

Reeds geruimen tijd geleden zijn door een van ons (W.) voorloopige proeven verricht, welke ten doel hadden de mogelijkheid van een directe additie van water aan aethyleen en propyleen te onderzoeken. De voortzetting van dit onderzoek is mogelijk gemaakt door een milde ondersteuning, welke mij uit het HOOGEWERFF-fonds werd verleend. Ik neem gaarne de gelegenheid te baat om hiervoor aan de Commissie van Beheer van het HOOGEWERFF-fonds mijn welgemeenden dank te betuigen.

Hoewel deze onderzoekingen nog niet afgesloten zijn, komt het mij gewenscht voor naar aanleiding van een kort bericht in de „Chemiker Zeitung" van 2 Jan. '23 (47e Jg. p. 7) waarin H. W. KLEVER dergelijke onderzoekingen beschrijft, een voorloopige mededeeling te doen over de door ons bereikte resultaten.

J. P. WIBAUT.

§ 1. *De inwerking van waterdamp op aethyleen en propyleen in tegenwoordigheid van katalysatoren.*

Sedert de onderzoekingen van IPATIEW, SENDERENS en SABATIER weet men, dat aethylalkohol en eenige zijner homologen in dampvorm bij hooge temperatuur op twee wijzen kunnen worden ontleed:

$$C_2H_5OH = C_2H_4 + H_2O \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I).$$

$$C_2H_5OH = CH_3\overset{H}{C}{=}O + H_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Beide reacties zijn typische katalytische reacties, die alleen vlot verloopen in tegenwoordigheid van bepaalde contactstoffen. Watervrij aluminiumsulfaat en aluminiumoxyde zijn typische waterafsplitsende katalysatoren (reactie I). Metalen als koper en ijzer, vooral in fijn verdeelden toestand zijn typische katalysatoren voor de afsplitsing van waterstof (reactie II).

Het temperatuurgebied, waarin vooral de eerste reactie plaats heeft, ligt tusschen 300—400°, afhankelijk van den aard der kataly-

seerende stof; gaat men de temperatuur verhoogen tot omstreeks 400° en daarboven, dan treedt ook in tegenwoordigheid van stoffen als aluminiumoxyde en andere waterafsplitsende katalysatoren, de vorming van aldehyde op den voorgrond.

Terwijl men reeds lang weet, dat de reactie (II) omkeerbaar is, aldehyden laten zich met moleculaire waterstof over nikkel glad reduceeren, is omtrent de omkeerbaarheid van reactie (I) niets bekend.

In de uitvoerige literatuur over de splitsing van alkoholen in olefine en water, is de vraag of de directe additie van water aan de dubbele binding in aethyleen en propyleen inderdaad mogelijk is, nooit onderzocht. Wij hebben een aantal proeven verricht om deze vraag te beantwoorden. Daartoe werd een mengsel van aethyleen en waterdamp bij temperatuur tusschen 300° en 400° C. over verschillende contactstoffen geleid. Bij gebruik van aluminiumhydroxyde of van aluminiumsulfaat als katalysatoren, bevatte het reactieproduct aceetaldehyde. Wij hebben het aceetaldehyde aangetoond door de gebruikelijke reacties (reductie van een ammoniakale zilveroplossing; fuchsinereactie; reactie met nitroprussidnatrium en piperidine volgens LEWIN) en ook als p-nitrophenylhydrazon geïsoleerd. De hoeveelheden aceetaldehyde zijn zeer gering; verreweg het meeste aethyleen blijft tijdens de proef onveranderd. De hoeveelheid aceetaldehyde bedroeg bij 350°—360° 0.2 tot 0.4 %, berekend op de overgeleide hoeveelheid aethyleen.

De aanwezigheid van alkohol kon niet worden aangetoond [1]).

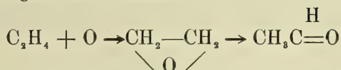
Wij meenen dat de vorming van aceetaldehyde verklaard moet worden, doordat zich primair door additie van water aan aethyleen aethylalkohol vormt, en daarna door afsplitsing van waterstof, aceetaldehyde ontstaat. Indien deze tweede reactie veel sneller verloopt dan de additie van water aan de dubbele binding, dan zal men in het reactie-product geen alkohol vinden. Aangezien bij 350—360° aethyl-alkohol bijna quantitatief ontleed wordt, in aethyleen en water (waarbij echter ook steeds een weinig waterstof en aceetaldehyde ontstaat) is het duidelijk dat pas bij lagere temperatuur, de omgekeerde reactie in belangrijke mate zal kunnen plaats hebben. Het is ons echter niet gelukt een katalysator te vinden, die beneden 300° de additie van water aan aethyleen bewerkstelligt.

Wij hebben door een aparte proef aangetoond, dat uit mengsels van droog aethyleen met circa 10 % lucht bij 360° over aluminiumoxyde geen aceetaldehyde ontstaat. Daaruit blijkt dus dat de

---

[1]) De analytische bijzonderheden zullen later worden medegedeeld, evenals de uitvoerige beschrijving van de inrichting der proeven.

vorming van aceetaldehyde niet het gevolg is van een oxydatie van aethyleen, bijv. volgens het schema:



De vorming van aceetaldehyde kan dus niet veroorzaakt zijn door de eventueele aanwezigheid van kleine hoeveelheden lucht in het gebruikte aethyleen.

Wij meenen dus te mogen concludeeren, dat een primaire additie van water aan de dubbele binding heeft plaats gehad en dat de reactie:



dus inderdaad als een omkeerbare reactie mag worden beschouwd.

Volkomen analoge resultaten hebben wij verkregen met mengsels van propyleen en waterdamp. Hierbij werd bij 350° en in tegenwoordigheid van aluminiumhydroxyde *aceton* gevormd in een hoeveelheid van 0.2 tot 0.3 °/₀ van het overgeleide propyleen. In dit geval moet naar onze meening de primaire vorming van isopropylalkohol, door additie van water aan propyleen, worden aangenomen. De isopropylalkohol gaat daarna door afsplitsing van waterstof in aceton over. De directe additie van water verloopt dus analoog aan de additie van joodwaterstof, waarbij eveneens de isopropylverbinding ontstaat. Ook in dit geval blijft derhalve de regel van MARKONIKOW geldig.

Op grond van deze resultaten is het waarschijnlijk, dat de additie van water aan propyleen en aethyleen onder hoogen druk bij temperaturen ver beneden 300° zal kunnen verloopen. In deze richting hebben wij echter geen proeven gedaan.

§ 2. *De hydratatie van aethyleen en propyleen door middel van zuren.*

De synthesen van aethyl- en isopropylalkohol uit aethyleen en propyleen door vorming van het alkyl-zwavelzuur en daarop volgende hydrolyse, door M. BERTHELOT [1]) behooren tot de klassieke synthesen der organische chemie. BERTHELOT liet deze olefinen absorbeeren door zuiver zwavelzuur van 98—99 °/₀ H_2SO_4 bij gewone temperatuur. Later is de absorptie van aethyleen door zwavelzuur herhaaldelijk bestudeerd. In het bijzonder in de laatste jaren

[1]) BERTHELOT: Chimie organique fondée sur la synthèse, p. 115. c. f. Ann. de Chimie et de Physique. (7), 4, 101 (1895). Bull. Soc. Chim. XI, 13. (1869).

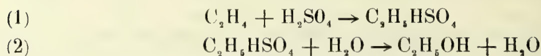
zijn door verschillende technische chemici proeven genomen om het aethyleen uit kolendestillatie gassen door middel van warm sterk zwavelzuur (van 96%) te absorbeeren en na verdunnen en destilleeren van het zwavelzuur, aethylalkohol te krijgen [1]).

Wat de inwerking van zwavelzuur op propyleen betreft, is een procédé van CARLETON-ELLIS [2]) bekend geworden. Hierbij worden de afgassen, die bij de bereiding van lichte koolwaterstoffen uit zware aardoliedestillaten ontstaan (crackingprocédé van BURTON) door zwavelzuur van 87 % geleid; het in deze afgassen aanwezige propyleen zou hierbij in isopropyl-zwavelzuur worden overgevoerd. Na verdunnen en destilleeren van het zwavelzuur verkrijgt men isopropyl-alkohol.

Systematische onderzoekingen over het gedrag van aethyleen en propyleen tegenover zuren van verschillende concentratie zijn niet gepubliceerd.

Anderzijds zijn er verschillende voorbeelden bekend waarbij de additie van water aan een dubbele binding onder den invloed van verdunde zuren plaats vindt. Geraniol neemt door inwerking van 5 % zwavelzuur twee moleculen water op. BUTLEROW [3]) vond dat isobutyleen en heptyleen bij gewone temperatuur door verdund zwavelzuur of salpeterzuur zeer langzaam tot de overeenkomstige alkoholen werden gehydrateerd.

Het scheen ons interessant te onderzoeken hoe aethyleen en propyleen zich tegenover zuren van verschillende concentraties zouden gedragen. Indien men door inwerking van aethyleen op verdund zwavelzuur bij hooge temperatuur aethylzwavelzuur kan krijgen, zou de mogelijkheid bestaan dat vervolgens het gevormde aethylzwavelzuur onder den invloed van het waterhoudende zwavelzuur zou worden gehydroliseerd:



(1) $$C_2H_4 + H_2SO_4 \rightarrow C_2H_5HSO_4$$

(2) $$C_2H_5HSO_4 + H_2O \rightarrow C_2H_5OH + H_2O$$

Indien beide reacties snel genoeg verloopen, zou men de proef zoo in kunnen richten, dat de gevormde alkohol onmiddellijk uit de reactievloeistof afdestilleerde.

---

[1]) FRITZSCHE. Chemische Industrie **20**, 266 (1897) en **21**, 27 (1898); TAU en BERTELSMANN, Gluck Auf **57**, 189 (1921); BURY en OLLANDER: „Byproduct development in the Iron and Steel Industry"; Paper read before the Cleveland Institution of Engineers 15 December 1919; cf. TIDMAN, Journ. Soc. Chem. Ind. **40**, 86 T (1921); DE LOISY. Compt. Rend. Ac. d. Sc. Paris **170**, 50 (1920); DAMIENS, DE LOISY en PIETTE, Eng. Pat. 180988 (1922).

[2]) Cf. Chemical and Metallurgical Engineering. Vol. **23**, 1230 (1920).

[3]) Lieb. Ann. **180**, 245 (1876).

Een dergelijk reactieverloop zou dus neerkomen op een additie van water aan aethyleen, waarbij de vraag of men hier met een directe additie of met een intermediaire vorming van aethylzwavelzuur te doen heeft, voorloopig in het midden kan blijven.

Wij hebben een toestel geconstrueerd, waarin een opstijgende gasstroom in innige aanraking kwam met de neerdalende, zure vloeistof. Dit vertikaal geplaatste waschapparaat werd door middel van een omwikkeling van nichroomdraad elektrisch verhit, zoodat de reactietemperatuur binnen enge grenzen constant kon worden gehouden. Het aethyleen, dat door het warme verdunde zwavelzuur werd gevoerd, zal voor zoover het niet wordt geabsorbeerd, waterdamp aan de vloeistof onttrekken, waardoor het zuur tijdens de proef geconcentreerder zou worden. Om dit te voorkomen hebben wij dit tegelijk met het aethyleen waterdamp ingevoerd; de partieele spanning van den waterdamp in het ingeleide gasmengsel kwam ongeveer overeen met de waterdampspanning van het gebruikte zwavelzuur bij de reaktietemperatuur. Op deze wijze werd de concentratie van het zwavelzuur tijdens de proef ongeveer constant gehouden.

Aan de bovenzijde van het apparaat ontweek dus waterdamp, niet geabsorbeerd aethyleen en eventueel gevormde alkoholdamp.

Inderdaad bleek het mogelijk op deze wijze alkohol uit aethyleen te verkrijgen. Een mengsel van aethyleen en stoom werd gewasschen met zwavelzuur van 65 % H_2SO_4 bij een temperatuur van 150—160°. Nadat 5 L. aethyleen waren doorgevoerd in 5 uur tijds, bevatte het destillaat 0.21 gr. alkohol [1]), d. i. een omzetting van ongeveer 2 %.

Daarna werd het gebruikte zwavelzuur sterk verdund en uitgedestilleerd en op deze wijze nog 0.08 gr. alkohol verkregen. In het zwavelzuur was dus na de proef nog een weinig aethylzwavelzuur aanwezig. Daardoor is waarschijnlijk, dat het aethylzwavelzuur als tusschenproduct wordt gevormd en dat de alkoholvorming derhalve het resultaat is van twee opeenvolgende reacties als boven aangegeven.

In een tweede dergelijke proef werden 4 % van het doorgeleide aethyleen in aethylalkohol omgezet.

Met een zwavelzuur-watermengsel van 55 % H_2SO_4 werd, nadat bij 140° 5 L. aethyleen met stoom doorgeleid was, slechts 0.01 gram aethylalkohol in het destillaat gevonden.

Met zwavelzuur van 70 % werd in het destillaat geen alkohol

[1]) De analyse geschiedde door de reactievloeistof met chroomzuur te oxydeeren, waardoor de aanwezige alkohol tot aceetaldehyde wordt geoxydeerd. Dit laatste werd colorimetrisch bepaald.

gevonden, nadat drie L. aethyleen doorgeleid was. Het zwavelzuur gaf echter na verdunnen en destillatie 0.32 gr. alkohol, die dus als aethylzwavelzuur aanwezig waren. Dit komt overeen met een omzetting van 5 %.

In deze proeven ging het meeste aethyleen onveranderd door het zwavelzuur heen; er had slechts een geringe verkoling plaats. Terwijl het dus principieel mogelijk blijkt aethyleen op deze wijze in aethylalkohol om te zetten, was de opbrengst zoo gering, dat een practische beteekenis aan deze proeven niet toekomt.

Deze onderzoekingen worden met andere zuren en met zouten als aluminiumsulfaat e. a. voortgezet.

§ 3. *Propyleen en zwavelzuur.*

Uit Berthelot's onderzoekingen was reeds bekend, dat propyleen door zwavelzuur van 98—99 % bij gewone temperatuur zeer snel geabsorbeerd wordt. Wij hebben in de eerste plaats eenige oriënteerende proeven gedaan over de inwerking van zwavelzuur van verschillende concentratie op propyleen.

In een gaspipet volgens Hempel werd 100 c.c. propyleen met het te onderzoeken zwavelzuur samengebracht.

Zwavelzuur van 96 % absorbeert het propyleen onmiddellijk, ook zwavelzuur van 90 % werkt zeer snel in; met zuur van 85 % is het propyleen na 20 minuten schudden geabsorbeerd en met zuur van 80 % is hiertoe ongeveer een uur noodig. Ook zwavelzuur van 75 absorbeert nog propyleen, doch zeer langzaam.

Daarop hebben wij de inwerking van propyleen op zwavelzuur van 96 % bij 0° onderzocht, waarbij wij zorgvuldig ervoor waakten dat noch tijdens de absorptie van het gas, noch tijdens het uitgieten van het reactieproduct op ijs, temperatuurverhooging optrad. Uit het reactieproduct hebben wij slechts een zeer geringe hoeveelheid isopropylalkohol kunnen verkrijgen. Verreweg het meeste propyleen werd door de inwerking van het zwavelzuur veranderd in een olieachtige vloeistof, welke onverzadigd was en binnen wijde grenzen kookte. Waarschijnlijk worden dus hoogere onverzadigde koolwaterstoffen gevormd door de condenseerende werking van het zwavelzuur. Ook Berthelot zegt, dat dergelijke condensatieproducten ontstaan, indien er tijdens de proef temperatuurverhooging plaats vindt. In onze proeven met zwavelzuur van 96 % en bij 0° werd niettegenstaande alle voorzorgen steeds de hoofdmassa van het propyleen in gecondenseerde en harsachtige producten overgevoerd. Met zwavelzuur van 85 % verloopt de absorptie van propyleen bij 10° C. zeer

langzaam. Bij het opwerken van het reactieproduct werden weer in hoofdzaak condensatieproducten van propyleen verkregen.

Wij hebben daarop de absorptie van propyleen door meer verdund zwavelzuur bij hoogere temperatuur onderzocht. De proeven werden op dezelfde wijze ingericht als wij reeds voor het aethyleen hebben beschreven. Een mengsel van propyleen en stoom werd in het verticale waschapparaat in tegenstroom met zwavelzuur van bepaalde concentratie en bepaalde temperatuur in aanraking gebracht; 7.5 L. propyleen met stoom gemengd werden in 4 uur geleid door zwavelzuur van 55 °/₀ H_2SO_4 bij 140° C. Het destillaat bevatte 0.25 gr. isopropyl-alkohol. Uit het zuur werd na verdunnen met water een destillaat verkregen waarin 0.27 gr. isopropylalkohol [1]) aanwezig was. In het zuur was dus blijkbaar nog isopropyl-zwavelzuur aanwezig. In totaal was dus 2.6 °/₀ van het doorgeleide propyleen als isopropylalkohol verkregen.

Tevens was echter een veel grooter deel van het propyleen ontleed. Er had afscheiding van kool plaats en vorming van zwaveldioxyde. Van de 7.5 L. propyleen kreeg men na de proef 5.3 L. terug. Van de verbruikte hoeveelheid propyleen was dus 9 °/₀ in isopropylalkohol veranderd.

Een proef met zwavelzuur van 45 °/₀ H_2SO_4 en bij 125—130° verliep op dezelfde wijze; 6 L. propyleen werden doorgeleid, hiervan werden 5 L. na de proef teruggekregen. De opbrengst aan isopropylalkohol bedroeg 0.2 gram in het destillaat en 0.1 gram in de zure vloeistof, totaal dus 0.30 gr. of 10 °/₀ van het verbruikte propyleen. Ook hier was een groot deel van het verbuikte propyleen verkoold.

Uit deze proeven blijkt dus dat de hydratatie van propyleen door warm verdund zwavelzuur mogelijk is. De reactiesnelheid is echter klein, waardoor de opbrengst gering is. Bovendien werkt het zwavelzuur ontledend op het propyleen in. Werkt men daarentegen met geconcentreerd zwavelzuur bij lage temperatuur, dan wordt het propyleen snel aangegrepen, doch hoofdzakelijk in condensatieproducten overgevoerd.

Daarom scheen het aangewezen de inwerking van andere zuren te probeeren. Voorloopig hebben wij met benzolsulfozuur gewerkt. 6 L. propyleen werden met stoom door een geconcentreerde oplossing van benzolsulfozuur geleid, in het waterige destillaat van deze proef vonden wij 0.25 gr. isopropylalkohol of ongeveer 1½ °/₀ van

---

[1]) De analyse geschiedde door oxydatie tot aceton en colorimetrische bepaling van deze stof.

het doorgeleide propyleen. Ook in dit geval verloopt de reactie dus langzaam.

Het resultaat van de proeven over de inwerking van zuren op aethyleen en propyleen kan derhalve als volgt worden samengevat: Het is mogelijk door middel van mengsels van zwavelzuur en water bij 130—150° uit aethyleen en propyleen in één bewerking aethylalkohol, resp. isopropylalkohol te verkrijgen. Daarbij worden waarschijnlijk de alkylzwavelzuren als tusschenproduct gevormd.

De opbrengst aan alkoholen is echter zeer gering en in het bijzonder bij propyleen wordt de koolwaterstof tijdens de proef op andere wijze ontleed. Deze onderzoekingen worden voortgezet.

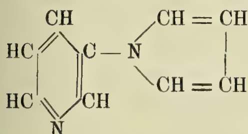
Scheikunde. — J. P. WIBAUT en ELISABETH DINGEMANSE: „*De synthese van eenige Pyridylpyrrolen*".

(Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en F. M. JAEGER).

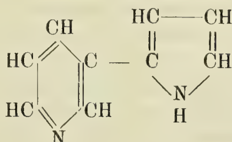
In den loop der onderzoekingen over de structuur van in de natuur voorkomende alkaloiden, is het gelukt verschillende van deze plantaardige basen synthetisch te bereiden. Bij andere groepen van plantenstoffen is men er niet alleen in geslaagd de in de natuur voorkomende stoffen op te bouwen, doch heeft men ook nauw verwante lichamen synthetisch verkregen In de groep der suikers bijv. heeft men langs synthetischen weg een aantal monosen verkregen, die niet in het plantenrijk voorkomen, doch die isomeer zijn met of nauw verwant aan de in de natuur voorkomende suikers. Het inzicht in de chemische en biochemische eigenschappen der monosen is juist zeer veel dieper geworden tengevolge van deze synthetische onderzoekingen. Het schijnt ons niet van belang ontbloot om te trachten een isomeer van een natuurlijk alkaloide op te bouwen teneinde dan later na te gaan hoe de isomere stof zich in physiologisch en biochemisch opzicht van het natuurlijke alkaloide onderscheidt.

Met dit doel voor oogen willen wij trachten een isomeer van het nicotine op te bouwen.

PICTET is bij zijn synthese van nicotine uitgegaan van β-aminopyridine; deze stof werd met slijmzuur verhit waardoor het N(β-pyridyl) pyrrol (I) verkregen werd. Het N(β-pyridyl) pyrrol ondergaat bij hooge temperatuur een intramoleculaire omzetting, waarbij het C-(β-pyridyl) pyrrol (II) ontstaat.



I.

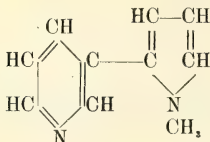


II.

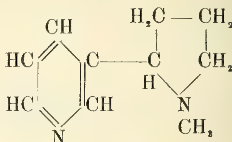
PICTET en CRÉPIEUX [1]) geven aan dit C(β-pyridyl) pyrrol de bovenstaande structuur, waarbij dus aangenomen wordt, dat de pyrrolkern op de α-plaats door de pyridinekern is gesubstitueerd.

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. **28**, 1904 (1895).

In hoeverre het aannemen hiervan gerechtigd is, zal straks nog besproken worden. De bereiding van deze stoffen leverde geen bijzondere moeilijkheden op; daarentegen was de omzetting van het C(pyridyl) pyrrol (II) in het methylderivaat, het nicotyrine (III), moeilijk te verwezenlijken.



III.



IV.

De moeilijkheid is nl. dat als men het pyrrolderivaat (II) aan de pyrrolstikstof tracht te methyleeren door de kaliumverbinding met methyljodide te behandelen er tevens een molecule methyljodide aan de stikstof der pyridinekern geaddeerd wordt, zoodat het joodmethylaat van nicotyrine ontstaat, waaruit dan later methyljodide afgesplitst moet worden.

Pictet en Rotschy[1]) hebben dan ook langs dezen weg slechts zeer weinig van het nicotyrine in handen gekregen. Voor de voortzetting der proeven heeft Pictet daarom een nicotyrine-praeparaat gebruikt, dat door oxydatie van nicotine (IV) volgens de methode van Blau was bereid.

Deze uitweg is in ons geval natuurlijk niet mogelijk. De reduktie van nicotyrine tot nicotine is tenslotte langs een omweg aan Pictet en Rotschy gelukt door gebruik te maken van jood- en broomsubstitutieprodukten.

Indien men deze synthese herhaalt, uitgaande van het α-aminopyridine zal men dus een isomeer van het nicotine kunnen opbouwen, waarin de pyridinekern op de α-plaats gesubstitueerd is.

Aangezien het α-aminopyridine thans een makkelijk toegankelijke stof is, scheen het ons niet onmogelijk om van al de tusschenprodukten voldoende hoeveelheden in handen te krijgen, zoodat men ook mag verwachten, van het eindprodukt zooveel te kunnen bereiden dat de eigenschappen ervan behoorlijk kunnen worden bestudeerd.

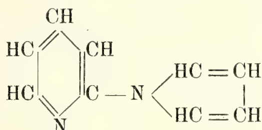
§ 2. *De bereiding van N-(α-pyridyl)-pyrrol.*

Voor de bereiding van N-(α-pyridyl)-pyrrol hebben wij 25 gr. α-amino-pyridine met 28 gr. slijmzuur verhit. Daarbij ontstaat eerst

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. **37**, 1225 (1904).

het zout van slijmzuur met 2 mol. α-aminopyridine. Bij een temperatuur van ongeveer 140° begint dit zout zich te ontleden: onder afsplitsing van water en kooldioxyde ontstaat het pyrrolderivaat, terwijl 1 mol. aminopyridine afgesplitst wordt. Men verkrijgt dus een destillaat, dat behalve water het gewenschte pyrrolderivaat en aminopyridine bevat. Wij hebben het reactieproduct aan gefractioneerde destillatie bij 15 m.M. druk onderworpen. De eerste fractie van 104—130° is in hoofdzaak α-aminopyridine. Dan gaat bij 140—145° een lichtgeel gekleurde vloeistof over, die door afkoelen in ijs tot een witte kristalmassa stolt. Voor het smeltpunt van deze kristallen vonden wij 17°.7; voor het stolpunt 17°.4—17°.5. De kristallisatie in de buurt van het stolpunt geschiedt zeer langzaam, zoodat een nauwkeurige bepaling van de stolpuntstemperatuur lastig is.

Deze stof is het N-α(Pyridyl)-pyrrol, waaraan de onderstaande structuurformule (V) moet worden toegekend.



V.

Het versch gedestilleerde N-(α-pyridyl)-pyrol is een kleurlooze vloeistof, die echter na eenigen tijd een donkere kleur aanneemt. Het kookpunt bij 760 m.M. ligt bij 260—261°.

Deze stof is weinig oplosbaar in koud water, vluchtig met waterdamp en in alle organische oplosmiddelen makkelijk oplosbaar. Een met zoutzuur bevochtigde houtspaander wordt door den damp van het N-(α-pyridyl)-pyrrol roodviolet gekleurd: met een zoutzure oplossing van dimethylaminobenzaldehyde ontstaat een roodviolette kleur, die later in vuilgroen overgaat. Deze kleurreacties worden voor pyrrolderivaten als karakteristiek beschouwd. Door kaliumpermanganaat wordt deze verbinding reeds bij gewone temperatuur snel geoxydeerd.

Voor het stikstofgehalte van dit praeparaat werd gevonden 19.58 °/₀ N en 19.34 °/₀ N, terwijl het berekende percentage voor $C_9H_8N_2$ 19.44 °/₀ bedraagt. Wij hebben van deze stof een pikraat bereid, dat bij 143° smelt. Het joodmethylaat van het N(α-pyridyl)-pyrrol hebben wij verkregen door met de berekende hoeveelheid methyljodide twee uur in een toegesmolten buis op 100° te verwarmen. Het reactieproduct werd uit alkohol omgekristalliseerd: geelachtig witte prismas, smeltpunt 141°—142°.

Het isomere N(β-pyridyl)pyrrol, dat door PICTET en CRÉPIEUX is bereid, wordt door deze onderzoekers beschreven als een vloeistof met een kookpunt van 250.5—251° bij 730 mM. en die bij —10° niet vast wordt.

De opbrengst aan N(α-pyridyl)pyrrol bedroeg in onze proeven 7 à 8 gr. uit 25 gr. α-aminopyridine.

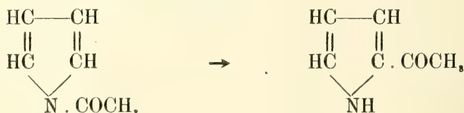
Het bleek ons echter, dat behalve dit pyrrolderivaat nog een andere stof ontstaat bij de reactie tusschen slijmzuur en aminopyridine. Bij de distillatie van het reactieproduct ging namelijk bij 170—190° en 15 m.M. een vloeistof over, die bij kamertemperatuur kristalliseerde. Deze stof had na omkristalliseeren uit alkohol een smeltpunt van 95° en bleek het α-α-dipyridylamine te zijn. Het ontstaan van deze verbinding tijdens de verhitting van het slijmzure zout van aminopyridine, schijnt analoog aan de vorming van diphenylamine uit aniline en zoutzuur aniline.

Inderdaad hebben wij door verhitting in een toegesmolten buis van een mengsel van aequivalente hoeveelheden α-aminopyridine en het zoutzure zout dezer base, gedurende twee uur op 300°, α-α-dipyridylamine verkregen. Wij hopen op deze reactie later terug te komen.

§ 3. *De omzetting van N(α-pyridyl)pyrrol in twee isomere C(α-pyridyl)pyrrolen.*

Door CIAMICIAN [1]) en zijne medewerkers is reeds lang geleden gevonden, dat aan stikstof gesubstitueerde pyrrolderivaten bij verhitting in aan koolstof gesubstitueerde pyrrolderivaten overgaan.

CIAMICIAN en MAGNAGHI [2]) verhitten N-acetylpyrrol in een toegesmolten buis op 250—280° en vonden dat daarbij een deel van het uitgangsmateriaal in pyrrylmethylketon werd veranderd:



Dat de acetylrest hierbij inderdaad de α-plaats in de pyrrolkern bezet heeft, volgt uit het feit, dat uit het bromeeringsprodukt van dit pyrrylmethylketon door oxydatie met salpeterzuur het imide van dibroommaleinezuur ontstaat [3]). Ook eenige andere pyrrolderivaten waarin een acylrest aan stikstof is gebonden gaan bij verhitting in α-pyrrylketonen over.

[1]) Vergel. CIAMICIAN. Ber. d. deutsch. chem. Ges. **37**, 4200 (1904).
[2]) Ibid. **18**, 1828 (1885).
[3]) CIAMICIAN et SILBER. ibid. **20**, 2594 (1887).

Later is door PICTET en zijne medewerkers gevonden, dat N-methylpyrrol, N-phenylpyrrol en dergelijke aan de stikstof gesubstitueerde pyrrolderivaten bij de destillatie door een gloeiende buis in aan koolstof gesubstitueerde pyrrolen overgaan.

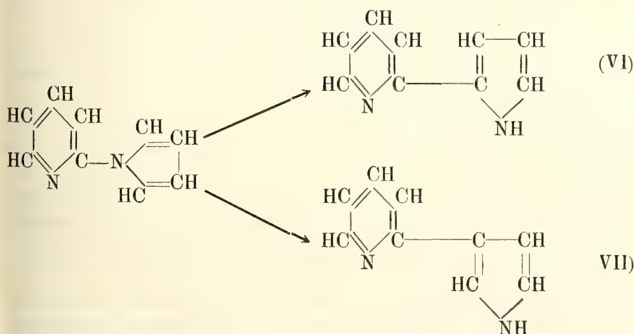
Bij al deze intramoleculaire omzettingen werd slechts één aan koolstof gesubstitueerd pyrrol gevonden, terwijl theoretisch denkbaar zou zijn, dat er twee isomere pyrrolen zouden ontstaan, daar de koolwaterstofrest zou kunnen worden gebonden aan het α of aan het β koolstofatoom van de pyrrolkern.

Bij de omzetting van N-methylpyrrol verkreeg PICTET het α-C-methylpyrrol. De structuur van α-C-methylpyrrol was reeds vroeger door ZANETTI vastgesteld, door deze stof over te voeren in het dioxime van laevuline-aldehyde.

PICTET en CRÉPIEUX nemen nu om redenen van analogie aan, dat het C-phenylpyrrol hetwelk zij verkregen uit N-phenylpyrrol eveneens de phenylgroep aan het α-koolstofatoom draagt en dat hetzelfde geldt voor het C-pyridylpyrrol (II) hetgeen zij uit N-β-pyridylpyrrol (I) verkregen. Een bewijs voor deze opvatting is niet gegeven.

Wat dit β-pyridyl-α-pyrrol van PICTET en CRÉPIEUX betreft, wordt de structuur, die deze onderzoekers er aan toekennen, ongetwijfeld gesteund door het feit, dat zij uit dit β-pyridylpyrrol het nicotyrine (III) hebben gekregen, daar immers de structuurformule (IV) van het nicotine door de onderzoekingen van PINNER zeer waarschijnlijk is gemaakt.

Wij hebben thans gevonden, dat bij de omzetting van het N(α-pyridyl) pyrrol twee isomere C-pyridylpyrolen ontstaan, waarvan het eene bij 88° en het andere bij 132—132.5° smelt. Het verloop van deze reactie moet volgens het onderstaande schema worden voorgesteld:



Aan welke van onze beide isomeren de formule (VI) en aan welke de formule (VII) toekomt, hebben wij nog niet kunnen uitmaken. Het laat zich aanzien, dat dit structuurbewijs ook niet zoo heel gemakkelijk zal zijn te leveren.

Wel blijkt uit deze vondst, dat men niet zonder meer mag besluiten, dat bij de omzetting van aan stikstof gesubstitueerde pyrrolen in aan koolstof gesubstitueerde derivaten, steeds de α-verbinding ontstaat, zoodat gevolgtrekkingen, welke op grond van deze onderstelling zijn gemaakt, met voorzichtigheid zijn te aanvaarden.

Wij geven thans een korte beschrijving van onze proeven over deze reacties.

In de eerste plaats hebben wij onderzocht bij welke temperatuur de omzetting van N(α-pyridyl)pyrrol in de C(α-pyridyl)pyrrolen het beste verloopt, daar in de verhandelingen van Pictet de reactietemperatuur slechts op vage wijze als „roodgloeiend" of „zwak roodgloeiend" wordt aangeduid. De beste werkwijze bleek als volgt te zijn:

25 gr. N(α-pyridyl)pyrrol worden gedestilleerd door een glazen buis, die met stukjes puimsteen is gevuld en die in een electrischen oven op 670° C. wordt verhit. Een deel der stof ontleedt, hetgeen aan de vorming van zware witte nevels kenbaar is. Het destillaat bestaat uit een zwarte vloeistof, die bij kamertemperatuur spoedig vast wordt.

Dit reactieproduct werd met stoom gedestilleerd, waarbij een witte kristallijne stof overging, welke werd afgefiltreerd. Het bleek dat deze stof in koud water zeer weinig oplosbaar is. Het ruwe product smolt bij 84°; na omkristalliseeren uit een mengsel van benzol en ligroine is het smeltpunt 88°. De opbrengst aan deze stof bedroeg ongeveer 12 gram. Het waterige destillaat bevatte slechts zeer weinig onveranderd N(α-pyridyl)pyrrol.

In de destilleerkolf bleef een tweede stof achter, welke niet met waterdamp vluchtig is en die na omkristalliseeren uit heet water bij 132—132.5° smelt.

Eigenschappen van de stof van het smeltpunt 88°.

Uit benzol, waaraan wat ligroine is toegevoegd, verkrijgt men deze stof als harde, sterk glanzende, kleurlooze, octaëdrische kristallen. Voor het stikstofgehalte vonden wij 19.41 %; berekend voor $C_9H_8N_2$: 19.44 %.

Deze stof is makkelijk oplosbaar in alcohol, aether, chloroform aceton en benzol; moeilijker in heet water en ligroine, zeer moeilijk

in petroleumaether. Deze oplossingen vertoonen een blauwe fluorescentie, behalve de waterige en de alkoholische oplossing. Ook het β-pyridyl-α-pyrrol van PICTET en CRÉPIEUX fluoresceert in oplossing.

Ons pyrrolderivaat geeft geen kleurreactie met een met zoutzuur bevochtigden houtspaander; met een zoutzure oplossing van dimethylaminobenzaldehyde ontstaat echter een roodviolette kleur.

Metallisch kalium werkt op deze stof in, waarbij een kaliumverbinding gevormd wordt, zooals voor een aan koolstof gesubstitueerd pyrrol te verwachten is.

Wij losten daartoe de stof in toluol op en lieten het kalium inwerken bij de kooktemperatuur der oplossing. De inwerking verloopt in den aanvang tamelijk snel, doch wordt spoedig langzamer, zoodat men langdurig moet verhitten. De kaliumverbinding scheidde zich als een onoplosbaar geelbruin poeder af.

Ten einde de structuur verder vast te stellen, hebben wij twee gram van het pyrrolderivaat met kaliumpermanganaat in zwavelzure oplossing geoxydeerd. De oxydatie verloopt zeer gemakkelijk bij gewone temperatuur. Uit het reactieproduct hebben wij het karakteristieke violette koperzout van picolinezuur geisoleerd en hieruit door inleiden van zwavelwaterstof het picolinezuur zelf vrij gemaakt. Het zoo verkregen picolinezuur werd gesublimeerd, teneinde het te zuiveren. Het gesublimeerde praeparaat smolt bij 134°.2 terwijl wij voor het smeltpunt van picolinezuur, dat wij door oxydatie van picoline verkregen, 136°.8 vonden. Het mengsmeltpunt van deze twee praeparaten was 132.5—133°. Het stikstofgehalte van ons bij 134.2 smeltend praeparaat bedroeg 11.25 °/₀ (berekend voor picolinezuur 11.38 °/₀).

Niettegenstaande het iets te lage smeltpunt is er geen twijfel aan de identiteit van ons praeparaat, daar ook het karakteristiek kristalliseerende platinazout volkomen hetzelfde uiterlijk had als het platinazout van het uit picoline bereide picolinezuur.

Hieruit blijkt dus dat in het bij 88° smeltende pyrrolderivaat de pyrrolkern aan het α-C-atoom van een pyridinekern is gebonden. Wij hebben van dit pyridylpyrrol een pikraat bereid, dat na omkristalliseeren uit alkohol als fijne, gele naalden van het smeltpunt 227—228° werd verkregen.

Het joodmethylaat van het bij 88° smeltende pyridylpyrrol hebben wij gemaakt door het pyrrolderivaat in methylalkoholische oplossing met overmaat methyljodide 3 uur op 100° te verwarmen. Na verdampen van het oplosmiddel en het overtollige methyljodide werd het reactieproduct uit methylalkohol omgekristalliseerd; wij verkregen op deze wijze geelbruine, harde prismavormige kristallen,

die bij 148° smelten. Voor het stikstofgehalte hiervan vonden wij 9.6 °/₀ en voor het jodiumgehalte 44.7 °/₀. De berekende waarden voor $C_{10}H_{11}NJ$ zijn : N : 9.73 °/₀; J : 44.37 °/₀. Deze stof is dus ontstaan door opneming van één molecule methyljodide; de groep CH_3J is aan het stikstofatoom van de pyridinekern gebonden.

Eigenschappen van het bij 132°.5 *smeltende pyridylpyrrol.*

Deze stof. die zooals wij reeds opmerkten niet vluchtig is met waterdamp en zoo van het bij 88° smeltende isomeer wordt gescheiden, kristalliseert uit alkohol of benzol in tot rozetten vereenigde blaadjes; uit heet water verkrijgt men lange naalden.

Deze base is makkelijk oplosbaar in alkohol, aether, aceton, chloroform en benzol; moeilijker in ligroine en heet water, zeer weinig oplosbaar in laagkokende petroleumaether. Wat de oplosbaarheidseigenschappen betreft, is er dus veel overeenkomst met het bij 88° smeltende isomeer. De aetherische oplossing vertoont een blauwe fluorescentie.

Wij vonden voor het stikstofgehalte 19.94 °/₀ en 19.62 °/₀ (berekend voor $C_9H_8N_2$: 19.44 °/₀ N). Ook deze base geeft niet een kleurreactie met een met zoutzuur bevochtigden dennenspaander; met een zoutzure oplossing van dimethylaminobenzaldehyde ontstaat echter een kersroode kleur, die na een dag in blauwviolet is veranderd.

Dat ook deze stof een pyrrolkern bevat, blijkt weer uit het gedrag tegenover metallisch kalium. De base werd in toluol opgelost en de berekende hoeveelheid kalium toegevoegd. Het kalium lost onder levendige waterstofontwikkeling op; de reactie verloopt veel sneller dan bij het isomeer van smeltpunt 88°. De kaliumverbinding scheidt zich als een wit poeder af.

Wij hebben het pyridylpyrrol van smeltpunt 132.5 op dezelfde wijze met kaliumpermanganaat in zure oplossing geoxydeerd als wij reeds voor het isomeer van smeltpunt 88° beschreven. Uit het bij 132°.5 smeltende pyridylpyrrol verkregen wij eveneens picolinezuur dat na sublimeeren bij 136°.8 smolt en identiek was met het picolinezuur uit picoline. Ook uit de koper- en platinazouten bleek dat wij inderdaad picolinezuur in handen hadden.

Uit deze proeven volgt dus dat de twee stoffen, die bij verhitting op 670° uit N-(α-pyridyl)-pyrrol ontstaan twee isomere C-(α-pyridyl)-pyrrolen zijn, die zich dus daarin onderscheiden, dat in de eene stof de pyrrolkern op de α-plaats gesubstitueerd is en in de andere

stof op de β-plaats, zooals in de formules (VI) en (VII) wordt uitgedrukt.

Wij merken nog op, dat bij deze reactie het bij 88° smeltende isomeer in hoofdzaak ontstaat; de hoeveelheid van het bij 132°.5 smeltende isomeer is slechts gering.

§ 4. *De methyleering van het C-(α-pyridyl)-pyrol van smeltpunt* 88°.

De volgende stap in de synthese van een aan het nicotine isomere stof is, dat het waterstofatoom van de imidegroep der pyrrolkern door de methylrest vervangen wordt.

In de inleiding werd reeds gewezen op de moeilijkheden, die Pictet en Crépieux ondervonden, toen zij deze reactie trachtten te verwezenlijken. Dezelfde moeilijkheden deden zich ook in ons geval voor. De kaliumverbinding van het bij 88° smeltende pyridylpyrrol werd met overmaat methyljodide in een toegesmolten buis gedurende drie uur op 100° verhit. Het reactieproduct werd van overtollig methyljodide bevrijd en in water opgenomen. Bij indampen van de waterige oplossing scheidden zich kristallen af, terwijl in de moederloog joodkalium aanwezig was. Door omkristalliseeren uit weinig water worden deze kristallen gezuiverd. Men verkrijgt geelbruine kristallen die bij 186° smelten. De analyse leverde voor het stikstofgehalte 8.95 °/₀ en voor het jodiumgehalte 42.55 °/₀. Berekend voor $C_{11}H_{11}N_2J$: Stikstof 9.34 °/₀, jodium 42.30 °/₀.

Deze stof is dus het joodmethylaat van C(α-pyridyl)-N-methylpyrrol: $(CH_3J)N—C_5H_4 . C_4H_3N . CH_3$.

Evenals bij de proeven van Pictet en Crépieux was dus niet alleen de pyrrolkern aan stikstof gemethyleerd, doch had zich tevens een molecule methyljodide aan de pyridine-stikstof geaddeerd.

Dit joodmethylaat is makkelijk oplosbaar in water, moeilijk in alkohol, zeer weinig oplosbaar in de overige gebruikelijke organische oplosmiddelen.

Om uit deze verbinding de groep CH_3J af te splitsen, hebben wij de methode gebruikt, die door Pictet en Rotschy[1]) reeds werd toegepast, namelijk verhitten met ongebluschte kalk.

De joodmethylverbinding werd met ongebluschte kalk vermengd en in een retort geleidelijk verhit. Spoedig destilleerde een vloeistof over, die in aether opgenomen werd, ten einde ze te scheiden van een weinig der onveranderde joodmethylverbinding, die ook in kleine hoeveelheid overgedestilleerd was.

Na verdampen der aetherische oplossing bleef een lichtgele vloeistof

---

[1]) L. c.

over; deze base hebben wij in het pikraat overgevoerd, dat na tweemaal omkristalliseeren uit alkohol bij 143° smolt. Voor het stikstofgehalte van deze stof vonden wij 18.19 %, terwijl men voor het monopikraat van C(α-pyridyl)-N-methylpyrrol berekent 18.09 % stikstof.

Wij hebben dus zeer waarschijnlijk het gezochte methylderivaat in handen, dat derhalve een isomeer van het nicotyrine moet zijn.

Het schijnt echter ook mogelijk om de methyleering van het C(α-pyridyl)pyrrol zoodanig uit te voeren, dat men het C(α-pyridyl) N methylpyrrol verkrijgt zonder den omweg over het joodmethylaat te moeten volgen.

Immers ons was reeds gebleken, dat de additie van joodmethyl aan het pyridylpyrrol van smeltpunt 88° pas bij verhoogde temperatuur plaats heeft, terwijl het pyridylpyrrol van Pictet en Crépieux reeds bij gewone temperatuur een molecule joodmethyl addeert.

Wij hebben daarom een mengsel van pyridylpyrrolkalium met methyljodide in moleculaire hoeveelheden in een toegesmolten buis op 50° verwarmd. Het reactiemengsel was een vaste massa, waarin onveranderd pyridylpyrrolkalium en de bovenvermelde joodmethylverbinding van C(pyridyl) N methylpyrrol aanwezig waren.

Uit deze massa liet zich echter met aether een weinig van een gele olie extraheeren. Deze vloeistof werd in alkohol opgenomen en pikrinezuur toegevoegd; er kristalliseerde een pikraat uit, dat na omkristalliseeren uit alkohol bij 142° smolt en blijkens de mengproef identiek bleek met het pikraat van het C(α-pyridyl)-N-methylpyrrol, dat wij boven beschreven.

Onze eerste taak zal zijn van dit C(α-pyridyl)-N-methylpyrrol een grootere hoeveelheid te bereiden en de eigenschappen nauwkeurig te onderzoeken. Verder zullen wij trachten de structuur der twee isomere pyridylpyrrolen nader vast te stellen.

Een uitvoerige mededeeling over dit onderzoek zal in het Recueil des Travaux chimiques des Pays Bas verschijnen.

Amsterdam, *Organisch-chemisch laboratorium der Universiteit*

Wiskunde. — M. J. BELINFANTE: „*Over een generalisatie van* TAUBER'S *theorema betreffende machtreeksen*".

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

Inleiding.

In dit artikel beschouwen we machtreeksen met complexe coëfficienten, doch voor reëele waarden van de veranderlijke x. We onderstellen verder dat zij convergeeren voor $|x| < 1$, en verstaan onder $x \to 1$ of $\lim_{x \to 1}$. dat x door reëele waarden van beneden tot 1 nadert.

TAUBER bewees het volgende theorema[1]):

Indien $\lim_{n = \infty} n a_n = 0$ en $\lim_{x \to 1} \sum_0^\infty a_n x^n = s$, dan zal de reeks $\sum_0^\infty a_n$ convergeeren tot s.

LITTLEWOOD heeft laten zien[2]), dat het gewone bewijs van dit theorema meer bewijst, dan hetgeen beweerd wordt, en dat hetzelfde bewijs geldt voor het theorema:

Als $\sum_0^\infty a_n x^n$ voor $x \to 1$ tusschen eindige grenzen oscilleert, en $\lim_{n = \infty} n a_n = 0$, dan zullen de oscillatiegrenzen van $\sum_0^\infty a_n$ dezelfde zijn als de oscillatiegrenzen van $\sum_0^\infty a_n x^n$ voor $x \to 1$.

In dit artikel zullen uitbreidingen van beide theorema's gegeven worden voor de zoogenaamde middelwaarden van HÖLDER.

§ 1 bevat het bovengenoemde bewijs met een scherpere definitie van de uitdrukking: „schommelen over hetzelfde waardegebied"; in § 2 zal de definitie van HÖLDER'S middelwaarden benevens eenige noodige formules gegeven worden, terwijl § 3 de uitbreidingen van TAUBER'S theorema bevat.

§ 1.

Definitie[3]): We zeggen dat $f(x)$ voor $x \to x_0$ over hetzelfde waarde-

---

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys., 1897 Bd. 8, p. 273.

[2]) Proc. of the Lond. Math. Soc., 1911 Vol. 9, p. 436.

[3]) We onderstellen steeds, dat x resp. y langs reëele waarden van beneden tot x_0 resp. y_0 naderen.

gebied schommelt als $g(y)$ voor $y \to y_0$, wanneer aan de volgende voorwaarden voldaan is:
ten eerste: het is mogelijk bij elk positief getal ε en elk getal $\xi < x_0$ een getal $\eta(\varepsilon, \xi)$ te berekenen, zoodat bij elk getal y_1 tusschen η en y_0 een getal x_1 tusschen ξ en x_0 te berekenen is, dat voldoet aan:

$$|f(x_1) - g(y_1)| < \varepsilon$$

ten tweede: het is mogelijk bij elk positief getal ε en elk getal $\eta < y_0$ een getal $\xi(\varepsilon, \eta)$ te berekenen, zoodat bij elk getal x_1 tusschen ξ en x_0 een getal y_1 tusschen η en y_0 te berekenen is, dat voldoet aan:

$$|f(x_1) - g(y_1)| < \varepsilon.$$

Theorema 1. Als $\lim_{n=\infty} na_n = 0$, *dan schommelt* $\sum_0^\infty a_n x^n$ *voor* $x \to 1$ *over hetzelfde waardegebied als* $\sum_0^n a_i$ *voor* $n \to \infty$.

Bewijs: Volgens een bekend theorema [1]) volgt uit $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = u$, dat ook $\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \sum_0^{\nu-1} u_i = u$. Derhalve geldt, omdat uit $\lim_{n=\infty} na_n = 0$ volgt $\lim_{n=\infty} n\,|a_n| = 0$,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \sum_0^{\nu-1} n\,|a_n| = 0.$$

Derhalve kan bij elk positief getal ε een geheel getal μ berekend worden, zoodat voor $\nu > \mu$

$$\nu\,|a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{\nu} \sum_0^{\nu-1} n\,|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Nu geldt voor $0 < x < 1$:

$$\left|\sum_0^{\nu-1} a_n - \sum_0^\infty a_n x^n\right| \leq \left|\sum_0^{\nu-1} a_n - \sum_0^{\nu-1} a_n x^n\right| + \left|\sum_\nu^\infty a_n x^n\right|$$

$$\leq \sum_0^{\nu-1} a_n (1 - x^n)\,| + \left|\sum_\nu^\infty a_n x^n\right| \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\left|\sum_0^{\nu-1} a_n (1 - x^n)\right| \leq \sum_0^{\nu-1} |a_n| \cdot (1 - x^n) < (1 - x) \cdot \sum_0^{\nu-1} n\,|a_n| \quad \ldots (4)$$

Substitutie van $x_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ in (4) geeft:

---

[1]) BROMWICH, Theory of Infinite Series, p. 383.

$$\left|\sum_{0}^{\nu-1} a_n (1-x_\nu^n)\right| < \frac{1}{\nu} \sum_{0}^{\nu-1} n \, |a_\nu|$$

dus volgens (2) voor $\nu > \mu$:

$$\left|\sum_{0}^{\nu-1} a_n (1-x_\nu^n)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Substitutie van (1) in $\sum_{\nu}^{\infty} a_n x^n$ geeft voor $\nu > \mu$

$$\left|\sum_{\nu}^{\infty} a_n x^n\right| < \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2n} \cdot x^n ,$$

dus a fortiori:

$$< \frac{1}{\nu} \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^n$$

of

$$< \frac{\varepsilon}{2\nu} \cdot \frac{x^\nu}{1-x} .$$

Substitutie van $x_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ in de laatste ongelijkheid geeft:

$$\left|\sum_{\nu}^{\infty} a_n x_\nu^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (3), (5) en (6) volgt:

$$\left|\sum_{0}^{\nu-1} a_n - \sum_{0}^{\infty} a_n x_\nu^n\right| < \varepsilon$$

voor $\nu > \mu$ en $x_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$, en hieruit volgt gemakkelijk dat aan de beide condities van onze definitie voldaan is.

§ 2.

Is $t_1, t_2 \ldots$ een willekeurige fundamentaalreeks van getallen, dan definieeren we de Hölder-middelwaarden van die reeks als volgt [1]):

$$H_n^{(1)}(t) = \frac{t_1 + t_2 \ldots + t_n}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$H_n^{(k)}(t) = \frac{H_1^{(k-1)}(t) + H_2^{(k-1)}(t) + \ldots + H_n^{(k-1)}(t)}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$H_0^{(k)}(t) = H_{-1}^{(k)}(t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

Gemakkelijk is te verifieeren, dat:

$$H_n^{(p)}\left[H^{(q)}(t)\right] = H_n^{(p+q)}(t) \text{ voor } p \geq 1,\ q \geq 1 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

en

[1]) Deze definitie wijkt een weinig af van de gebruikelijke, daar de laatste gegeven wordt voor een somreeks $u_1 + u_2 + \ldots$ en niet voor een fundamentaalreeks.

$$n \, . \, H_n^{(k)}(t) - (n-1) \, . \, H_{n-1}^{(k)}(t) = H_n^{(k-1)}(t) \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Zij

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, ; \quad s_{-1} = s_0 = 0 \, ; \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

dan definieeren we:

$$H_n^{(k)}(s) = A_n^{(k)} \text{ voor } k \geq 1, \quad n \geq -1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

$$s_n = A_n^{(0)} \text{ voor } n \geq -1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12a)$$

$$\sigma_n^{(k)} = n \, . \, [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \text{ voor } k \geq 0, \quad n \geq 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Uit (10), (12) en (13) leiden we af:

$$\sigma_n^{(k)} = A_n^{(k-1)} - A_{n-1}^{(k)} \text{ voor } k \geq 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Ten slotte definieeren we:

$$\varphi_k(x) = \sum_1^{\infty} [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \, . \, x^n \text{ voor } k \geq 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

dus

$$\varphi_0(x) = \sum_1^{\infty} a_n \, x^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15a)$$

We bewijzen nu de volgende identiteiten:[1])

$$H_n^{(1)}[\sigma^{(k)}] = \sigma_n^{(k+1)} + \frac{A_{n-1}^{(k+1)}}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$\varphi_k(x) + (1-x) \, . \, \varphi_k'(x) = \frac{1}{x} \, . \, \varphi_{k-1}(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$(1-x) \, . \, \varphi_k'(x) = \sum_0^{\infty} [\sigma_{n+1}^{(k)} - \sigma_n^{(k)}] \, . \, x^n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Bewijs van (16).

Uit (14) volgt:

$$\begin{aligned}
&\sigma_n^{(k)} + \sigma_{n-1}^{(k)} + \ldots + \sigma_1^{(k)} = \\
&\quad = [A_n^{(k-1)} - A_{n-1}^{(k)}] + \ldots + [A_2^{(k-1)} - A_1^{(k)}] + [A_1^{(k-1)}] \\
&\quad = [A_1^{(k-1)} + A_2^{(k-1)} + \ldots + A_n^{(k-1)}] - [A_1^{(k)} + A_2^{(k)} + \ldots + A_{n-1}^{(k)}] \\
&\quad = n \, . \, A_n^{(k)} - (n-1) \, . \, A_{n-1}^{(k+1)} \\
&\quad = n \, . \, A_n^{(k)} - n \, . \, A_{n-1}^{(k+1)} + A_{n-1}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

derhalve:

[1]) We onderstellen, dat de machtreeksen voor φ_k en φ_{k-1} convergeeren voor $-1 < x < +1$; in de toepassingen zal dit het geval zijn.

$$H_n^{(1)}[\sigma^{(k)}] = \frac{\sigma_1^{(k)} + \sigma_2^{(k)} + \ldots + \sigma_n^{(k)}}{n}$$

$$= A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k+1)} + \frac{A_{n-1}^{(k+1)}}{n}$$

$$= \sigma_n^{(k+1)} + \frac{A_{n-1}^{(k+1)}}{n}.$$

Bewijs van (17).

$$\varphi_k(x) + (1-x)\,.\,\varphi'_k(x) =$$

$$= \sum_0^\infty x^n \left\{ A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)} + (n+1)\,.\,[A_{n+1}^{(k)} - A_n^{(k)}] - n\,.\,[A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \right\}$$

$$= \sum_0^\infty x^n \left\{ [(n+1)\,.\,A_{n+1}^{(k)} - n\,.\,A_n^{(k)}] - [n\,.\,A_n^{(k)} - (n-1)\,.\,A_{n-1}^{(k)}] \right\}$$

$$= \sum_0^\infty x^n\,[A_{n+1}^{(k-1)} - A_n^{(k-1)}] = \frac{1}{x}\,.\sum_0^\infty x^{n+1}\,.\,[A_{n+1}^{(k-1)} - A_n^{(k-1)}]$$

$$= \frac{1}{x}\,.\sum_1^\infty x^n\,.\,[A_n^{(k-1)} - A_{n-1}^{(k-1)}]$$

$$= \frac{1}{x}\,.\,\varphi_{k-1}(x).$$

Bewijs van (18).

$$(1-x)\,.\,\varphi'_k(x) = \sum_0^\infty x^n\,.\left\{(n+1)\,.\,[A_{n+1}^{(k)} - A_n^{(k)}] - n\,.\,[A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}]\right\}$$

$$= \sum_0^\infty x^n\,.\,[\sigma_{n+1}^{(k)} - \sigma_n^{(k)}].$$

§ 3.

We bewijzen de volgende uitbreidingen van TAUBER's theorema:

Theorema 2. *Als* $\lim\limits_{n=\infty} n\,.\,[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$, *en* $|s_n| < c$ *voor iedere* n, *dan zal* $\sum\limits_1^\infty a_n x^n$ [1]) *voor* $x \to 1$ *over hetzelfde waardegebied schommelen als* $A_n^{(p)}$ *voor* $n \to \infty$.

Theorema 3. *Als* $\lim\limits_{n=\infty} n\,.\,[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ *en* $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_1^\infty a_n x^n = s$ [1]), *dan zal ook* $\lim\limits_{n=\infty} A_n^{(p-1)} = s$.

Bewijs van theorema 2.

Uit $|s_n| < c$ volgt gemakkelijk dat ook $|A_n^{(i)}| < c$ en hieruit dat

[1]) Zie opmerking 2 aan het eind van dit artikel.

$$\lim . \frac{A_{n-1}^{(k+1)}}{n} = 0 .$$

Met behulp van (16) concludeeren we hieruit:

$$\lim_{n=\infty} . [H_n^{(1)} (\sigma^{(k)}) - \sigma_n^{(k+1)}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19$$

Nu is bekend, dat uit $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{(k)} (t) = s$ volgt $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{k+1} (t) = s$; [1]) dus volgt uit (19) met behulp van (9):

$$\lim_{n=\infty} . [H_n^{(i+1)} (\sigma^{(k)}) - H_n^{(i)} (\sigma^{(k+1)})] = 0$$

met behulp waarvan we concludeeren:

Als $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{(i)} (\sigma^{(k)}) = 0$, dan is ook $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{(i+1)} (\sigma^{(k-1)}) = 0$. . (20

Volgens het onderstelde geldt: $\lim\limits_{n=\infty} . n . A[_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ of volgens (13)

$$\lim_{n=\infty} . \sigma_n^{(p)} = 0.$$

Dus volgens (19)

$$\lim_{n=\infty} . H_n^{(1)} (\sigma^{(p-1)}) = 0$$

en, door (20) toe te passen, krijgen we successievelijk:

$$\lim_{n=\infty} . H_n^{(2)} [\sigma^{(p-2)}] = 0$$

$$\lim_{n=\infty} . H_n^{(3)} [\sigma^{(p-3)}] = 0$$

. . . .

$$\lim_{n=\infty} . H_n^{(i)} [\sigma^{(p-i)}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

HÖLDER heeft bewezen [2]), dat als $\lim\limits_{n=\infty} . H_n^{(i)} (t) = h$, ook

$$\lim_{x \to 1} . \sum_0^\infty (t_{n+1} - t_n) x^n = h.$$

Met behulp van dit theorema volgt uit (21):

$$\lim_{x \to 1} . \sum_0^\infty [\sigma_{n+1}^{(p-i)} - \sigma_n^{(p-i)}] x^n = 0$$

of volgens (18):

$$\lim_{x \to 1} . (1 - x) . \varphi'_{p-i} (x) = 0$$

dus volgens (17):

[1]) Zie b.v. BROMWICH, Theory of Infinite Series, p. 383.

[2]) Mathematische Annalen, Bd. 20 (1882), p. 535.

$$\lim_{x \to 1} [x \,.\, \varphi_{p-i}(x) - \varphi_{p-i-1}(x)] = 0.$$

We concludeeren hieruit, dat $\varphi_{(p-i)}(x)$ en $\varphi_{p-i-1}(x)$ voor $x \to 1$ over hetzelfde waardegebied schommelen. Dit toepassende voor $i = 1, 2, .. p$, blijkt, dat voor $x \to 1$

$$\varphi_0(x) = \sum_1^\infty a_n x^n \quad \text{en} \quad \varphi_p(x) = \sum_1^\infty [A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}]\, x^n$$

over hetzelfde waardegebied schommelen.

Volgens het ondersteld is $\lim_{n=\infty} n\,[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$; met behulp van theorema 1 volgt hieruit, dat $\varphi_p(x) = \sum_1^\infty [A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}]\, x^n$ voor $x \to 1$ over hetzelfde waardegebied schommelt als $A_m^{(p)} = \sum_1^m [A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}]$ voor $m \to \infty$.

Door deze resultaten te combineeren, blijkt dat $\sum_1^\infty a_n x^n$ voor $x \to 1$ over hetzelfde waardegebied schommelt als $A_m^{(p)}$ voor $m \to \infty$.

Bewijs van theorema 3.

Hulpstelling:

Uit $\lim_{x \to 1} \varphi_{k-1}(x) = s$ en $\varphi_k(x) + (1-x)\,\varphi'_k(x) = \frac{1}{x}\,\varphi_{k-1}(x)$ volgt $\lim_{x \to 1} \varphi_k(x) = s$.

Bewijs van de hulpstelling: Door de differentiaalvergelijking op te lossen krijgen we:

$$\varphi_k(x) = (1-x) \int_0^x \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x\,(1-x)^2}\, dx + C\,(1-x)$$

Daar $\lim_{x \to 1} \varphi_{k-1}(x) = s$ kan bij elk positief getal ε een getal $\xi_1 < 1$ berekend worden, zoodat voor $\xi_1 < x < 1$

$$|\, \varphi_{k-1}(x) - s \,| < \varepsilon$$

$$(1-x) \,.\, \int_0^1 \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x\,(1-x)^2}\, dx = (1-x) \int_0^{\xi_1} \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x\,(1-x)^2}\, dx + (1-x) \int_{\xi_1}^x \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x\,(1-x)^2}\, dx$$

$$= (1-x) \int_0^{\xi_1} \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x\,(1-x)^2}\, dx + (1-x) \int_{\xi_1}^x \frac{s}{x\,(1-x)^2}\, dx + (1-x) \int_{\xi_1}^x \frac{\varphi_{k-1}(x) - s}{x\,(1-x)^2}\, dx$$

$$= \qquad I \qquad + \qquad II \qquad + \qquad III$$

$\lim\limits_{x \to 1} I = 0$; derhalve kunnen we een getal $\xi_2 > \xi_1$ doch < 1 berekenen, zoodat voor $\xi_2 < x < 1$:

$$| I | < \varepsilon.$$

Voorts is het mogelijk een getal $\xi_3 > \xi_2$ doch kleiner dan 1 te berekenen, zoodat voor $\xi_3 < x < 1$ $|II - s| < \varepsilon$, want

$$II = (1-x)\int_{\xi_1}^{x} \frac{s \cdot dx}{x(1-x)^2} = (1-x) \cdot s\left[\log \frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x} - \log \frac{\xi_1}{1-\xi_1} - \frac{1}{1-\xi_1}\right]$$

$$= s + \left[(1-x)\log \frac{x}{1-x} - (1-x)\log \frac{\xi_1}{1-\xi_1} - \frac{1-x}{1-\xi_1}\right] s$$

en de uitdrukking tusschen haken nadert tot nul als $x \to 1$.

Op dezelfde wijze kunnen we $\xi > \xi_3$ doch kleiner dan 1 berekenen, zoodat voor $\xi < x < 1$ $|III| < 2\varepsilon$. We hebben dan voor $\xi < x < 1$

$$| I | < \varepsilon, \; | II - s | < \varepsilon \text{ en } | III | < 2\varepsilon,$$

en dus

$$| I + II + III - s | < 4\varepsilon.$$

Daar ε willekeurig is en $\lim\limits_{x \to 1} C(1-x) = 0$ volgt hieruit:

$$\lim_{x \to 1} \varphi_k(x) = s.$$

We bewijzen nu theorema 3 als volgt: volgens het ondersteldе is: $\lim\limits_{x \to 1} \varphi_0(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$; door de hulpstelling toe te passen vinden we:

$$\lim_{x \to 1} \varphi_1(x) = s \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \varphi_2(x) = s \quad ; \quad \ldots\ldots \lim_{x \to 1} \varphi_p(x) = s \; ;$$

of:

$$\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty [A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}]\, x^n = s$$

Bovendien geldt volgens het ondersteldе: $\lim\limits_{n = \infty} n\,[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ en daarom krachtens het oorspronkelijke theorema van TAUBER [1]):

$$\lim_{n = \infty} A_n^{(p)} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Uit $\lim\limits_{n = \infty} n\,[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$, (13) en (14) volgt:

$$\lim_{n = \infty} [A_n^{(p-1)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$$

---

[1]) Uit $\lim\limits_{n = \infty} n a_n = 0$ en $\lim\limits_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ volgt $\lim\limits_{n = \infty} \sum_1^n a_i = s$.

dus volgens (22)

$$\lim_{n=\infty} A_n^{(p-1)} = s,$$

Opmerking 1.

Het is niet moeilijk in te zien, dat de volgende stelling een onmiddellijk gevolg is van theorema 3:

Theorema A: De voorwaarden $\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ *en* $\lim_{n=\infty} n[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ *zijn elk noodzakelijk voor het bestaan van de betrekking:* $\lim_{n=\infty} A_n^{(p-1)} = s$, *en tezamen zijn zij voldoende.*

Inderdaad volgt de noodzakelijkheid van de conditie $\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ uit het hierboven geciteerde theorema van Hölder, en blijkt de noodzakelijkheid van de conditie $\lim_{n=\infty} n[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ door deze te schrijven $\lim_{n=\infty} [A_n^{(p-1)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ en op te merken, dat uit $\lim_{n=\infty} A_n^{(p-1)} = s$ volgt $\lim_{n=\infty} A_n^{(p)} = s$.

Een bijzonder geval van dit theorema is bewezen door Tauber [1]), nl.:

Theorema B. De voorwaarden $\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ *en*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) = 0$$

zijn beide noodzakelijk voor de convergentie van $\sum_1^\infty a_n$, *en tezamen zijn zij voldoende.*

Dit blijkt door $p=1$ te substitueeren in theorema A, want:

$$A_n^{(0)} = s_n$$

$$n[A_n^{(1)} - A_{n-1}^{(1)}] = A_n^{(0)} - A_{n-1}^{(1)} = s_n - \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n-1}[(n-1)s_n - (s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1})] = \frac{1}{n-1}[s_n - s_1) + (s_n - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})]$$

$$= \frac{1}{n-1}[(a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_3 + \dots + a_n) + \dots + a_n]$$

$$= \frac{1}{n-1}[(n-1)a_n + (n-2)a_{n-1} + \dots + a_2]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_1^n (p-1)a_p,$$

1) Bromwich, op. cit., p. 251.

en tot de equivalentie van de voorwaarden $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \ldots na_n) = 0$ en $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n-1}[a_2 + 2a_3 + \ldots + (n-1)\,a_n] = 0$ voor theorema B kunnen we besluiten uit de vergelijkingen:

$$U(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;\ V(x) = a_2 x + a_3 x^2 + \ldots;\ U(x) = a_1 x + x\,V(x)$$

Een eenigszins andere generalisatie van theorema B is door A. KIENAST gegeven [1]). KIENAST definieert:

$$s_n = \sum_1^n a_k \qquad r_n^{(1)} = \sum_1^n k\,a_k$$

$$s_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_1^{n-1} s_k$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$s_n^{(\lambda+1)} = \frac{1}{n}\sum_{\lambda+1}^{n-1} s_k^{(\lambda)} \qquad r_n^{(\lambda+1)} = \sum_{\lambda}^{n-1} \frac{1}{k}\,r_n^{(\lambda)}$$

en bewijst het volgende theorema:

Theorema C. De voorwaarden $\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$ en $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} r_n^{(\lambda+1)} = 0$ *zijn elk noodzakelijk voor het bestaan van* $\lim_{n=\infty} s_n^{(\lambda)} = s$, *en tezamen zijn ze voldoende.*

De middelwaarden $s_n^{(\lambda)}$ verschillen van de middelwaarden van CESARO en HÖLDER, doch in een tweede artikel [2]) heeft KIENAST de equivalentie van zijn middelwaarden en die van CESARO-HÖLDER aangetoond.

Opmerking 2.

We hebben steeds stilzwijgend aangenomen, dat $\sum_1^\infty a_n x^n$ convergeert voor $-1 < x < 1$. Dit is echter voor ons doel overbodig, daar uit de voorwaarde $\lim_{n=\infty} n[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ de convergentie van $\sum_1^\infty a_n x^n$ voor $|x| < 1$ volgt.

Inderdaad concludeeren we uit $\lim_{n=\infty} n[A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}] = 0$ tot de absolute convergentie van $\varphi_p(x) = \sum_1^\infty [A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}]\,x^n$ voor $|x| < 1$.

---

[1]) Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., vol. 19 (1918), p. 129.

[2]) Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., vol. 20 (1920), p. 74.

Verder hebben we volgens (17)

$$\varphi_{k-1}(x) = x \cdot \varphi_k(x) + x(1-x) \cdot \varphi'_k(x) ;$$

derhalve volgt uit de absolute convergentie van $\varphi_k(x)$, waaruit direct de absolute convergentie van $\varphi'_k(x)$ volgt, de absolute convergentie van $\varphi_{k-1}(x)$. Door deze redeneering te herhalen, bewijzen we ten slotte de absolute convergentie van $\varphi_0(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ voor $|x| < 1$.

Plantkunde. — J. P. BANNIER: „*Cytologische onderzoekingen over apogamie bij eenige elementaire soorten van Erophila verna*".

(Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL).

Nadat JORDAN in 1873 [1]) zijne overbekende mededeeling omtrent het constant zijn der elementaire soorten, speciaal die van *Erophila verna*, gedaan had, werd deze zeer polymorphe soort niet alleen het klassieke voorbeeld van volkomen constantie der elementaire soorten, maar ook meermalen het onderwerp van experimenteel onderzoek. Het bekendste hierover is wel het werk van ROSEN betreffende de vorming van nieuwe subspecies door kruising, waarbij de bastaarden niet de wetten van MENDEL zouden volgen, maar, na eene zeer heterogene F_2 gevormd te hebben, in de F_3 en volgende generaties constant bleven [2]). De verklaring hiervan zal slechts te verkrijgen zijn door cytologisch onderzoek, gepaard aan herhaalde bastaardeeringspogingen.

De onmiddellijke aanleiding tot de onderzoekingen, waarvan de belangrijkste voorloopige resultaten hieronder medegedeeld worden, bestond in dergelijke bastaardeeringspogingen, verricht door Dr. J. P. LOTSY tusschen twee nabij Bennebroek gevonden en door hem constant verder gekweekte, elementaire soorten, welke, daar zij niet met zekerheid te identificeeren waren met reeds beschreven subspecies, *Erophila cochleoides* en *Erophila violaceo-petiolata* gedoopt werden. Deze proeven bleven in zooverre zonder resultaat, dat, na kruising, geen bastaarden ontstonden, maar alle dochter-individuen aan de moederplant gelijk en in volgende generaties constant waren.

Een enkele plant, welke eerst als bastaard werd beschouwd en zeer fraai intermediair was tusschen de beide genoemde subspecies, bleek bij nader cytologisch onderzoek onmogelijk een door de beproefde kruising ontstane hybride te kunnen zijn. De nakomelingen van deze plant waren volmaakt constant. Zij bezaten alle geheel den habitus van den intermediairen vorm. Dat de genoemde

---

[1]) ALEXIS JORDAN. Remarques sur le fait de l'existence en société, à l'état sauvage, des espèces végétales affines et sur autres faits relatifs à la question de l'espèce. Bull. Ass. franc. Avanc. des Sciences Lyon 1873.

[2]) FELIX ROSEN. Die Entstehung der elementaren Arten von Erophila verna. Beitr. z. Biol. d. Pfl. 1911. Bnd. X, p. 379—421.

plant geen ware bastaard zijn kan, maar waarschijnlijk uit een overgesprongen zaad van eene andere, hier niet nader besproken, elementaire soort onstaan is, is echter eerst met zekerheid aangetoond door het onderzoek der generatieve kernen.

In het voorjaar van 1921 stond Dr. LOTSY een deel van zijn materiaal aan mij af, waarvoor ik hem ten zeerste dankbaar ben. De bedoeling was, de kruisingsproeven te herhalen, de planten voort te kweeken en hen cytologisch te onderzoeken om zekerheid te verkrijgen omtrent de oorzaak van het constant blijven.

Ook mijne eigen kruisingsproeven leverden slechts planten op, die aan de moederplant gelijk waren. Zoowel de culturen van *E. cochleoides* en van *E. violaceo-petiolata*, als die van den tusschenvorm, welke eerst als bastaard aangezien werd, maar welke ik thans — nu gebleken is, dat dit niet het geval is — wegens zijn uitermate dichte bladrozet *Erophila confertifolia* zou willen noemen, bleven in de jaren 1922 en 1923 [1]) geheel constant. De resultaten der kruisingsproeven deden reeds aanstonds het vermoeden opkomen, dat hier apogamie [2]) in het spel kon zijn. Dit zou wel niet in overeenstemming zijn met de door ROSEN verkregen resultaten maar, indien het juist was, dan zou misschien het constant blijven van diens *Erophila's* in de F_3 te verklaren zijn.

Dat het vermoeden van apogamie juist was, moge blijken uit de volgende voorloopige aanteekening omtrent de verkregen resulaten.

Wat de methoden betreft, zij hier opgemerkt, dat de beste preparaten werden verkregen door fixeering met chloroform-alcohol-ijsazijn volgens CARNOY. De doorsneden werden, na insmelting in paraffine, vervaardigd met een microtoom van REINHOLD—GILTAY op een dikte van 5 μ. De kleuring geschiedde met HEIDENHAIN'S haematoxyline.

Evenals alle tot nog toe beschreven en op één enkele plaats bijeen gevonden elementaire *Erophila*-soorten, bezitten ook de hier bewerkte subspecies, naast punten van duidelijk verschil, groote overeenstemming, die wijst op een zeer na systematisch verband. *E. cochleoides* is de kleinste der drie, bezit korte, spatelvormige bladeren met niet zeer sterk afloopenden voet en slechts in ouderen toestand ondiep ingesneden rand. De bloemstengels zijn stevig en niet zeer hoog. Hiertegenover bezit *E. confertifolia* langere en slap-

[1]) Ofschoon de planten nog niet bloeien, is toch het constant blijven reeds met groote zekerheid aan de jonge rozetten vast te stellen.

[2]) „Apogamie" is hier gebezigd in de definitie van STRASBURGER, dus: ontwikkeling van eene onbevruchte diploïde eicel; volgens WINKLER moet hier over somatische parthenogenesis gesproken worden.

pere bloemstengels, eene zeer dichte rozet van grootere, in een tamelijk breeden voet afloopende bladeren, die eenige grove insnijdingen vertoonen, terwijl in *E. violaceo-petiolata* al deze eigenschappen nog veel sterker uitgesproken zijn. Ook de bloemvorm is bij de drie subspecies verschillend.

Het cytologisch onderzoek bracht in de eerste plaats aan het licht, dat de kernen uiterst klein zijn: in jonge, rustende cellen n.l. slechts

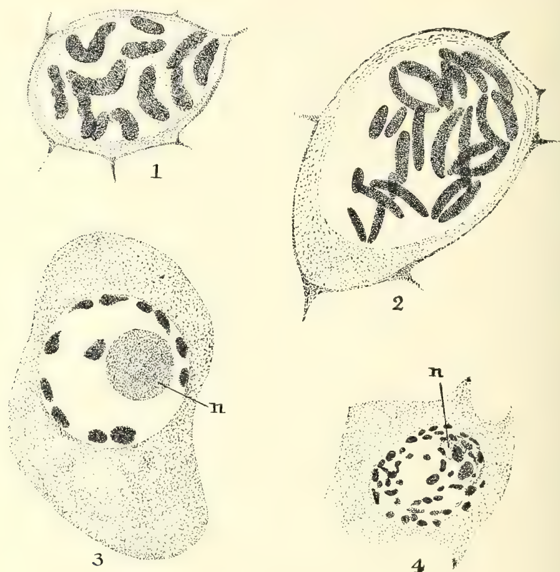


Fig. 1—4. 1 Vegetatieve kernplaat van *Erophila cochleoides*. 2 Idem van *E. confertifolia*. 3 Vegetatieve prophase van *E. violacea-petiolata;* 4 Uiteenvallen der chromosomen in eene vegetatieve cel van *E. violaceo-petiolata*. n = nucleolus (in alle figuren). Vergr. 1-2-3: 2200 ×; id. 4: 1100 ×.

$2^1/_2$—$3^1/_2$ μ. Vegetatieve celdeelingen werden bestudeerd in stengeltoppen, waarvan zich in de doorsneden door geheele bloeiwijzen gewoonlijk een dwarsdoorsnede bevindt. Bij de vegetatieve deelingen van *E. cochleoides* en van *E. confertifolia* doen zich geen abnormaliteiten voor. *E. cochleoides* bezit 12 (Fig. 1), *E. confertifolia* 24 chromosomen (Fig. 2). Zij liggen typisch in paren, eene eigenschap, welke bij alle deelingen en in bijna alle bestudeerde stadia

teruggevonden werd. De chromosoomparen zijn in grootte aanmerkelijk van elkaar verschillend. De vegetatieve cellen van *E. violaceo-petiolata* vertoonen eene eigenaardigheid, welke slechts aan deze subspecies eigen schijnt te zijn en die in het plantenrijk niet dan zeer zelden voorkomt. Het normale getal der chromosomen (diploïd) is hier 12 (Fig. 3). Dit getal kon echter slechts zelden vastgesteld worden. Bijna altijd waren de gevonden getallen hooger, steeds van elkaar verschillend, tot 100 toe en waarschijnlijk nog wel hooger. Slechts in zeer bepaalde vroege prophasen kon met zekerheid het getal 12 gevonden worden, terwijl in zeer late telophasen, kort voor het intreden van den rusttoestand, dit getal weer ongeveer bereikt werd. In dit laatste stadium zijn de tellingen zeer moeilijk wegens de kleinheid der kernen en de onduidelijke begrenzing der chromosomen. Tenslotte is er nog een derde stadium, waarin het normale getal optreedt, namelijk het stadium der splijting en van het uiteengaan der chromosomen. Een enkele maal kon echter ook daar duidelijk het getal 12 vastgesteld worden. In alle andere deelingsstadia zijn de chromosomen uiteengevallen in een groot aantal chromatinedeeltjes (Fig. 4). Hoe verder het deelingsstadium van het ruststadium verwijderd is, des te grooter is dit aantal. Hoe de overgang tusschen deze stadia en het metaphasische deelingsstadium tot stand komt, kon nog niet nagegaan worden.

De vorming van den embryozak geschiedt bij alle drie elementaire soorten in hoofdpunten op dezelfde wijze. Een groote rechthoekige subepidermale cel wordt, zonder eerste eene wandcel te vormen, onmiddellijk tot embryozakmoedercel. Deze laatste vergroot zich aanmerkelijk, de kern doorloopt een langdurig synapsisstadium. Tenslotte deelt zij zich in twee dochterkernen, welke zich niet dadelijk nogmaals deelen, maar zich afronden en evenals normale vegetatieve deelingskernen in een ruststadium overgaan. Een celwand wordt gevormd en gedurende korten tijd blijven de beide dochtercellen ongedeeld liggen. Eerst hierna treedt in beide cellen eene tweede deeling op. De micropylaire cel degenereert veelal reeds gedurende deze deeling; anders geschiedt dit met de pas gevormde producten ervan. Deze deeling der micropylaire dochtercel vindt zeer vaak in dwarse richting plaats, terwijl die van de chalazale dochtercel steeds ongeveer dezelfde richting vertoont als de eerste deeling der embryozakmoedercel. De meest naar de chalaza toe gelegene der vier kleindochter- of tetrade-cellen vergroot zich en wordt primaire embryozakcel. De drie andere tetrade-cellen zijn dan gewoonlijk reeds gedegenereerd en vormen nauw tegen elkaar aansluitende kappen over de embryozakcel heen.

De ontwikkeling van de primaire embryozakcel tot embryozak geschiedt waarschijnlijk volgens het normale schema; 2- en 4-kernige stadia werden vele malen aangetroffen. De micropylair gelegen kernen in het laatstgenoemd stadium vormen eicel, synergiden en één der poolkernen. Of de deeling der naar de chalaza toe gelegen groep ook steeds normaal in haar werk gaat, kon niet zeker vastgesteld worden, daar de antipoden uiterst vroeg, misschien reeds gedurende hunne vorming, degenereeren. Dat echter steeds één of meer antipoden en een onderste poolkern gevormd worden, is zeker. De beide poolkernen versmelten spoedig met elkaar.

De pollenvorming vertoont bij de onderzochte gevallen niets bijzonders. Zeer typische tetraden ontstaan uit de pollenmoedercellen. Aan de gevormde pollenkorrels was echter onmiddellijk te zien, dat zij voor een groot gedeelte steriel moesten zijn. Eene deeling van de kern eener pollenkorrel werd nooit duidelijk waargenomen. Ook kunstmatige pollencultures mislukten. Op de rijpe stempels werden echter gewoonlijk wel in aanmerkelijke hoeveelheid pollen gevonden. Hiervan drongen slechts in hoogst enkele stempels eenige pollenbuizen tot op zekere diepte binnen. In één geval bereikte de pollenbuis de holte van het vruchtbeginsel. Ofschoon hier dus de kans op bevruchting in dit opzicht verbeterd was, werden evenmin als in alle andere preparaten uiteinden van pollenbuizen in den embryozak gevonden. Nooit kon in de embryozakken een mannelijke kern worden aangetoond; steeds blijft de eicel alleen liggen om zich na eenigen tijd zelfstandig te vergrooten. Tenslotte begint zij zich te deelen, waarna de eerste kiemkogel- en suspensorcellen ontstaan. De verdere ontwikkeling van het jonge embryo geschiedt normaal.

Is hierdoor het optreden van apogamie reeds duidelijk geworden, volkomen zeker blijkt dit eerst uit het gedrag der kernen van de embryozakmoedercellen. Deze beginnen hunne deeling, evenals bij zoovele andere apogame planten, volgens het heterotypische schema. Velerlei synapsis- en spireemstadiën werden gezien. In plaats van hierna gemini te vormen van chromosomen, die tegen elkaar aan liggen of versmolten zijn, worden slechts schijn-diakineseparen waargenomen. De chromosomen naderen elkaar, blijven echter op eenigen afstand van elkaar liggen. Vanaf dit oogenblik heeft de deeling een homoïotypisch karakter. Fig. 5 geeft een telophase-stadium weer der deeling van de embryozakmoedercel van *E. cochleoides*. In de bovenste micropylaire dochterkern zijn de chromosomen in diploïd aantal (12) aanwezig. Ook in de chalazale dochterkern zijn zij in dit aantal te tellen, echter minder duidelijk. Het microtoom-

mes raakte deze kern, zoodat zich in de nevenliggende doorsnede nog enkele uiteinden van chromosomen bevinden. In de figuur is aangegeven, welke fragmenten in de twee doorsneden bij elkaar behooren. Het telophase-stadium van *E. confertifolia*, welke vegetatief **24** chromosomen bezit, is nog veel duidelijker en bewijzender voor

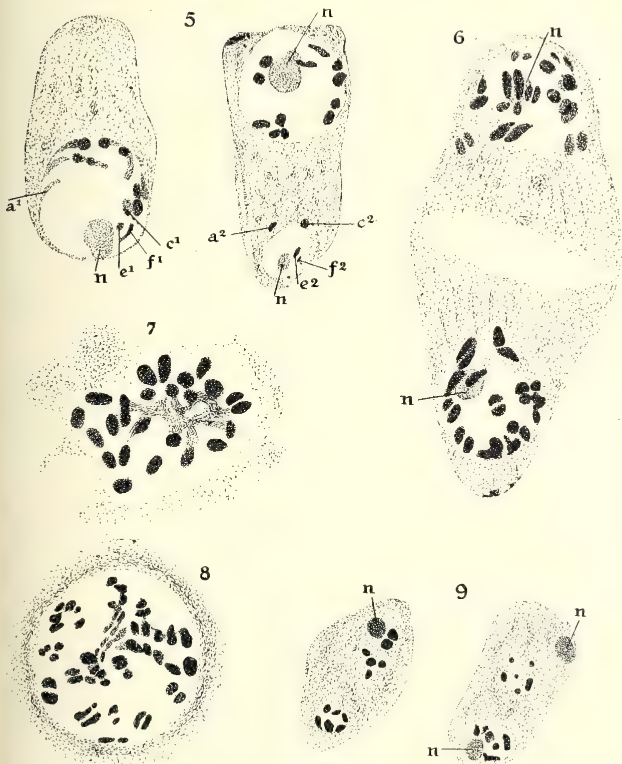


Fig. 5—9. **5** Dochterkernen der embryozakmoedercel van *E. cochleoides*, links chalazale kern, rechts micropylaire kern; a^1—a^2, c^1—c^2 etc.; tot één chromosoom behoorende fragmenten. **6** Idem van *E. confertifolia*. **7** Endospermkern van *E. violaceo-petiolata*. **8** Eéne der 3 doorsneden door eene pollenmoedercel van *E. violaceo-petiolata*. **9** Vorming der tetrade kernen bij eene reductiedeeling in eene pollenmoedercel van *E. cochleoides*. Vergr. **5-6-8**: 2200 ×; id. **7**: 1450 ×; id **9**: 1100 ×.

de apogamie en is weergegeven in fig. 6. Hier bevinden zich in beide kernen 24 chromosomen; in de micropylaire kern zijn zij het beste te tellen. Dat de chomosomen ook na de deeling nog zoo kennelijk in paren liggen, duidt wel op eene zeer sterke affiniteit, welke niet door het zelfstandig splijten verbroken kan worden.

Bij de deeling van embryozakmoedercel en pollenmoedercel der *E. violaceo-petiolata* treedt weder hetzelfde verschijnsel op, dat ook in vegetatieve cellen werd waargenomen, n.l. het uiteenvallen der chromosomen. Hier liggen de chromatinedeeltjes echter merkwaardigerwijze in paren, zooals de geheele chromosomen bij de beide andere subspecies in schijn-gemini gevonden werden. Ook hier werden zeer hooge getallen gevonden; 50, 64, 70 werden bij benadering vastgesteld, echter ook hoogere tot 130 à 140 toe. Fig. 8 geeft een dergelijk stadium uit een pollenmoedercel, welke in 3 coupes gesneden was, waarvan hier slechts ééne afgebeeld is. Desniettemin zijn hier reeds ongeveer 60 chromosoomdeeltjes te tellen. Daar de embryozakmoedercel geheel hetzelfde beeld geeft en ook hier na de deeling onmiddellijk hetzelfde verschijnsel optreedt, was het onmogelijk een paar dochterkernen te vinden, waar met zekerheid het diploide aantal, dat voor de apogamie bewijzend zou zijn, vast te stellen was. Hier kwamen echter eenige zeer duidelijke endospermdeelingen te hulp. Daar vastgesteld werd, dat de poolkernen zich ook bij deze apogame plant met elkaar vereenigen, moeten de endospermkernen dus twee maal zooveel chromosomen bezitten als de embryozakkernen. Om apogamie aan te toonen, moest dit aantal dus 24 zijn. Zooals uit fig. 7 blijkt, is dit ook het geval. Deze figuur geeft eene doorsnede weer, midden door eene deelingsspoel, gezien in de richting van één der polen. De uiteinden van de 24 chromosomen zijn duidelijk te onderscheiden, terwijl ook het naar de pool trekken van enkele chromosomen zichtbaar is.

Terwijl bij de deelingen van de embryozakmoedercel geen reductie van het aantal chromosomen plaats heeft, ook al heeft het overgaan van de heterotypische deelingsphase in de homoïotypische pas zeer kort vóór de deeling plaats, in de pollenmoedercellen treedt de reductiedeeling normaal op. Gedurende deze deelingen werd in geen van de onderzochte gevallen eene andere bijzonderheid opgemerkt dan het reeds genoemde uiteenvallen bij *E. violaceo-petiolata*. Fig. 9 geeft in twee doorsneden de tetrade-kernen weer van eene pollenmoedercel van *E. cochleoides*, welke alle het gereduceerde aantal chromosomen bezitten.

Zooals echter reeds gezegd werd, is de groote meerderheid der hieruit ontstane pollenkorrels steriel. Maar ook indien er fertiele onder hen zijn, bereiken zij hun doel niet.

Als belangrijkste resultaat is dus gevonden, dat in deze drie elementaire soorten van *Erophila* apogamie optreedt. Hierdoor is thans het mislukken der kruisingsproeven verklaard. De proeven van ROSEN hebben aangetoond, dat niet alle subspecies apogaam zijn, althans niet obligaat apogaam. Het constant blijven van diens nieuwe vormen in de F_3 zou door apogamie zeer wel te verklaren zijn. De intermediaire bastaardvorming in de F_1 en het zonderlinge uitzien der F_2 is daarentegen nog niet duidelijk en er zou, in verband hiermede, eene speciale hypothese te baat genomen moeten worden om het plotselinge optreden der apogamie te verklaren.

Utrecht, Botanisch Laboratorium. Maart 1923.

Zoölogie. — G. J. van Oordt: *„Secundaire geslachtskenmerken en mannelijke geslachtsklier van den tiendoornigen stekelbaars (Gasterosteus pungitius L.).”*

(Aangeboden door de Heeren J. Boeke en J. F. van Bemmelen).

Het is van algemeene bekendheid, dat de geslachtsklieren een zeer sterken invloed uitoefenen op de z. g. secundaire geslachtskenmerken. Dit blijkt reeds uit de groote somatische en psychische verschillen, die bijv. Zoogdieren of Vogels, welke op jeugdigen leeftijd gecastreerd werden, ten opzichte van normale dieren vertoonen.

Algemeen neemt men tegenwoordig aan, dat bij de Vertebraten deze van de geslachtsklier uitgaande werking tot stand komt door interne secretie, dus door den invloed van bepaalde stoffen, die afgegeven worden aan het bloed („hormonen”). Daar de secundaire geslachtskenmerken in het algemeen het duidelijkst in het mannelijke geslacht optreden, zal ik verder, gemakshalve, alleen spreken over de vorming dezer hormonen in den testis.

In den laatsten tijd heeft men vooral getracht de vraag te beantwoorden door welk gedeelte van de mannelijke geslachtsklier deze hormonen gevormd worden. De talrijke onderzoekers, die zich met dit onderwerp bezighouden, zijn hoofdzakelijk tot de volgende twee geheel tegenover elkaar staande meeningen gekomen.

Volgens Stieve (1921) e. a. zouden deze hormonen uitsluitend gevormd worden door de geslachtscellen, terwijl daarentegen Bouin en Ancel (1903), Steinach (o. a. 1920), Lipschütz (1919), hunne medewerkers e. a. meenen, dat deze hormonen afkomstig zijn uit de cellen van Leydig, welke gelegen zijn in het zich tusschen de zaadkanaaltjes bevindende interstitium. Volgens Stieve zouden deze interstitieele cellen slechts de voedingsstoffen, die noodig zijn voor de vorming der geslachtscellen, uit het bloed opnemen om ze later af te geven aan het spermatogene weefsel. Volgens dezen onderzoeker moet dus aan den naam „Puberteitsklier”, welke door Steinach en Lipschütz aan de gezamenlijke cellen van Leydig gegeven wordt, geen waarde toegekend worden.

Tot nu toe heeft men zich bij de bestudeering van het hierboven

genoemde onderwerp bijna uitsluitend bezig gehouden met Zoogdieren, Vogels en Amphibia. Ik besloot daarom bij een Visch de veranderingen in de geslachtsklier bij het optreden der secundaire geslachtskenmerken na te gaan en koos hiervoor den gemakkelijk verkrijgbaren Tiendoornigen Stekelbaars, *Gasterosteus pungitius* L., waarvan de mannetjes in den paartijd, in het voorjaar dus, een aantal secundaire geslachtskenmerken bezitten (TITSCHACK 1922), waarvan de volgende gemakkelijk waarneembaar zijn.

In het voorjaar ziet men bij de mannetjes aan de keel en aan het abdomen een zeer duidelijke zwarte pigmentatie optreden (bij de driedoornige soort een roode), die zich in de meeste gevallen over de rest van het lichaam kan uitbreiden, zoodat zulke dieren, op de borststekels na, donkerzwart worden. Buiten den paartijd zijn de mannetjes en de wijfjes moeilijk van elkaar te onderscheiden; beiden zijn dan donker gevlekt op lichtgroenen ondergrond. Individueele kleurverschillen komen voor.

Ieder mannetje vervaardigt een nest, waarin de eieren worden afgezet. Het materiaal, waaruit dit nest bestaat (deelen van waterplanten, korte takjes enz.) wordt door het mannetje verzameld en door middel van een secreet, dat door de nierkanaaltjes en oerniergang wordt afgescheiden (TITSCHACK 1922, COURRIER 1922*b*, beide bij *Gasterosteus aculeatus*) aan elkaar vastgehecht. Deze eigenaardige nier-secretie heeft uitsluitend bij het mannetje in den paartijd plaats; de nier vergroot zich daarom in het voorjaar zeer sterk; de nierkanaaltjes krijgen een grooteren diameter en anderen inhoud.

Het mannetje duldt geen andere mannetjes in de nabijheid van zijn nest, dat door hem zorgvuldig bewaakt wordt. Wanneer de eieren in het nest zijn afgezet, worden zij direct bevrucht. Gedurende de ontwikkeling der eieren zorgt het mannetje, dat deze voortdurend van zuurstof worden voorzien door met de borstvinnen versch water naar het nest toe te voeren. Soms vallen in het aquarium wel eens eieren uit het nest; deze worden door het mannetje weder verzameld en met den bek in het nest teruggebracht. Of de jongen na het verlaten van het nest in de natuur nog door het mannetje bewaakt worden is mij niet bekend; men moet zorg dragen de in gevangenschap levende jonge vischjes van hun vader en de andere aquariumbewoners te scheiden, daar zij anders direct worden opgegeten.

Het doel van mijn onderzoek, dat in September 1922 begonnen werd, was na te gaan, welke veranderingen de testes der stekelbaarzen vertoonen zouden bij het optreden der secundaire geslachts-

kenmerken. Ik was dus van plan op gezette tijden gedurende den winter en het er op volgende voorjaar een aantal stekelbaarzen te vangen en hunne geslachtsklieren te onderzoeken. Ik verkeerde toen in de meening, dat over het verband van secundaire geslachtskenmerken en testis van den stekelbaars nog niets bekend was, doch spoedig bleek mij, dat COURRIER reeds zulk een onderzoek verricht had bij den Driedoornigen Stekelbaars (*Gasterosteus aculeatus* L.) en hieromtrent reeds eenige mededeelingen gedaan had (1922*a*, 1922*b*).

Ik veranderde daarom mijn oorspronkelijk plan en besloot na te gaan, welken invloed een vrij hooge temperatuur, ongeveer de temperatuur van het slootwater in het voorjaar (12—20° C.), zou hebben op het ontstaan der secundaire geslachtskenmerken en welke veranderingen tegelijkertijd in de testes dezer dieren zouden optreden. De geslachtsklieren van contrôle-dieren, in de natuur gevangen, konden tegelijkertijd dienen om COURRIER's resultaten te verifieeren. In het onderstaande wil ik slechts de resultaten mededeelen, verkregen bij dieren, die gedurende den afgeloopen winter in een temperatuur van 12—20° C. gehouden werden.

In September en begin October 1922 ving ik een groot aantal exemplaren van *Gasterosteus pungitius* te Rotterdam. Zij werden in een aquarium, waarvan het water dikwijls ververscht werd, gehouden en overvloedig met muggenlarven (*Chironomus*) gevoed.

De testes van de in den herfst gedoode stekelbaarzen bevatten alle een meer of minder groot aantal spermatozoa. Het aantal spermatogonia is steeds gering, het aantal spermatocyten en spermatiden bij de verschillende ex. verschillend. In alle door mij onderzochte gevallen waren, meestal op plaatsen, waar drie of meer testiskanaaltjes aan elkaar grenzen of dicht bij den hilus, groepjes interstitieele cellen (cellen van LEYDIG) aanwezig. In enkele testes, waarin het interstitium iets breeder is, liggen deze cellen ook tusschen de kanaaltjes. Afwezig waren zij in geen enkel geval. Van een der door mij onderzochte ex. (N°. 6, een vrij donker gekleurd mannetje, dat echter niet de zwarte pigmentatie van mannetjes uit den paartijd bezat) is het interstitium veel breeder dan bij de andere in denzelfden tijd gevangen mannetjes; het aantal interstitieele cellen is in dit ex. ook grooter, terwijl in de zaadkanaaltjes bijna uitsluitend spermatozoa aangetroffen worden. Langwerpige bindweefselkerntjes treft men in de testes van in den herfst gevangen dieren overal in het interstitium aan; bloedvaten zijn wel aanwezig, doch zij zijn niet talrijk, nauw en bevatten weinig bloedlichaampjes.

Het hierboven beschreven beeld vertoonen de testes van dieren,

die in September en begin October gevangen werden en slechts enkele weken in een aquarium, waarvan het water toen nog in temperatuur met het slootwater overeenkwam, gehouden werden.

De testes van stekelbaarzen, die twee, drie en zelfs vier maanden, dus tot einde Januari 1923, in een temperatuur van 12—20° C. gehouden werden, nemen alle in grootte toe en vertoonen het volgende beeld. De spermatogenesis is zeer intensief. Bij alle testes gaat dit proces van buiten naar binnen, zoodanig, dat in het algemeen de spermatozoa meer in het centrum, de spermatogonia en spermatocyten meer aan de peripherie van de geslachtsklier gelegen zijn. Het interstitium van zulke dieren verandert niet; het blijft nauw, het aantal cellen van Leydig is in het algemeen gering en voornamelijk aanwezig bij den hilus en daar, waar drie of meer tubuli aan elkaar grenzen.

Tot aan het einde van Januari waren mannetjes en wijfjes zeer moeilijk van elkaar te onderscheiden. In de laatste dagen van Januari echter vertoonde een van mijn ex. aan keel en abdomen een zwakke zwarte pigmentatie, welke spoedig sterk toenam. Dit dier werd zeer agressief en begon in begin Februari met materiaal voor het nest te sleepen. Op 14 of 15 Februari werden de eieren in het voltooide nest gelegd; (den juisten datum hiervan kan ik niet opgeven, daar het wijfje niet in dit nest gezien werd). Op 16 Februari werd dit mannetje gedood.

Successievelijk trad het bruiloftskleed bij de andere mannetjes, die spoedig hunne nesten begonnen te vervaardigen, op. Ook deze nesten werden, nadat er eieren in gelegd waren, trouw door de mannetjes bewaakt, die er voortdurend versch water naar toe voerden.

Vergeleken bij de testes van dieren, die eind December of einde Januari gedood werden, zijn de testes van deze mannetjes buitengewoon sterk veranderd. De spermatogenesis is geheel geëindigd. De zaadkanaaltjes zijn geheel gevuld met groote massa's spermatozoa. Aan de peripherie der zaadkanaaltjes ziet men bovendien talrijke groepjes van spermiën, wier koppen naar den wand en wier staarten naar het midden der tubuli gericht zijn. Het aantal spermatogonia en spermatocyten is zeer gering geworden.

Het interstitium is niet meer smal, doch sterk in grootte toegenomen; het aantal cellen van Leydig is zeer vermeerderd; de bloedvaten zijn talrijker en grooter geworden.

Wij zien dus, dat door hooge temperatuur van het water in den winter de spermatogenesis bevorderd wordt, met het gevolg dat, na vier maanden, een testis ontstaat, waarvan de kanaaltjes practisch

uitsluitend spermatozoa bevatten. Dan treden ook de secundaire geslachtskenmerken duidelijk op; het interstitium vergroot zich en de cellen van LEYDIG en de bloedvaten vermeerderen zich.

Ik heb dus waargenomen een coïncidentie van het optreden van de secundaire geslachtskenmerken en het eindigen van de spermatogenesis, terwijl tegelijkertijd een vergrooting van het interstitium met vermeerdering van de cellen van LEYDIG en van de bloedvaten plaats heeft. Of er echter een correlatie tusschen deze verschijnselen bestaat, is hiermede niet bewezen.

Volgens COURRIER (1922*b*) bestaat deze wel. Deze onderzoeker nam bij den driedoornigen stekelbaars waar, dat na afloop van de spermatogenesis het interstitum zeer belangrijk in grootte is toegenomen. Hierin heeft een sterke vermeerdering van het aantal cellen van LEYDIG en van de bloedvaten plaats gehad. Volgens COURRIER bevatten de testes van stekelbaarzen, die in den winter gevangen zijn, slechts hier en daar enkele interstitieele cellen. De spermatogenesis, die in het voorjaar, tot einde Maart, zeer intensief is, heeft geen invloed op de ontwikkeling van de secundaire geslachtskenmerken. Deze treden pas in April, gelijktijdig met de sterke ontwikkeling van de interstitieele cellen, op. Daar hij bovendien in de cellen van LEYDIG en in de er vlak bij gelegen bloedvaten dezelfde granula aantoont, neemt hij aan, dat de hormonen, die van invloed zijn op de ontwikkeling der secundaire geslachtskenmerken, gevormd worden in de interstitieele cellen en uit deze in het bloed overgaan. M. i. is het ook mogelijk, dat deze door hem waargenomen granula door het bloed aan de interstitieele cellen afgegeven worden.

COURRIER heeft zijn visschen ook gedurende eenigen tijd van den winter in water van 17° C. gehouden (1922*a* en 1922*b*, p. 137). Na 2½ maand zien de zaadkanaaltjes van deze dieren er geheel uit als die van dieren uit den paartijd: zij zijn dus geheel gevuld met spermatozoa, terwijl zij slechts enkele spermatogonia, spermatocyten en cellen van SERTOLI bevatten. Veranderingen in het interstitium zijn niet opgetreden. De secundaire geslachtskenmerken hebben zich bij zulke dieren dan ook niet ontwikkeld. COURRIER meent echter (1922*a*, in een noot), op grond van experimenten, die destijds aan den gang waren, dat het interstitium mogelijk door langere inwerking van hooge temperatuur in grootte zou toenemen en dat als gevolg hiervan ook bij zulke dieren de secundaire geslachtskenmerken zich zouden ontwikkelen.

Ik meen uit mijn hierboven medegedeelde onderzoekingen te moeten besluiten, dat de correlatie van interstitieele cellen en secundaire geslachtskenmerken niet zoo gemakkelijk vast te stellen is. In

de eerste plaats, omdat alle testes van *Gasterosteus* interstitieele cellen in grooteren of kleineren getale bevatten. Deze geven klaarblijkelijk geen aanleiding tot de ontwikkeling der secundaire geslachtskenmerken. Ik moet hierbij vooral wijzen op het hierboven beschreven mannetje N°. 6, waarvan de testes een breed interstitium met vele cellen van Leydig bezitten en waarvan de zaadkanaaltjes geheel met spermatozoa gevuld zijn. Toch hadden ook in dit dier de secundaire geslachtskenmerken zich nog niet ontwikkeld. Onder de testes van contrôle-dieren, die in de natuur in den winter gevangen waren, werden door mij ook eenige aangetroffen, waarvan de tubuli bijna uitsluitend spermatozoa bevatten en waarvan het interstitium, waarin talrijke interstitieele cellen voorkomen, vrij sterk ontwikkeld is. Deze dieren vertoonden echter evenmin secundaire geslachtskenmerken.

In een zeer recente publicatie deelt Champy (C. R. Soc. de Biol., Séance du 17 Février 1923) mede, in den afgeloopen winter stekelbaarzen in bruiloftskleed te hebben gekweekt, zonder dat zich in de testes van deze dieren een goed ontwikkeld interstitieel weefsel had gevormd. Daar hij bij verschillende vischsoorten met duidelijke secundaire geslachtskenmerken zelfs in het geheel geen interstitieele cellen kon aantoonen, meent Champy, dat deze cellen geen invloed op het ontstaan dier geslachtskenmerken hebben en dat de vorming der hormonen, noodig voor de ontwikkeling dezer kenmerken, zou geschieden door de geslachtscellen.

Ik wil er tenslotte nog eens de aandacht op vestigen, dat alle door mij onderzochte testes, waarin de spermatogenesis zoo goed als geeindigd is, een sterker ontwikkeld interstitium bezitten dan testes, waarin de spermatogenesis nog in vollen gang is. Mogelijk wijst dit op een verband tusschen spermatogenesis en interstitieele cellen. Of de meer genoemde hormonen echter ook in de zaadkanaaltjes gevormd worden, kan ik op dit oogenblik niet beoordeelen. Ik hoop later, wanneer nog meer materiaal mij ten dienste staat, in een uitvoerige publicatie op dit alles nader terug te komen.

Zoölogisch Laboratorium der Veeartsenijkundige Hoogeschool. Utrecht, Maart 1923.

LITERATUUR.

Bouin, P. et Ancel, P. 1903 Recherches sur les cellules interstitielles du testicule des Mammifères. Arch. de Zoöl. expér. et génér., 4e Série, T. 1.

Champy, Ch. 1923. Observations sur les caractères sexuels chez les Poissons. C. R. Soc. de Biol., T. 88, pag. 414.

Courrier, R. 1922*a*. Sur l'indépendence de la glande séminale et des caractères sexuels secondaires chez les Poissons. Étude expérimentale. C. R. Acad. des Sciences, T. 174, pag. 70.

Courrier, R. 1922*b*. Etude préliminaire du déterminisme des caractères sexuels secondaires chez les Poissons. Arch. d'Anat., d'Hist. et d'Embryologie, T. 2.

Lipschütz, A. 1919. Die Pubertätsdrüse und ihre Wirkungen. Bern, Verlag von E. Bircher.

Steinach, E. 1920. Künstliche und natürliche Zwitterdrüsen und ihre analogen Wirkungen. Archiv f. Entw. Mech , Bd. 46.

Stieve, H. 1921. Entwickelung, Bau und Bedeutung der Keimdrüsenzwischenzellen. Ergebnisse der Anat. und Entwickelungsgeschichte, Bd. 23.

Titschack, E. 1922. Die sekundären Geschlechtsmerkmale von *Gasterosteus aculeatus* L. Zool. Jahrb. Abt. f. allg. Zoologie und Physiologie, Bd. 39.

Plantkunde. — F. W. T. Hunger: „*Over den aard en het ontstaan van de cocospaarl.*"

(Aangeboden door de Heeren G. van Iterson Jr. en F. A. F. C. Went).

Binnen de endospermholte van het zaad van Cocos nucifera kan een locale steenvorming optreden, waaraan men den naam van „cocospaarl" heeft gegeven en die als een hoogst merkwaardig en zeldzaam voorkomend verschijnsel moet worden beschouwd [1]). Zoo'n cocospaarl is meestal peer- of eivormig, ook wel bijna kogelrond en heeft een gladde oppervlakte, die in den regel melkwit gekleurd is. In chemische samenstelling komt zij eenigszins overeen met een oesterpaarl, doch verschilt daarvan in uiterlijk door het gemis van een paarlmoeren glans.

Rumphius heeft voor het eerst deze steenvorming als „calappites" beschreven [2]), en nadien werd er ruim een eeuw lang nooit meer over deze merkwaardigheid iets gehoord.

Totdat in de vergadering der Boston Society of Natural History van 1 Februari 1860 [3]) Mr. Fred. T. Bush een dergelijke cocospaarl ter beschikking stelde om chemisch en mikroskopisch onderzocht te worden. Dat onderzoek werd toen aan Dr. Bacon opgedragen, die daarover in de vergadering van 16 Mei 1860 van hetzelfde genootschap rapport heeft uitgebracht [4]).

In 1866 berichtte Dr. Riedel, oud-resident van Menado, dat hij bij opening van een cocosnoot daarbinnen een paarl had aangetroffen [5]). Dit was het eerste bericht van een ooggetuige, die het verschijnsel zelf had aanschouwd, buiten de vele desbetreffende verhalen van inboorlingen.

Tegenover de mededeeling van Bush, dat de cocospaarls „are said „to be found free within the cavity of the cocoa-nut", berichtte Skeat [6]) in 1900, dat zij „usually if not always (are) found in the „open eye or orifice at the base of the cocoa-nut".

[1]) F. W. T. Hunger, Cocos nucifera, 2e Ed. blz. 243—250, Pl. LXVII (1920).

[2]) E. Rumphius, Herbarium Amboinense, Dl. I, blz. 21—23 (1741).
Idem, D'Amboinsche Rariteitkamer, blz. 291—292 (1741).

[3]) Proceedings of the Boston Soc. of Nat. Hist., Vol. VII, blz. 229 (1861).

[4]) Idem, Vol. VII, blz. 290—293 (1861).

[5]) Nature, Vol. XXXVI, blz. 157 (1887).

[6]) W. W. Skeat, Malay Magic. being an introduction to the folklore and popular religion on the Malay peninsula, blz. 196 (1900).

Meerdere gegevens over dit merkwaardige verschijnsel bestaan er eigenlijk niet en tot op heden verkeert men over den aard en het ontstaan van zulk een cocospaarl nog volkomen in het duister.

Tijdens mijn laatste studiereis door Nederlandsch-Indië had ik mij o.a. voorgenomen om te trachten meer over de cocospaarl te weten te komen en het probleem van haar ontstaan zoo mogelijk tot oplossing te brengen. Hierbij dient vooropgesteld, dat het ten eenenmale was uitgesloten om in de tropen naar cocospaarls te gaan zoeken, omdat zij daarvoor veel te zeldzaam voorkomen. Dat blijkt hieruit, dat bij navraag op een klapperonderneming, waar sinds langen tijd jaarlijks ± 3 millioen cocosvruchten werden geopend, nog nooit zulk een paarl was aangetroffen, ofschoon men uit verhalen het bestaan ervan wel vermoedde.

Daarom richtte ik mijn onderzoek ernaar in, om voorloopig zoo betrouwbaar mogelijke gegevens te verkrijgen.

Op een mijner zeereizen ontmoette ik een Britsch-Indiër, die in het bezit was van een prachtige cocospaarl. Volgens zijn verklaring had hij zelf dit exemplaar, nog vastzittend, gezien in een geopende klappervrucht, die hem te Madras was gebracht geworden. Hij zwoer mij, dat zijn paarl vast had gezeten in het cocosvleesch en juist op de plaats, waar bij een kieming de zaadlob zich tot een haustorium vormt.

Naderhand heb ik nog een Arabier ontmoet op wiens klapperland in Zuid-Borneo een cocosnoot was geoogst, die bij opening een nog vastzittende paarl bevatte. Hij zelf had haar met eigen hand uit het cocosvleesch losgemaakt. Ook hier had die paarl op precies dezelfde plaats vastgezeten als in het eerst vermelde geval.

Deze eensluidende verklaringen van ooggetuigen, die beiden een cocospaarl in een geopende klappervrucht nog vastzittend hadden aanschouwd, gaven mij een voorloopige aanwijzing, en leidden tot het vermoeden, dat de door hen aangegeven plek waarschijnlijk als de normale aanhechtingsplaats van zulk een cocospaarl moest worden beschouwd.

Het normale kiemingsproces van het cocoszaad wordt ingeleid met een vergrooting van het embryo, waarbij de zaadlob tot een zuigorgaan (haustorium) naar binnen begint uit te groeien en daardoor buiten de kiemwitlaag en in de endospermholte komt uit te steken. Hand in hand daarmede groeit het kiemstengeltje ook uit en door de vliezige afsluiting van het kiemgat te verbreken, baant het zich een uitweg door den harden zaadwand naar buiten.

Uitgaande van de voorloopige vaststelling van de plaats van aanhechting der cocospaarl, kon nu de volgende hypothese worden gemaakt. Gesteld, dat het reeds aangevangen kiemingsproces door de een of andere oorzaak wordt stopgezet, als gevolg waarvan de verdere ontwikkeling van het haustorium ook blijft steken, dan zou het denkbaar zijn, dat het onveranderde haustorium onder de inwerking van het cocoswater werd geïncrusteerd en dat zich daaruit geleidelijk de geheel versteende cocospaarl vormde.

Thans was het noodig een oorzaak te vinden, die zulk een eventueele stoornis in het kiemingsproces en een daarmede gepaard gaande versteening van het haustorium teweeg zou kunnen brengen.

Dienaangaande zou ik nu het volgende willen mededeelen.

Aan den kant waar de cocosvrucht heeft vastgezeten aan zijn steel, onderscheidt men in de steenharde inwendige vruchtschaal drie ingedeukte plaatsen, de z.g. „kiemgaten". Gewoonlijk is daarvan één kiemgat, de z.g. „porus pervius", van een vliezigen wand voorzien, terwijl de beide andere kiemgaten, de z.g. „pori caeci", door stevige wanden zijn afgesloten. Bij de kieming baant het kiemstengeltje zich door den porus pervius een weg naar buiten.

Nu doet zich bij wijze van uitzondering het geval voor, dat in plaats van drie er maar twee kiemgaten voorkomen, n.l. een porus pervius en één porus caecus; doch in zeer zeldzame gevallen kan de reductie nog verder gaan, zoodat er alleen maar een porus pervius ontstaat en de beide pori caeci in het geheel niet aanwezig zijn. Een cocosnoot, die in laatstgenoemd geval verkeert, kan natuurlijk nog volkomen normaal kiemen.

Iets anders wordt het echter, als er ook geen porus pervius meer ontstaat, zoodat dan aan de basis van den binnensten vruchtwand in het geheel geen kiemgaten kunnen worden onderscheiden, hetgeen in uiterst zeldzame gevallen zich kan voordoen.

Zulk een cocosnoot draagt den naam van kĕlapa boeta (Mal.) of klåpå boentĕt (Jav.) wat beide beteekent „blinde klapper".

Zooals reeds gezegd, is het optreden van een cocosnoot zonder kiemgaten een geweldige zeldzaamheid, vandaar dat zij in het volksgeloof der Mahomedanen een aureool van heiligheid heeft verkregen. De kĕlapa boeta is een talisman (tjimat) „par excellence", en om die reden erg moeilijk machtig te worden.

De kennismaking met de kĕlapa boeta gaf mij als van zelf een voorbeeld waar op natuurlijke wijze een normale kieming onmogelijk is gemaakt. Vandaar dat ik alle pogingen in het werk heb gesteld, om mij daarvan eenige exemplaren te verschaffen.

Ten slotte is het mij gelukt uit alle deelen van onzen Archipel

een achttal nog ongeopende blinde klappers bijeen te brengen. Twee stuks waren afkomstig van Zuid-Borneo, één van Halmaheira, één van Ceram, één van Noord Nieuw-Guinea, één van Zuid Nieuw-Guinea, één van de Aroë- en één van de Tanimber-eilanden, die alle door mij persoonlijk ter plaatse werden verzameld.

De meeste van deze exemplaren waren zeer oude vruchten, waarvan sommige volgens mededeeling van hunne bezitters reeds tientallen van jaren als familie-reliquieën werden bewaard.

De eerste vier ,,boeta's" die door mij werden geopend leverden niets op, doch in de vijfde trof ik inderdaad een prachtige nog vastzittende cocospaarl aan; de beide volgende gaven wederom een negatief resultaat en het achtste exemplaar heb ik tot nu toe ongeopend gelaten.

De cocosnoot waarin de nog vastzittende paarl werd aangetroffen, en waarvan bijgaande figuur (Fig. 1) een reproductie geeft, kocht ik van een ouden inlander te Ritabel (Larat), een der Tanimber-eilanden in de Molukken, en volgens mededeeling van haar bezitter was zij nog betrekkelijk kort geleden geoogst. Dat bleek ook inderdaad het geval, want de kiemwitlaag was hier nog volkomen normaal, terwijl bij die andere vruchten het cocosvleesch òf zeer sterk was ingedroogd òf zelfs gedeeltelijk tot een bruine poedermassa was vergaan.

De paarl zat zonder de minste steelvorming vast, doch was in de kiemwitlaag ingedrukt (Fig. 2) en kon vrij gemakkelijk uit het endosperm worden losgemaakt. De plaatsing was precies aan de vruchtbasis, vlak onder de plek waar de kiemgaten hadden moeten zijn, en kwam dus volkomen overeen met de hierboven vermelde verklaringen.

Uit deze ontdekking valt m.i. de conclusie te trekken, dat de cocospaarl inderdaad een versteend haustorium voorstelt, dat is blijven bestaan, nadat het eerste begin der kieming tot stilstand werd gebracht, doordat het kiemstengeltje bij zijn uitgroeien geen kans kreeg de inwendige vruchtwand te passeeren wegens het ontbreken van een porus pervius. Doordat de binnenste vruchtschaal van den kĕpala boeta hermetisch gesloten blijft, heeft het nauwelijks in wording gekomen haustorium zich onder inwerking van het aanwezige cocoswater met kalkzouten geïncrusteerd, ofschoon het nog steeds onverklaarbaar is, dat de cocospaarl bijna geheel uit calcium carbonaat bestaat, terwijl nòch het cocosvleesch, nòch het cocoswater koolzure kalk bevat.

Dat de kèlapa boeta per se een cocospaarl moet bevatten wordt voldoende gelogenstraft door mijn ondervinding, dat bij opening

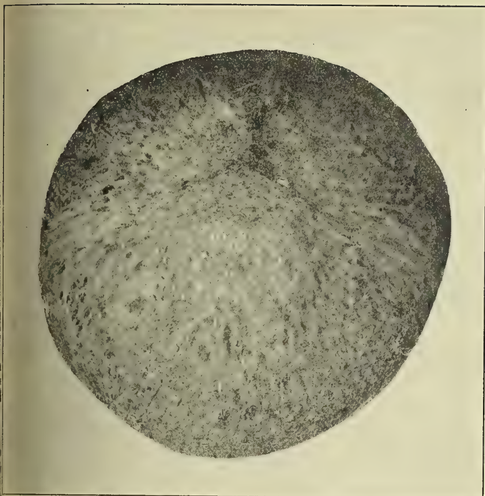


Fig. 1. *Kĕlapa boeta* Basis van een blinde cocosnoot, zonder kiemgaten. $^3/_5$ nat. gr.

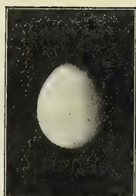


Fig. 3. *Cocospaarl* uit fig. 2. nat. gr.

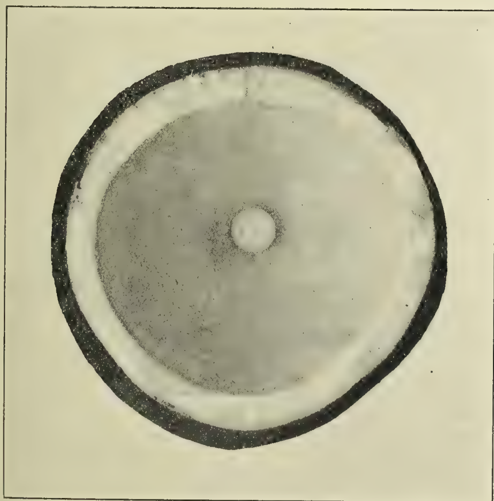


Fig. 2. *Kĕlapa boeta* Endospermholte, waarin zich een cocospaarl heeft gevormd. $^3/_5$ nat. gr.

van zeven dergelijke exemplaren er slechts in één blinde klappernoot een steenvorming werd aangetroffen. Daarentegen lijkt het mij wèl waarschijnlijk, dat de kělapa boeta in meerdere mate (of uitsluitend?) in aanmerking zal komen voor de vorming van een cocospaarl.

De aard en het ontstaan van de cocospaarl als versteende plantenkiem zou wellicht op botanisch gebied als een analogon zijn op te vatten van een verschijnsel, dat in de menschelijke en dierlijke pathologie bekend is in een versteening of mummificatie van het embryo en resp. als Lithopaedion of Lithoterion wordt aangeduid.

Amsterdam, Maart 1923.

Anatomie. — O. H. DIJKSTRA: „*De ontwikkeling van het schouderblad bij den Mensch*".

(Aangeboden door de Heeren L. BOLK en J. BOEKE.)

In tegenstelling met de clavicula is de ontwikkeling van de scapula nog betrekkelijk weinig bestudeerd. Men vindt in de handboeken der anatomie (CUNNINGHAM, GEGENBAUER, RAUBER-KOPSCH, MERKEL, POIRIER—CHARPY, TESTUT) slechts algemeenheden, zooals de mededeeling, dat het schouderblad begint te verbeenen in de nabijheid van het collum scapulae aan het einde van de tweede of in het begin van de derde maand. POIRIER en CHARPY spreken van een beginnende verbeening tusschen den 40[en] en 50[en] dag. BARDELEBEN vermeldt een periostale ossificatie (zooals bij de dekbeenderen van den schedel) naast en onder de spina scapulae aan het einde van de 10[e] week.

Slechts BRYCE in QUAINS' Elements of Anatomy is uitvoeriger. Volgens zijn opgaven is het schouderblad in de 6[e] week geheel kraakbeenig aangelegd, proc. acromialis en proc. coracoïdeus zijn aanwezig, maar de spina scapulae ontbreekt. (Echter reproduceert BRYCE de afbeelding van LEWIS [1]), waarop wel een spina aangegeven is). In de 8[e] week begint de ossificatie met een beenkern nabij het collum scapulae, die zich uitbreidt tot een driehoekige plaat, aan welker bovenrand de spina in de 3[e] maand als een lage richel verschijnt. Bij den neonatus bestaan coracoïd en acromion, margo vertebralis en de rand van de spina nog uit kraakbeen. Deze beschrijving van BRYCE komt vrijwel overeen met die, welke men vindt in het handboek der embryologie van BROMAN en dat van KEIBEL en MALL, waarin dit onderwerp door BARDEEN is behandeld. BROMAN vermeldt evenals BRYCE, dat aan de kraakbeenige scapula geen spina aanwezig is. Echter reproduceert ook hij dezelfde figuur van LEWIS, waarop wel een spina is aangegeven. KOLLMANN, SCHENCK, MINOT, PARKER laten zich over de eerste ontwikkeling van het schouderblad niet uit en bespreken slechts stadia, die reeds grootendeels verbeend zijn. BRAUS in HERTWIG's Entwickelungsgeschichte en ook HERTWIG zelf vermelden een afzonderlijke beenkern in de spina scapulae; volgens den laatste zou bij den neonatus de spina soms

[1]) Am. Journ. Anat. Vol. 1. 1901—02.

nog uit kraakbeen bestaan, volgens KÖLLIKER (aangehaald door BADE, Arch. f. mikr. Anat. LV) zou dit laatste zelfs steeds het geval zijn.

De uitvoerigste mededeelingen over de ontwikkeling van het schouderblad zijn die van BRYCE en BROMAN. Blijkens hun figuren ontleenen zij hun opgaven aan LEWIS, die in het American Journal of Anatomy (Vol. I 1901—02) een uitvoerige beschrijving van de eerste ontwikkeling van de voorste extremiteit geeft. Zijn opgaven komen grootendeels overeen met de reeds vermelde van BRYCE. Omtrent de spina scapulae echter heerscht verschil van meening. Volgens LEWIS zou de spina waarschijnlijk ontstaan uit den bovenrand van het schouderblad. Deze margo superior verdikt zich en splitst zich vervolgens in een mediale en een laterale lip. De mediale lip wordt de definitieve margo superior, de laterale wordt spina scapulae.

HAGEN [1]) beschrijft een schouderblad van een embryo van 17 mM. lengte. De spina scapulae is afwezig, de proc. coracoïdeus is groot, de proc. acromialis klein. Het laatste is in tegenspraak met de mededeeling van LEWIS, die juist een relatief groote processus acromialis aangeeft.

Dit literatuuroverzicht zou onvolledig zijn, als niet de belangrijke studie van RUTHERFORD [1]), die de ontwikkeling van het schouderblad tot in bijzonderheden onderzocht heeft, vermeld werd. Hij vervaardigde, evenals LEWIS, wasmodellen van het skelet van den schoudergordel en vond o. m., dat de spina scapulae ontstaat door zeer vroege verbeening van kraakbeenachtige cellen, (derivates of cartilage cells), tusschen M. supra- en infraspinatus gelegen.

Uit dit overzicht is wel duidelijk, dat de wijze van ontwikkeling van het schouderblad bij den mensch nog onvoldoende bekend is. De vorm in de eerste ontwikkelingsstadia wordt verschillend beschreven, over de ontstaanswijze van de spina treft men tegenstrijdige meeningen aan en uit het vervolg dezer mededeeling zal blijken, dat dit niet de eenige verschilpunten zijn.

Teneinde de ontwikkeling van het schouderblad bij den mensch te kunnen vervolgen, vervaardigde ik van verschillende ontwikkelingsstadia wasmodellen. Van het jongste embryo, ter lengte van 16 millimeter is de wasreconstructie in fig. 1 afgebeeld. Het schouderblad is van de laterale zijde en van boven gezien, geschetst. Aan dezen gereconstrueerden vorm blijkt het volgende:

1e. Het schouderblad ligt in een sagittaal vlak zoo, dat de onderste

[1]) Arch. f. Anat. u. Entwickel. Gesch. 1900.

helft met de drie bovenste ribben in aanraking is. Processus acromialis en clavicula staan nog niet met elkaar in contact.

2e. De processus coracoïdeus is groot; de processus acromialis betrekkelijk klein. De gewrichtskom ligt voor een groot deel op den processus coracoïdeus.

3e. Er is geen spina scapulae aanwezig. De margo superior is niet verdikt, noch in twee labia gesplitst.

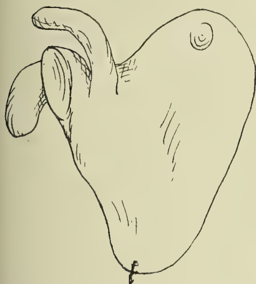


Fig. 1.

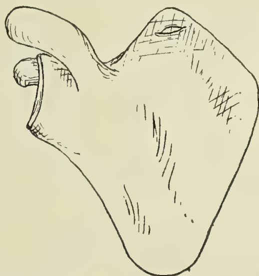


Fig. 2.

4e. De margo superior is recht; er kan dus niet van een incisura scapulae gesproken worden.

5e. In het algemeen komt de vorm van de scapula overigens overeen met dien van een volwassen schouderblad. Bij het reconstrueeren van scapulae van twee apen-embryonen (nl. Macacus cynomolgus lang 17 millimeter en Semnopithecus maurus) bleek, dat ook bij deze primaten het embryonale schouderblad bij zijn eersten aanleg reeds in vorm overeenkomt met dien van het volwassen individu. Ook hier was geen spina scapulae aanwezig.

6e. Dicht onder den angulus superior komt een scherp omgrensde fovea voor, ter plaatse waar bij oudere ontwikkelingsstadia een foramen te vinden is. Hierop zal bij het volgend stadium worden teruggekomen.

Dit stadium is geschetst in fig. 2. Het betreft het schouderblad

van een embryo lang 25 millimeter. Ook in dit stadium is nog geen aanduiding van een spina scapulae; van een verdikking der marga superior is evenmin iets te bemerken. Toch zijn er in vergelijking met het eerste stadium veranderingen opgetreden.

1e. Het schouderblad ligt niet meer in een sagittaal vlak, maar maakt er een hoek mee, zooals dat bij den volwassene het geval is. De gewrichtsholte bevindt zich in het niveau van de eerste rib. Acromion en clavicula zijn met elkaar in verbinding gekomen.

2e. De processus coracoïdeus is relatief kleiner geworden, de processus acromialis daarentegen grooter. Het phylogenetisch oudste deel, de processus coracoïdeus is dus in de jongste stadia het sterkst ontwikkeld, terwijl de processus acromialis, phylogenetisch jonger, in oudere stadia meer op den voorgrond treedt.

De gewrichtskom ligt thans voor een grooter deel op het planum scapulae.

3e. De margo vertebralis bestaat uit een korter bovendeel, en een langer benedendeel. Beide deelen maken een stompen hoek met elkander.

4e. Het gedeelte der scapula, dat later de fossa supraspinata zal vormen, maakt met het latere subspinale deel een hoek. Deze afbuiging van het bovenste deel, die ook bij het volwassen schouderblad voorkomt (immers fossa supra- en infraspinata liggen niet in één vlak), bestond echter bij het embryo van 16 millimeter lengte nog niet.

5e. In het kraniale deel van het schouderblad komt onder den angulus superior een foramen voor, dat zich aan de costale vlakte van de scapula als een groeve langs de margo superior in de richting van de gewrichtskom voortzet. In fig. 3 is dit foramen, dat met bindweefsel gevuld is, op doorsnede getroffen.

Het bestaan van dit foramen is zeker verrassend; toch was het niet geheel onbekend, daar Rutherford het reeds beschreef (l.c.). Hij geeft echter aan, dat het zich voortzet in een groeve, die tot de margo vertebralis reikt. Bij alle seriën, waarin ik behalve het foramen een groeve aantrof, verliep deze echter langs de margo superior in de richting van de gewrichtskom.

Rutherford heeft de volgende verklaring van dit foramen gegeven. Hij beschouwt het deel van de scapula kraniaal van het foramen (eventueel groeve) als een afzonderlijk kraakbeenstukje, dat hij *praescapula* noemt en dat volgens zijn opgaven door een streng mesenchymweefsel verbonden zou zijn met de sternale helft van de clavicula. Op deze wijze zou een binnenschoudergordel gevormd worden, terwijl de verbinding acromion-clavicula den buitengordel

zou opbouwen. Hij voert hiertoe verschillende bewijzen aan, die echter zeer zwak zijn. Maar m. i. heeft de hypothese geen waarde, omdat een verbinding van de zoogenaamde praescapula met de sternale helft van de clavicula niet voorkomt. In mijn praeparaten

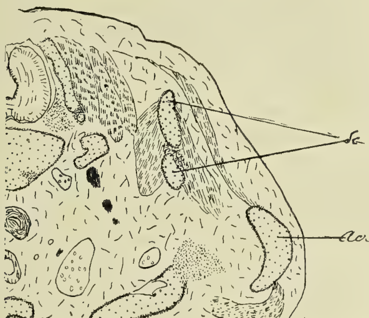


Fig. 3. Homo 25 mM. transversaal· *Sc* = Scapula; *Acr* = Processus acromialis.

althans heb ik nimmer een dergelijke celstreng als RUTHERFORD aangeeft, gevonden.

Dit foramen komt niet constant voor, de vorming ervan is individueel zeer wisselend, zooals uit de volgende opgave blijkt. Ik kon de aanwezigheid constateeren, hetzij als werkelijk foramen, hetzij als diepe groeve, bij menschelijke embryonen lang 16, 17,5, 18, 19,6, 21, 22, 25 (zie fig. 3), 26, 27, 56 en 90 millimeter; daarentegen miste ik het bij embryonen lang 12, 18, 18, 24, 26, 40, 120 millimeter. Hieruit blijkt dus, dat ook het ontbreken niet tot de zeldzaamheden behoort. Bij eenige embryonen maakte het deel van het planum scapulae, dat zich kraniaal van het foramen bevindt, dus RUTHERFORD's praescapula, een hoek met het overige van het planum, een feit, dat er op zou kunnen wijzen, dat we hier inderdaad met een afzonderlijk kraakbeenstukje te doen hebben, zooals RUTHERFORD meende. Het foramen, dat bij jonge embryonen vrij dicht bij de margo superior ligt, zooals in figuur 3 zichtbaar is, verplaatst zich bij oudere naar de margo vertebralis. RUTHERFORD's praescapula wordt derhalve relatief grooter.

Nu is het merkwaardig, dat dit foramen bij geen andere zoogdieren noch bij reptielen of amphibieën, tenminste voor zoover ik kon nagaan, voorkomt. De volgende embryonen heb ik op het voorkomen van dit foramen onderzocht.

Semnopithecus maurus kr. st. 20 m.M.

Macacus cynomolgus kr. st. 17 m.M.

Cercopithecus 2 stadiën.

Sus scrofa N. T. (Keibel) 83—85, N. T. 88, N. T. 88, N. T. 91, kr. st. 24 m. M., kr. st. 26 mM. In deze beide laatste embryonen bevonden zich in de fossa *infraspinata* twee foramina. De mogelijkheid is niet uitgesloten, dat deze foramina analoga zijn van het foramen in het schouderblad van den mensch.

Bos taurus kr. st. 21 m.M.

Ovis aries kr. st. 19.5, 20.5, 21.5, 22.5, 23, 23.5, 26, 27, 29, 35, 45 m.M.

Canis familiaris kr. st. 12, 12, 22, 23.5 m.M.

Sciurus vulgaris kr. st. 12, 30 m.M.

Mus decumanus kr. st. 11.5, 12, 13, 13, 13.2, 14.5, 16, 18, 20, 22 m.M.

Lepus cuniculus kr. st. 17, 20 m.M.

Spermophillus citillus kr. st. 15 m.M.

Rousettus amplexicaudatus kr. st. 7.5, 10.5, 11, 11, 11.5, 12, 12, 14.5, 15,5, 16, 18 m.M.

Talpa europea kr. st. 8.5, 9, 9, 10, 12, 13, 16.5, 20 m.M.

Perameles obesula kr. st. 50 m.M.

Perameles spec. kr. st. 38 m.M.

Dasyurus viverrinus kr. st. 19.6, 33, 36. 40, 53, 63 m.M.

Sminthopsis crassicaudatus kr. st. 13, 25 m.M.

Phascalogale pennicillata kr. st. 37 m.M.

Trichosurus vulpecula kr. st. 32 m.M.

Didelphys cancrivora, 4 embryonen van 25 m.M. lengte.

Lacerta agilis N. T. (Keibel) 117, 118, 120, 123, 123, 124, 125, 126.

Calotes iubatus, koplengte $5^1/_2$ m.M., 7 m.M.

Lagysoma 27.5 m.M.

Hemidactylus fren. koplengte 4.5 m.M.

Salamandra mac. 11, 13, 15, 16, 16, 24 m.M.

Pipa Americana, 12 m.M.

Rana . 2 embryonen.

Voorzoover mij bekend, komen foramina in volwassen schouderbladen alleen voor bij Homo en bij verschillende Edentata, waar zij steeds gevormd worden door overbrugging van de Incisura scapulae, en bij Delphinus delphis. Bij dezen laatsten vorm is de aard van het foramen onbekend. RUTHERFORD (l.c.) doet er een mededeeling over.

Een mogelijk verband, dat zou kunnen bestaan tusschen de praescapula van RUTHERFORD en de aanhechting van de clavicula (niet alleen van het sternale deel van de clavicula, zooals RUTHERFORD meende) aan de margo superior scapulae, zooals deze bij reptielen, echidna en ornithorynchus voorkomt, kon niet aangetoond worden, aangezien een verbinding van de praescapula van RUTHERFORD ook met het acrominale deel van de clavicula niet gevonden wordt.

Het foramen, dat in het kraniale deel van het schouderblad bij menschelijke embryonen in de meerderheid der gevallen bestaat, komt dus bij andere vertebraten niet voor (uitgezonderd bij Delphinus delphis, een vorm, die echter zoozeer gespecialiseerd is, dat dit foramen niet zonder nadere onderzoekingen als een homologon van dat van den mensch te beschouwen is). Ook een verbinding van de praescapula van RUTHERFORD met eenig ander skeletstuk heb ik geen enkele maal aangetroffen. De beteekenis van dit foramen is dus nog onbekend.

Wat de verbeening der scapula betreft, is mij uit mijn onderzoek gebleken, dat deze niet zoo eenvoudig is, als in de literatuur wordt voorgesteld.

De eerste verbeening nam ik waar bij een embryo met een lengte van 40 m.M. Ik vervaardigde van de scapula van dit embryo een wasmodel, dat afgebeeld is in figuur 4. Evenals het vorige model, is ook dit van boven en van de dorso-laterale zijde gezien, geschetst. Uit dezen gereconstrueerden vorm blijkt het volgende:

De gewrichtskom, die in het niveau van de eerste rib zich bevindt, is thans ongeveer geheel op het planum scapulae gelegen (evenals bij de volwassen scapula). De spina is nog geheel afwezig, de margo superior niet verdikt. Aan de basis van den processus acromialis hecht zich een strook verdicht mesenchymweefsel, dat zich voortzet tusschen het spierweefsel en dat den aanleg van Musc. supra- en infraspinatus van elkander scheidt. Deze mesenchymstrook is, op doorsnee getroffen, afgebeeld in fig. 5. Achter den wortel van den processus acromialis begint een perichondrale beenvorming die zich voortzet in dit verdichte mesenchym. Deze verbeening vormt den eersten aanleg van de spina. Deze wordt dus gevormd door een perichondrale ossificatie, want hoewel hier nog geen beenvormend perichondrium zichtbaar is, het feit, dat het been door het omringende mesenchym gevormd wordt in aansluiting aan kraakbeen neemt elken twijfel omtrent het karakter der verbeening weg. In figuur 5 is deze eerste aanleg van de spina op doorsnee getroffen.

Van het optreden van twee ossificatiepunten in de kraakbeenige

scapula, door Rambaud en Renault beschreven (aangehaald door Poirier [1])), die tusschen 40en en 50en dag zouden ontstaan en in de 3e maand zouden samensmelten, is mij niets gebleken.

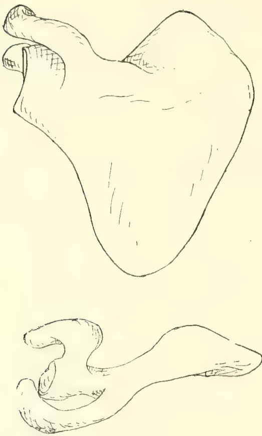


Fig. 4.

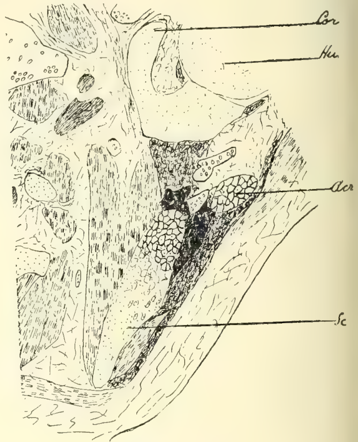


Fig. 5. Homo 40 mM. Transversaal.
Cor = Processus coracoideus; *Hu* = Humerus;
Acr = Processus acromialis; *Sc* = Scapula.

Bij de scapula van een ouder embryo (56 m.M lengte) blijkt deze perichondrale verbeening zich sterk uitgebreid te hebben. De margo anterior scapulae wordt bijna bereikt. Het kraakbeen van het planum scapulae is echter over een groote uitgestrektheid reeds duidelijk verkalkt. Dat de spina scapulae sterk in grootte toegenomen is, blijkt uit fig. 6. In deze figuur is behalve de spina ook het boven beschreven foramen, gedeeltelijk op de doorsnede getroffen, zichtbaar. De spina wordt gevormd door een beenwoekering tusschen Musc. supra- en infraspinatus, tusschen acromion en planum scapulae. Het kan echter niet ontkend worden, dat in het mesenchym, waarin zich dit been ontwikkelt, hier en daar zeer jonge kraakbeencellen zichtbaar zijn. Deze cellen hebben echter nog geen tusschenstof, zij zijn weinig gedifferentieerd en het is moeilijk hen van de mesenchymcellen te onderscheiden. In het mesenchym worden dus naast been- ook kraakbeencellen gevormd.

[1]) Poirier et Charpy, Traité d'Anatomie humaine.

Bij een embryo lang 90 m.M. is naast de perichondrale ook enchondrale verbeening aanwezig. De grens tusschen perichondraal en enchondraal been is niet meer aan te geven. Opmerkelijk is het eigenaardig karakter van de perichondrale ossificatie langs de margo anterior. In plaats van de kompacte beenvorming, die men anders bij perichondrale ossificatie bijv. van de pijpbeenderen ziet, is hier een netwerk van beenbalken, rondom door mesenchym omgeven, aanwezig. Fig. 7 stelt een dwarse doorsnede door de margo anterior voor.

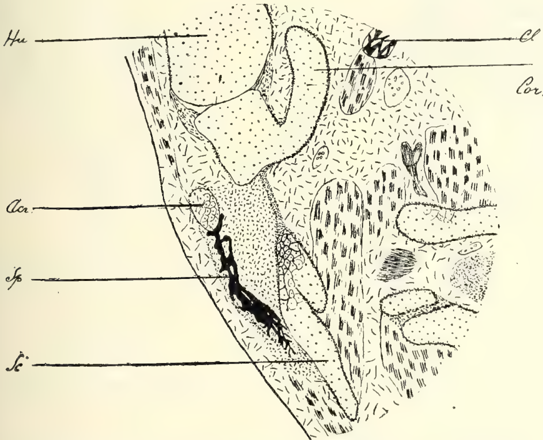


Fig. 6. Homo 56 mM. Transversaal. *Hu* = Humerus; *Cl* = Clavicula; *Cor* = Processus coracoideus; *Acr* = Processus acromialis; *Sp* = Spina Scapula; *Sc* = Scapula.

De studie van dit object (embryo van 90 millimeter lengte) toont aan, dat in den groei van de spina scapulae merkwaardige bijzonderheden zich voordoen. In het mesenchym tusschen Musc. supra- en infraspinatus is thans een duidelijke kraakbeenkern gevormd. Deze is geheel onafhankelijk van het overige kraakbeen van de scapula. Zij is jonger dan het overige deel van het schouderblad, wat niet wegneemt, dat zij gedeeltelijk reeds verkalkt is en been van de spina vormt.

De kraakbeenkern is, op drie verschillende transversale doorsneden getroffen, weergegeven in de figuren 8, 9 en 10. Figuur 8 stelt een doorsnede door de scapula boven de aanhechtingsplaats van den processus acromialis voor. In het mesenchym, dat zich vertebraal-

waarts van den processus acromialis uitbreidt, ligt de kern, reeds gedeeltelijk verkalkt. Een doorsnede op lager niveau is in figuur 9 weergegeven. De processus acromialis hecht zich op deze hoogte aan



Fig. 7. Homo 90 mM. Margo anterior scapulae transversaal.



Fig. 8. Homo 90 mM. scapula transversaal *Acr.* = Processus acromialis. *G* = Gewrichtskom. *Pl. Sc.* = Planum Scapulae.

het planum scapulae vast. Ook hier is de kraakbeenkern, onafhankelijk van het overige cartilago van het schouderblad, zichtbaar. Figuur 10 geeft een doorsnede door de scapula weer in het niveau van de laagste aanhechtingsplaats van de spina. Het jonge kraakbeen, dat de spina vormt, is hier over een groote uitgestrektheid getroffen. Men ziet, dat de kraakbeenkern gedeeltelijk verkalkt is, en dat, in aansluiting aan dit verkalkte deel, been is gevormd.

Terwijl de eerste aanleg van de spina dus door perichondraal been in het mesenchym tusschen Musc. supra- en infraspinatus wordt gevormd, wordt de spina verder opgebouwd door chondraal been, dat uit het jonge kraakbeen stamt, hetwelk ditzelfde mesenchym tusschen de genoemde spieren heeft doen ontstaan.

Het schouderblad van het embryo van 90 m.M. lengte vertoonde nog een bijzonderheid. Aan de margo superior wordt zoowel enchondraal als perichondraal been gevormd. In het mesenchym, dat hier het perichondrale been vormt en waarin zich dit been een eindweegs voortzet, liggen twee kraakbeenkernen, die uit hetzelfde jonge weefsel als het kraakbeen van de spina bestaan. Figuur 11 geeft deze kernen, die niet in samenhang zijn met het overige

kraakbeen van het schouderblad, op doorsnede getroffen, weer. Deze kraakbeeneilandjes blijken hier en daar reeds verkalkt en verbeend te zijn. Tusschen het daarbij gevormde been en het perichondrale been van de scapula is geen grens meer te trekken. Dit proces van beenvorming, waarbij (behalve de enchondrale verbeening van de scapula) naast elkaar perichondrale verbeening en chondrale



Fig. 9. Homo 90 m.M. Scapula transversaal. *Acr.* = Processus acromialis. *Pl. Sc.* = Planum Scapulae.



Fig. 10. 90 m.M. Scapula transversaal. *K.K.* = kraakbeenkern. *Pl. Sc.* = Planum Scapulae.

ossificatie van een buiten het perichondrale been gelegen kraakbeenkern aanwezig zijn, komt dus geheel met de vorming van de spina scapulae overeen. Dit is merkwaardig, aangezien de spina scapulae en de definitieve margo superior de twee deelen van het schouderblad zijn, die bij den eersten aanleg aan de kraakbeenige scapula ontbreken. Het feit immers, dat de margo superior bij jonge embryonen nog recht is en geen incisura vertoont, wijst er op, dat vertebraal van de plaats, waar later de incisura zal komen te liggen, nog iets aan het planum scapulae moet worden toegevoegd. Dit geschiedt klaarblijkelijk door het zich ver in het mesenchym uitstrekkende perichondrale been plus het been, door de genoemde kraakbeenkernen gevormd. Aan het schouderblad van een embryo van 120 m.M. lengte, waar de verbeening reeds aanmerkelijk verder was voortgeschreden, was inderdaad de incisura scapulae aanwezig.

Natuurlijk rijst de vraag, hoe, zoowel het kraakbeen van de spina als de kraakbeenkernen aan de margo superior, zich verder ontwikkelen. Op beide plaatsen gaat het kraakbeen spoedig geheel in verbeening over. Bij een embryo van 120 m.M. lengte waren alleen van het kraakbeen der spina nog slechts spaarzame resten terug te vinden. Het overige was verbeend.

Van nu af schrijdt de ontwikkeling van het schouderblad voort op de wijze als in de handboeken der embryologie beschreven staat.

Gaan we thans nog eens de bestaande meeningen omtrent de ontwikkeling van de spina scapulae na. Het blijkt dan, dat de meeste, hoe verschillend zij ook mogen wezen, toch niet onjuist zijn, als men zich slechts voor oogen houdt, dat zij voor verschillende stadia gelden.



Fig. 11.
Homo 90 m.M.
Margo superior scapulae transversaal.

Rutherford's meening omtrent de zeer vroege verbeening van kraakbeenachtige cellen, is zonder twijfel juist, maar geldt alleen voor jonge stadia. De opvatting van Hertwig en Braus omtrent een afzonderlijke beenkern is ook niet geheel onjuist; immers er is een stadium, waarin inderdaad een afzonderlijke kraakbeenkern been vormt. Bardeleben's mededeeling omtrent beenvorming onder en naast de spina is eveneens niet geheel onjuist te noemen, echter deze beschrijving geldt slechts voor één kort ontwikkelingsstadium. Beenvorming als bij de dekbeenderen van den schedel komt echter aan het schouderblad niet voor. Het is mogelijk, dat soms bij den neonatus nog een weinig kraakbeen aan de spina te vinden is (Bryce), maar het is buitengesloten, dat de spina scapulae bij den pasgeborene nog uit kraakbeen zou bestaan (Kölliker, Hertwig).

De opvatting van Lewis (verdubbeling van de margo superior) is echter zeker foutief. De afbeelding, die Broman, Bryce en Bardeen van Lewis overnemen, geeft een onjuiste reconstructie van het schouderblad weer.

Scheikunde. — P. VAN ROMBURGH: „*Over het m. p. dinitrodimethylaniline*".

Vele jaren geleden reeds deelde ik mede, door inwerking van salpeterzuur op dimethylaniline, in een groote overmaat van zwavelzuur opgelost, twee nieuwe isomere dinitrodimethylanilinen resp. smeltend bij 112° en 176° te hebben verkregen, welke ook door inwerking van verdund salpeterzuur (S.G. 1.2) op metanitrodimethyl aniline ontstaan.

Tevens vermeldde ik, dat het bij 176° smeltend product door behandeling met salpeterzuur (S.G. 1.36) overgaat in twee isomere trinitroderivaten, resp. smeltend bij 154° en 196°.

Door koken met rookend salpeterzuur gaan al deze nitroderivaten over in een trinitromethylnitraminophenol. [1])

Verder toonde ik aan, dat het bij 112° smeltend product, door oxydatie met chroomzuur in azijnzure oplossing, overgaat in een bij 166° smeltend dinitromonomethylaniline [2]). Eindelijk kon ik door inwerking van rookend salpeterzuur onder bepaalde omstandigheden uit beide trinitroderivaten een tetranitromethylnitraminobenzol verkrijgen, waarvan de structuur werd bewezen [3]).

Later kon deze stof langs een eenvoudige methode direct uit dimethylaniline worden bereid [4]).

In een in 1895 verschenen publicatie [5]) stelde ik voor deze nitroverbindingen de volgende formules vast:

het	bij	112°	sm.	prod.	is	3.6.	dinitrodimethylaniline
„	„	176°	„	„	„	3.4.	„ „ „
„	„	154°	„	„	„	2.3.4.	trinitrodimethylaniline
„	„	196°	„	„	„	4.3.6.	„ „ „

Deze resultaten schijnen grootendeels in vergetelheid geraakt. Zoo beweerde KAUFMANN, [6]) dat een door hem door inwerking van nitriet en zoutzuur op metanitrodimethylaniline verkregen 3.4. dinitroderivaat *niet* identisch met mijn product is, omdat beide geheel verschillende

[1]) Rec. 6, 253 (1887).

[2]) Rec. 8, 253 (1889).

[3]) Rec. 8, 273 (1889).

[4]) v. ROMBURGH en SCHEPERS, deze Versl. Sept. 1913

[5]) Deze Verslagen, Febr. 1895.

[6]) Ber. **37**, 2615 (1904).

reductieproducten zouden geven. Daar KAUFMANN niet aangeeft, hoe hij mijn product verkreeg, vermoed ik, dat hij het 2.4. dinitro-*mono*methylaniline (dat bijna hetzelfde smeltpunt heeft) in handen had, althans het bleek mij, dat het door mij uit het 3.4. dinitrodimethylaniline verkregen reductieproduct met dat van KAUFMANN volkomen identisch is.

Reduceert men n.l. met tin en zoutzuur en voegt dan bij de, na afgieten van het tin, verkregen, nog warme kleurlooze vloeistof, volgens voorschrift van KAUFMANN, alkohol en benzil, kookt daarna gedurende twee minuten (niet twee uur, zooals KAUFMANN voorschrijft) dan verkrijgt men gemakkelijk het bij 193° smeltende 3-6-7-dimethylaminodiphenylchinoxaline, zooals bij den orthostand der nitrogroepen was te verwachten.

HANTSCH[1]) beweerde in 1910, dat hij het 3-4-dinitrodimethylaniline had verkregen door inwerking van salpeterzuur (S.G. 1.3) op dimethylaniline. Een nitreering volgens zijn voorschrift toonde echter aan, dat hierbij geen spoor van dit product ontstond, maar als een der reactieproducten het bij 175—176° smeltende 2.4-dinitromonomethylaniline optrad.

In een voor eenige maanden verschenen verhandeling van FORSTER en COULSON[2]) wordt, volkomen ten onrechte, vermeld, dat 1-3-4- en 1-3-6-dinitromethylaniline in 1886 door CROLL[3]) zouden zijn verkregen, terwijl bovendien door hen nog weer eens het bewijs geleverd wordt van de structuur dier stoffen, dat ik reeds in 1895 gaf.

In 1920 geeft SWANN[4]) aan, een bij 154° smeltende β-modificatie van 3-4-dinitrodimethylaniline te hebben verkregen door inwerking van salpeterzuur (S.G. 1.3) op m.nitrodimethylaniline, opgelost in 60 °/₀ zwavelzuur.

Hoewel ik het 1-3-4-dinitrodimethylaniline sp. 176° herhaaldelijk heb bereid, nam ik nog nimmer het bestaan van een andere modificatie waar. Ik heb daarom de proef van SWANN herhaald en door verschillende mijner leerlingen doen herhalen. Inderdaad gelukte het in de meeste gevallen volgens zijn voorschrift een bij 154° smeltend product te verkrijgen.

Een nauwkeuriger onderzoek van dit product leerde echter, dat het geen andere modificatie van het 3-4-dinitrodimethylaniline was,

---

1) Ber. **43**, 1674 (1910).

2) J. Chem. Soc. **121**, 1988 (1922).

3) Ber. **19**, 199 (1886).

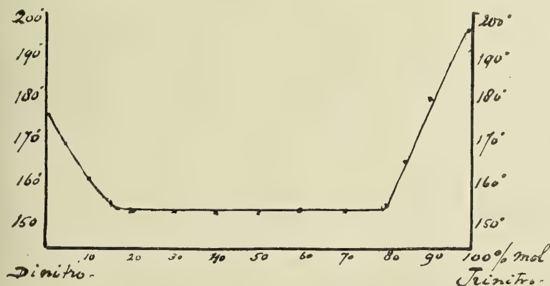
4) J. Chem. Soc. 117, 1 (1920).

maar dit product, verontreinigd met het bij 196° smeltende 3-4-6-trinitrodimethylaniline. Swann verkreeg zijn product na *eenmaal* omkristalliseeren uit alkohol of benzol. Door het in geconcentreerd zwavelzuur op te lossen en de oplossing met water neer te slaan ontstond de bij 176° smeltende stof, na weer eenmaal uit alkohol te zijn omgekristalliseerd. Ook gelukte hem de vermeende omzetting door een amylalkoholische oplossing met weinige druppels van 80°/₀ zwavelzuur te koken, waarna bij bekoeling eveneens de bij 176° smeltende verbinding werd verkregen.

Swann slaagde er echter niet in om het bij 176° smeltend product weer in de vermeende bij 154° smeltende modificatie om te zetten. Klaarblijkelijk is bij de bewerkingen, welke Swann zijn product deed ondergaan, het 3.4.6-trinitroderivaat in oplossing gebleven.

Lost men een mengsel van gelijke gewichtshoeveelheden van 3-4-dinitro- en van 3-4-6-trinitrodimethylaniline in iets meer dan de noodige hoeveelheid kokenden alkohol op, dan kristalliseert eerst een groot gedeelte van de laatste stof uit. Giet men dan de nog niet geheel afgekoelde vloeistof af en brengt ze weer aan de kook, dan gelukt het meestal kristallen te verkrijgen, die bij 154° smelten, maar zich bij omkristalliseeren uit aceton weer in de oorspronkelijke stoffen laten scheiden.

Bepaalt men de smeltlijn van mengsels der beide nitroverbindingen in verschillende mol. verhoudingen dan blijkt deze het onderstaande verloop te hebben:



Zooals men ziet, wijst dit òf op een continuë reeks van mengkristallen met een zeer vlak minimum of op de smeltlijn van een chemische verbinding met zeer vlak maximum. De kans om bij het omkristalliseeren een stof met 't smeltpunt 154° te krijgen is wel zeer groot.

Naar mij voorkomt moet de door SWANN aangegeven β-modificatie van 3-4-dinitrodimethylaniline uit de literatuur worden geschrapt.

Ten slotte vermelden FORSTER en COULSON (loc. cit. p. 1995) als een nieuwe vondst, dat in het 3-4-dinitrodimethylaniline de m.nitrogroep bewegelijk is. Zoo konden zij met methylamine een 4.nitro-3.methylaminodimethylaniline verkrijgen. Reeds in 1895 echter wees ik [1]) op de bewegelijkheid van een der nitrogroepen, terwijl ik in hetzelfde jaar zoowel van bovengenoemde verbinding als van 4.nitrodimethylmetaphenyleendiamine (dat door inwerking van ammoniak ontstaat) additieproducten met s.trinitrobenzol beschreef. [2])

Utrecht, Maart 1923. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

[1]) Deze Verslagen Febr. 1895.

[2]) Rec. **14**, 69 (1895).

Scheikunde. — ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD: *„Twee nieuwe methoden ter experimenteele bepaling van de fiktieve volumeverandering in het oplossingsevenwicht".*

Inleiding.

Onder de *fiktieve* volumeverandering van een bij $T°$ en 1 atmospheer druk verzadigde oplossing van een stof in eenig medium verstaat men de volumeverandering, welke intreedt indien men in een onbegrensd groote hoeveelheid van een dergelijke, verzadigde oplossing een mol. (resp. 1 gram) der bedoelde stof oplost. Ook de naam *theoretische* of *laatste volumeverandering* kan men aan die grootheid geven in analogie met de nomenklatuur voor het warmte-effekt, dat dit oplossingsproces begeleidt [1]). Het is deze fiktieve volumeverandering, die in de piëzochemie der oplossingen een belangrijke rol speelt.

Terwijl wij in de laatste jaren reeds een tweetal methoden hebben beschreven en toegepast om die grootheid experimenteel te bepalen [2]), zullen wij in het volgende twee nieuwe wegen schetsen, die tot hetzelfde doel leiden. Wij zullen die met den naam derde en vierde methode bestempelen.

Derde methode.

1. Zij kan alleen op elektrolyten worden toegepast.

Stel, dat moet worden bepaald bij $T°$ en 1 atm. druk de fiktieve volumeverandering in de waterige oplossing van den elektrolyt KA, waarin K diens kation, A zijn anion voorstelt.

Wij konstrueeren nu twee omkeerbare galvanische cellen, die aldus zijn samengesteld:

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het kation K.	Oplossing van KA, verzadigd bij $T°$ en 1 atm., *met* „Bodenkörper".	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het anion A.	(α-cel)

en:

[1]) Zie literatuuropgaaf: Deze Verslagen **35**, 1046 (1917).

[2]) ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD, Zeitschr. f. physik. Chemie **93** 385 (1919). Aldaar § § 65 vv.

ERNST COHEN, C. W. G. HETTERSCHIJ en A L. TH. MOESVELD, Zeitschr. f. physik. Chemie **94**, 210 (1920).

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het kation K.	Oplossing van KA, verzadigd bij $T°$ en 1 atm. *zonder* „Bodenkörper".	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het anion A.	(β-cel)

Nu geldt voor onze α-cel: [1])

$$-\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\alpha = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_{T.\pi}\right]_\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin E de elektromotorische kracht voorstelt, π de druk, onder welken de cel zich bevindt, $\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_{T.\pi}$. de volumeverandering, die intreedt, indien wij bij konstante temperatuur en konstanten druk de eenheid van elektriciteit door de cel zenden.

Op dezelfde wijze geldt voor de β-cel:

$$-\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\beta = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_{T.\pi}\right]_\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\alpha - \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\beta = -\left[\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_{T.\pi}\right]_\alpha + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_{T.\pi}\right]_\beta \quad . \quad (3)$$

Beschouwing van het mechanisme der cellen leert nu, dat het tweede lid van vergelijking (3) de fiktieve volumeverandering voorstelt, die het oplossingsproces van één gramaequivalent in de bij $T°$ en π atm. verzadigde oplossing begeleidt. Dus is:

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\alpha - \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\beta = \Delta v \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nu is echter

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\alpha = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_\beta + \left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T} \times \left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Hierin is C de koncentratie van oplossingen in cellen, welke volgens het schema:

Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het kation	Oplossing van KA koncentratie C	Elektrode, omkeerbaar ten opzichte van het anion

zijn samengesteld.

Uit (4) en (5) volgt:

$$\Delta v = \left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T} \times \left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Deze methode stelt ons dus in staat Δv voor willekeurige druk-

[1]) Ernst Cohen en L. R. Sinnige, Zeitschr. f. physik. Chemie **67**, 1 (1909).

kingen vast te stellen door bepaling van $\left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T}$ en $\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_{T}$ bij die drukkingen. Nemen wij $\pi = 1$ atm. dan wordt de bovenbedoelde fiktieve volumeverandering bekend.

2. Wij zullen vergelijking (6) thans toetsen in het geval, waar het geldt de fiktieve volumeverandering voor de verzadigde oplossing van thallosulfaat (bij 30°.00 C.) te bepalen. Deze werd nl. reeds gemeten door Fusao Ishikawa (bij gelegenheid van een later te publiceeren onderzoek) met behulp der eerste methode [1]), waarbij van de vergelijking

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_{\alpha} - \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \pi}\right)_{T.e}\right]_{\beta} = \Delta v$$

werd gebruik gemaakt [2]).

Men vond: $\Delta v_{30^{\circ}.00\,C.} = -\mathbf{0.04920}\ \frac{cc.}{gram}.$

Het Bepalen van $\left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T.}$

3. Terwijl de bizonderheden van dit onderzoek later zullen worden medegedeeld, worde hier slechts vermeld, dat bij 30°.00 C. de E.K. werd gemeten van cellen, welke volgens het schema:

Tl-amalgaam 50 gew. °/₀	Thallosulfaat oplossing koncentratie C	Hg Hg_2SO_4

waren samengesteld. De onderzochte koncentraties waren $C = 2.283$; $C = 3.059$; $C = 4.104$; $C = 5.110$; $C = 5.826$. (C = gew. deelen Tl_2SO_4 in 100 gew. deelen der oplossing). De verzadigingskoncentratie bij 30°.00 C. bedraagt 5.826. Er werden van elke koncentratie steeds twee cellen onderzocht.

Met behulp der methode der kleinste quadraten werd uit de waargenomen E.K. bij verschillende koncentraties der oplossingen berekend:

$$E = 1.10771 - 0.01305\,C + 0.0007907\,C^2,$$

[1]) De bruikbaarheid van deze methode werd reeds vroeger onderzocht door Ernst Cohen, Hetterschij en Moesveld, Zeitschr. für physik. Chemie **94,** 210 (1920), in het geval van verzadigde kadmiumjodide oplossingen.

[2]) Zie ook Ernst Cohen, C. W. G. Hetterschij en A. L. Th. Moesveld, Zeitschr. f. physik. Chemie **94**, 210 (1920).

waaruit (bij de verzadigingskoncentratie) volgt:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T} = -0.00384 \frac{\text{Volt}}{\text{proc.}}.$$

Het Bepalen van $\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T$.

4. Deze waarde is langs *direkten* weg bepaald door ERNST COHEN PEEREBOOM VOLLER en MOESVELD volgens de methode, onlangs door hen beschreven [1]).

Gevonden werd (bij 30°.00 C.):

$$C = 5.831 + 0.003377\,\pi - 0.000\,000\,175\,\pi^2,$$

waarin π den druk in atmospheren voorstelt.

Hieruit volgt (bij 30°.00 C.):

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_{1\,\text{atm.}} = +0.003377 \frac{\text{proc.}}{\text{atm.}}.$$

Berekening van Δv *uit verg.* (6).

5. Substitueeren wij de gevonden waarde van $\left(\frac{\partial E}{\partial C}\right)_{\pi.T}$ en $\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T$ in verg. (6), en overwegen dat 1 Liter-atmospheer = 101.3 Volt-Coulomb en dat het molekulairgewicht van $Tl_2SO_4 = 504.06$ bedraagt, dan is:

$$\Delta v = \frac{-0.00384 \times 0.003377 \times 2 \times 96494}{0.1013 \times 504.06} = -\mathbf{0.0490} \frac{\text{cc.}}{\text{gr.}}$$

terwijl vroeger (zie § 2) volgens de methode der drukkoëfficiënten gevonden was $\Delta v = -\mathbf{0.0492} \frac{\text{cc.}}{\text{gr.}}$.

Vierde Methode.

6. Bij gelegenheid van ons onderzoek over de experimenteele toetsing der wet van BRAUN [2]) werden twee methoden behandeld, die ons Δv doen kennen.

Daar werd afgeleid de betrekking

$$\Delta v = v_{c_1} + (1 - c_1)\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c=c_1} - v_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[1]) Verslagen Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, **31**, 617 (1922).

[2]) Zeitschr. f. physik. Chemie **93**, 385 (1919). Speciaal § § 65 vv.

waarin v_{c_1} het specifiek volume der verzadigde oplossing (bij de temp. T en den druk van 1 atm.) voorstelt, c_1 de verzadigingskoncentratie en v_s het specifiek volume der vaste stof. De bepaling dezer grootheden benevens die van $\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c=c_1}$, waartoe de kennis der spec. volumina van oplossingen van zoo ver mogelijk uiteenloopende koncentraties vereischt wordt (liefst ook van *over*verzadigde oplossingen), geeft dan de gezochte grootheid Δv.

7. In die verhandeling werd tevens een andere methode ter bepaling van Δv kort aangeduid. Zij lijkt op het eerste gezicht beknopter en meer direkt, dan de zooeven genoemde en berust op het meten der volumeverandering, welke intreedt, wanneer uit een *over*verzadigde oplossing van bekende koncentratie de overmaat vaste stof bij de verzadigingstemperatuur uitkristalliseert. Men kan dan de intredende volumeverandering direkt meten; de hoeveelheid stof, welke uitkristalliseert, kan worden berekend, wanneer de koncentratie der oververzadigde oplossing, zoomede de verzadigingskoncentratie bekend zijn. Zoodoende wordt dan de volumeverandering per gram uitkristalliseerende stof bekend.

Daarbij mag echter niet over het hoofd worden gezien, dat op deze wijze eene grootheid $\Delta_1 v$ wordt gevonden, die slechts dan gelijk is aan Δv wanneer het spec. volume der oplossing een lineaire funktie is van de koncentratie.

In de bovengenoemde verhandeling werd voor $\Delta_1 v$ afgeleid de uitdrukking:

$$\Delta_1 v = v_{c_1} + (1-c_1)\frac{v_{c_2} - v_{c_1}}{c_2 - c_1} - v_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Tevens werd $\Delta_1 v$ voor een tweetal oververzadigde oplossingen gemeten en toonde men aldus experimenteel aan, dat $\Delta_1 v$ en Δv niet gelijk waren. Wel werd er op gewezen, dat het mogelijk is, uit een aantal $\Delta_1 v$-bepalingen voor oplossingen van verschillende oververzadiging de waarde van Δv door extrapolatie af te leiden, maar daarbij werd opgemerkt, dat naarmate $\Delta_1 v$ tot die van Δv nadert, de oververzadiging geringer en dus de gemeten volumeverandering geringer en daarmede relatief onnauwkeuriger moest worden.

8. Wij zullen nu in het volgende een methode uitwerken, die ons in staat stelt uit de direkt gemeten $\Delta_1 v$ de waarde van Δv te vinden, waarbij alleen gebruik gemaakt zal worden van grootheden, die zich nauwkeurig laten vaststellen, terwijl het niet meer noodig

is v_s te bepalen. De aldus gevonden waarde van Δv zal echter gebruikt kunnen worden om v_s te vinden.

9. Allereerst merken wij op, dat het spec. volume van oplossingen van verschillende koncentratie kan worden voorgesteld door

$$v_c = \alpha + \beta c + \gamma c^2 + \ldots .$$

In het door ons onderzochte geval [1] (metadinitrobenzol in aethylacetaat) was de vergelijking, die de waarnemingen nauwkeurig beschreef, een quadratische, maar voor andere funkties blijft hetgeen volgt, eveneens van kracht.

Voor twee koncentraties c_1 en c_2 geldt dus:

$$v_{c_1} = \alpha + \beta c_1 + \gamma c_1^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$v_{c_2} = \alpha + \beta c_2 + \gamma c_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Uit (3) en (4):

$$\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c=c_1} = \beta + 2\,\gamma c_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

en

$$\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c=c_2} = \beta + 2\,\gamma c_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Substitueeren wij deze waarden van v_{c_1} en v_{c_2} resp. van $\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c\,=\,c_1}$ en $\left(\frac{dv_c}{dc}\right)_{c\,=\,c_2}$ achtereenvolgens in (1) en (2), dan vinden wij:

$$\Delta v = \alpha + \beta + \gamma\,(2\,c_1 - c_1^2) - v_s \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\Delta_1 v = \alpha + \beta + \gamma\,(c_1 + c_2 - c_1\,c_2) - v_s \quad \ldots \quad (8)$$

Terloops worde opgemerkt, dat voor $c_1 = c_2$ natuurlijk (8) in (7) moet overgaan.

Wij vinden nu:

$$\Delta_1 v - \Delta v = \gamma\,(1 - c_1)\,(c_2 - c_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

of in woorden: het verschil tusschen de direkt gemeten volumeverandering ($\Delta_1 v$) en de fiktieve (Δv) is een lineaire funktie van de oververzadiging ($c_2 - c_1$).

10. Schrijven wij (9) in den vorm:

$$\Delta v = \Delta_1 v - \gamma\,(1 - c_1)\,(c_2 - c_1). \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

dan blijkt, dat de fiktieve volumeverandering kan worden berekend uit de gemeten waarde van $\Delta_1 v$, de oververzadigingskoncentratie c_2 en de verzadigingskoncentratie c_1 benevens den koëfficiënt (γ) van

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **93**, 385 (1919).

c^2 in de vergelijking, die de spec. volumina van oplossingen van verschillende koncentratie als funktie der koncentratie voorstelt. Het groote voordeel van deze methode is daarin gelegen, dat men, door voor het onderzoek sterk oververzadigde oplossingen te kiezen, de gemeten waarde $\Delta_1 v$ groot kan maken. Buitendien echter legt men de funktie (v_c, c), die ter bepaling van γ dient, liefst met behulp van zoo sterk mogelijk oververzadigde oplossingen vast. Ook wordt hier juist in dit geval de waarde van $c_2 - c_1$ in verg. (10) zoo groot mogelijk.

11. Past men vergelijking (10) toe op de twee oververzadigde oplossingen A en B van metadinitrobenzol in aethylacetaat, bedoeld in onze bovengenoemde verhandeling (pag. 447, Tabel 9) dan geldt voor oplossing A:

$$c_2 = 0.4321 \quad ; \quad c_1 = 0.3443 \quad \text{(zie pag. 448).}$$

$$\gamma = 0.03808 \quad \text{(verg. op pag. 447).}$$

Verder is $\Delta_1 v = 0.0460$ (pag. 451).

Zoodat:

$$\Delta v = 0.0460 - 0.0022 = \mathbf{0.0438} \frac{\text{cc.}}{\text{gr.}}.$$

Voor oplossing B geldt:

$c_2 = 0.3914 \quad ; \quad c_1 = 0.3443 \quad ; \quad \gamma = 0.03808 \quad ; \quad \Delta_1 v = 0.0446.$

Zoodat:

$$\Delta v = 0.0446 - 0.0012 = \mathbf{0.0434} \frac{\text{cc.}}{\text{gr.}},$$

terwijl vroeger langs den weg, die in verg. (1) ligt opgesloten, gevonden werd:

$$\Delta v = \mathbf{0.04420} \frac{\text{cc.}}{\text{gr.}}.$$

12. De wijze, waarop het spec. volume der vaste stof volgens deze methode kan worden bepaald, welke echter in verband met de hoeveelheid uitgekristalliseerde stof lang niet zoo nauwkeurig kan wezen als die, vermeld op blz. 451 onzer verhandeling, ofschoon er in wezen geheel mede overeenstemmend, is nu ook duidelijk. Immers, uit het totale volume van oplossing en vaste stof na het kristalliseeren der oververzadigde oplossing kan het volume der vaste stof worden afgeleid door aftrekken van het volume der resteerende verzadigde oplossing. Het gewicht der vaste stof, waarop dit volume betrekking heeft, vindt men uit de koncentratie der oplossing vóór en na het kristalliseeren.

13. Men kan echter ook zonder meer gebruik maken van verg. (8) ter berekening van v_s.

Men vindt dan:

$$v_s = \alpha + \beta + \gamma (c_1 + c_2 - c_1 c_2) - \Delta_1 v \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Passen wij deze vergelijking toe ter berekening van het spec. volume van het vaste metadinitrobenzol (bij 30°.00 C.) met behulp der gegevens uit onze vroegere verhandeling, waarvan gedeeltelijk reeds boven gebruik is gemaakt, dan vindt men met behulp van oplossing A:

$$\alpha = 1.12493 \quad ; \quad \beta = -0.46371 \quad ; \quad \gamma = 0.03808 \quad ;$$
$$c_1 = 0.3443 \quad ; \quad c_2 = 0.4321 \quad ; \quad \Delta_1 v = 0.0460.$$
$$v_s = \mathbf{0.6391.}$$

Met behulp van oplossing B, waarvoor $c_2 = 0.3914$ en $\Delta_1 v = 0.0446$:

$$v_s = \mathbf{0.6395}$$

terwijl de meer nauwkeurige methode (verg. 1) levert:

$$v_s = \mathbf{0.63872}.$$

Wij hopen binnen kort terug te komen op de toepassing dezer methode ter bepaling van Δv in een ander geval.

SAMENVATTING.

Er werden twee nieuwe methoden beschreven ter bepaling van de fiktieve volumeverandering in het oplossingsevenwicht. Zij werden in eenige gevallen toegepast en haar resultaten in overeenstemming bevonden met die, welke vroeger door ons langs anderen weg waren verkregen.

Utrecht, Maart 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium.*

Scheikunde. — A. SMITS: *„De invloed van intensieve droging op innerlijke omzettingen"* I.

(Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en W. H. JULIUS).

Onder den zelfden titel als de hier bovenstaande werd door mij Dec. 1921 in den 100en band van het Z. f. physik. Chemie een mededeeling gepubliceerd, die aanvankelijk in manuscript omvangrijker was, doordat daarin ook nog een mogelijke verklaring werd gegeven van den door BAKER gevonden grooten invloed van intensieve droging op het chemisch reactievermogen van gassen en bovendien het salmiakvraagstuk werd besproken [1]). De reden, waarom ik dat gedeelte voorloopig terughield was de volgende.

Ik was het er toen met mijzelf nog niet over eens of bij de intensieve droging een fixatie of een verschuiving van het innerlijk evenwicht moest worden aangenomen. De toen gepubliceerde uitkomsten van de onderzoekingen van BAKER [2]) spraken sterk voor een verschuiving, doch aanvankelijk scheen mij deze aanname zeer bezwaarlijk, daar men dan moet aannemen, dat het geringste spoortje vocht het innerlijk evenwicht een groote verschuiving kan doen ondergaan.

Later, toen BAKER een nieuwe reeks proeven had gepubliceerd [3]), leek het mij echter toch het waarschijnlijkst, dat hier een verschuiving van het innerlijk evenwicht optreedt, hetgeen van thermodynamisch standpunt bekeken beteekent, dat er een zeer groote arbeid noodig is, om aan een stelsel de laatste spoortjes water te onttrekken.

In de Engelsche en Fransche uitgave van de Theorie der Allotropie, waarin ik een hoofdstuk aan de proeven van BAKER heb gewijd, deed ik dan ook reeds uitkomen, dat naar mijn meening intensieve droging een verschuiving van het innerlijk evenwicht ten gevolge heeft. Intusschen heeft mijn eigen onderzoek, dat ik met eenige mijner leerlingen uitvoerde, dit vermoeden bevestigd.

De verklaring van den invloed van intensieve droging op het reactie-vermogen, die ik tot heden niet publiceerde is uiterst eenvoudig, want wij hebben daartoe slechts de theorie der allotropie

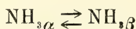
---

[1]) Ook de invloed van intensieve droging op de eigenschappen van Salmiak wordt verklaarbaar, wanneer men aanneemt, dat deze stof twee molecuulsoorten bevat, waarvan de eene dissocieerbaar is en de andere niet.

[2]) Trans. Chem. Soc. **51**, 2339 (1903).

[3]) Trans. Chem. Soc. **121**, 568 (1922).

toe te passen en dus aan te nemen, dat elke phase van deze stoffen minstens twee verschillende molecuulsoorten bevat, die natuurlijk bij unair gedrag met elkaar in innerlijk evenwicht zijn, en dàn daaraan toe te voegen de onderstelling dat minstens één dezer molecuulsoorten chemisch inactief is. Om het geval zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen, kunnen wij dan aannemen, dat er slechts twee verschillende molecuulsoorten zijn, waarvan de eene actief en de andere inactief is. Geven wij deze bij ammoniak aan met $NH_{3\alpha}$ en $NH_{3\beta}$, dan hebben wij dus in elke phase, bij unair gedrag, het volgende innerlijk evenwicht:



$$NH_{3\alpha} \rightleftarrows NH_{3\beta}$$

Mijn onderstelling was nu deze, dat bij intensieve droging dit innerlijk evenwicht wordt verschoven naar den inactieven kant en in dit geval *volledig*, zoodat men tenslotte ammoniak overhoudt, dat alleen de inactieve molecuulsoort bevat.

Ik wil er hier nog even aan herinneren dat ik er reeds vroeger uitdrukkelijk op gewezen heb, dat de uitdrukking ,,verschillende molecuulsoorten" zoo breed mogelijk moet worden opgevat. Daar onder zijn te verstaan niet alleen de isomere en polymere moleculen, maar ook de electrisch geladen dissociatieproducten, ionen + electronen en het spreekt wel van zelf, dat in vele gevallen het onderscheid tusschen de verschillende molecuulsoorten in een verschil in den atoombouw zetelt.

Het zijn juist de nieuwere beschouwingen omtrent den atoombouw die doen inzien, dat tusschen de verschillende atomen zéér fijne verschillen mogelijk zijn, die b.v. met een verandering van de kwantengetallen der valentie-electronen-banen samenhangen en tot molekuulsoorten met fijnere verschillen leidt dan die, welke tusschen de gewone isomeren aangenomen worden. Dit neemt echter niet weg, dat ook deze verschillende molecuulsoorten bij een breede opvatting van het begrip ,,isomerie" onder deze categorie te rangschikken zijn [1].

Tijdens mijn onderzoek verscheen een publicatie van Baly en Duncan [2]), waarin zij o. a. mededeelden, dat de snelheid waarmede gasvormige ammoniak, onttrokken aan een ijzeren cylinder met vloeibaren ammoniak, door een op bepaalde temperatuur verhitte platina spiraal wordt ontleed, afhankelijk is van de verdampingssnelheid van de vloeibare ammoniak. Bij snelle verdamping werd ammoniakgas verkregen van veel kleinere ontledingssnelheid dan

[1]) Deze uiteenzetting omtrent „verschillende molecuulsoorten" komt ook in de mededeeling „Het stelsel zwaveltrioxyde" voor, die ik aanvankelijk elders meende te publiceeren.

[2]) J. Chem. Soc. **121** en **122**, 1008 (1922).

bij langzame verdamping. BALY en DUNCAN gaven als hun meening te kennen, dat dit verschil waarschijnlijk daardoor wordt veroorzaakt, dat bij snelle verdamping een gasphase ontstaat, die rijk is aan de molecuulsoort, die in de vloeistofphase overweegt, terwijl bij langzame verdamping gelegenheid heeft bestaan voor de omzetting van deze molecuulsoort in een andere, waaruit onder gewone omstandigheden de gasphase voornamelijk béstaat.

De eene molecuulsoort, die voornamelijk in vloeibare ammoniak voorkomt, zou dan de inactieve zijn en de andere molecuulsoort, waaruit voornamelijk het gewone ammoniakgas bestaat de actieve. Verder wezen zij er op, dat het bestaan van inactieve en actieve molecuulsoorten waarschijnlijk de chemische inactiviteit van de door BAKER gedroogde gassen verklaart.

Wij zien dus dat BALY en DUNCAN in deze verhandeling reeds de onderstelling uiten, waartoe ook ik gekomen was, maar nog niet publiceerde, omdat mijn onderzoek nog niet genoeg was gevorderd. Nu zijn echter de resultaten van BALY-DUNCAN zooals BRISCOE [1]) opmerkte, niet zeer overtuigend, omdat zij ook op een andere wijze verklaard kunnen worden. Hij zegt: „It is known, that ordinary commercial ammonia, dried over lime, contains about 1 per cent of water [2]), and that rapid, irreversible destillation, such as may occur by free discharge of gas from a cylinder of liquid, is a very effective means of seperating the constituents even of a constant boiling mixture [3]), so that the gas thus obtained may well be considerable drier than that in real equilibrium with the cylinder liquid. BALY has found that the addition of water vapour to ordinary ammonia increases its reactivity, drying certainly decreases its reactivity, and so the greater dryness of the "inactive" form would appear to be capable of explaining the whole of the observations, including the "recovery" of the gas in cylinders on standing (by acquisition of the equilibrium content of water vapour) identity of slowly released cylinder gas with laboratory preparations dried by lime, recovery of inactive gas in the experimental tube when the wire is heated at 200° (release of adsorbed water from the wire or walls) and the increase in reactivity of "inactive" ammonia with increase of temperature of the wire".

Deze opmerkingen van BRISCOE, die mij zéér juist voorkomen, ontnemen aan de gepubliceerde proeven van BALY helaas hunne

[1]) Annual Reports of the Progress of chemistry vol. **19** 1922, p. 37.

[2]) WHITE T. 121, 1688 (1922).

[3]) MULLIKEN J. Amer. Chem. Soc. **44**, 2389 (1922).

bewijskracht voor het bestaan van een actieve en een inactieve molecuulsoort in ammoniak.

Ik wilde mijn onderstelling op andere wijze toetsen en ging dan ook een geheel anderen weg.

Na mij overtuigd te hebben, dat het zuivere P_2O_5, dat ik volgens de methode van BAKER bereidde, inderdaad dezelfde eigenschappen bezat als dat van BAKER [1]), ben ik met eenige van mijn leerlingen begonnen met het onderzoek van den invloed van intensieve droging op het overgangspunt, smeltpunt en dampspanning van een groot aantal stoffen en onder deze nemen die stoffen, waarbij BAKER vond, dat door intensieve droging de chemische activiteit verdween, om de groote belangrijkheid van dit verschijnsel, een zeer bijzondere plaats in. Van deze laatste groep werden allereerst NH_3 HCl, CO en O_2 onderhanden genomen. Bepalen wij ons voorloopig tot NH_3, dan wil ik hier reeds mededeelen, dat wij, evenals BAKER vroeger, tot het resultaat zijn gekomen, dat werkelijk bij zéér accuraat werken is te bereiken, dat ammoniak, *niet* noemenswaard door zuiver P_2O_5 wordt geabsorbeerd. [2]) Het onderzoek van ammoniak is het meest gevorderd en ik kan hier dan ook reeds vermelden, dat ik in samenwerking met de Heeren A. CLAASSEN en H. W. C. DE LIEFDE heb gevonden, dat, overeenkomstig de verwachting, intensieve droging het smeltpunt van ammoniak aanmerkelijk *verhoogt*, hetgeen dus een verandering is in dezelfde richting als BAKER bij de smeltpuntsbepaling van de volgende intensief gedroogde stoffen: zwavel, jodium, bromium en benzol, vond. Bovendien vonden wij echter, dat deze toestand van ammoniak zich als een *mengsel* gedraagt. Daar nu ammoniak als gas aan intensieve droging werd onderworpen en na bepaalde tijden tot vloeistof werd gecondenseerd, beteekent dit resultaat, dat de intensieve droging hier inderdaad een verschuiving van het innerlijk evenwicht en vermoedelijk ten slotte een geheele stopzetting der innerlijke omzettingen bewerkt.

In een volgende mededeeling zullen onze resultaten en de bijzonderheden der proefneming worden besproken.

Laboratorium voor Alg. en Anorg. chemie der Universiteit.
Amsterdam, 20 Maart 1923.

---

[1]) Deze methode leerde ik door een private mededeeling van Prof. BAKER, vóór dat zij gepubliceerd was kennen, hetgeen mij veel moeite en tijd bespaarde. Ik wil dan ook niet nalaten Prof. BAKER hier daarvoor nogmaals mijn welgemeenden dank uit te spreken.

[2]) Wanneer n.l. de ammoniak voldoende was voorgedroogd vonden wij bij een volumen van 2 Liter en een aanvangsdruk van $\pm$ 1,5 atm. gedurende de eerste dagen een druksvermindering van slechts $\pm$ 2 cm. Hg, en daarna bleef de druk constant.

Scheikunde. — A. SMITS. *„Het stelsel zwaveltrioxyde" I.*

(Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en W. H. JULIUS).

Sinds eenige jaren stond het onderzoek van zwaveltrioxyde op mijn program, omdat ik vermoedde, dat deze stof goed materiaal zou opleveren ter toetsing van de theorie der allotropie. Daar echter andere onderzoekingen voorgingen, kon eerst korten tijd geleden hiermede begonnen worden.

Intusschen publiceerden BERTHOUD [1]) LE BLANC met RÜTLE [2]) ieder eene verhandeling over dampspanningen en smeltpunten van deze stof. Hoewel deze twee verhandelingen later uitvoeriger zullen worden besproken, wil ik hier reeds eenige opmerkingen maken en meer speciaal in verband met de laatst genoemde publicatie.

De daarin genoemde resultaten bewijzen ten duidelijkst, dat het SO_3 inderdaad een stof is, die niet alleen ter toetsing van bovengenoemde theorie dienen kan, maar die daartoe zoo buitengewoon geschikt is, dat men zeggen kan, dat zij in dit opzicht tot heden door geen andere wordt geëvenaard. De verkregen resultaten laten nl. zien, dat zoowel de vloeibare als de vaste phasen van het SO_3 zich als phasen van meerder componenten kunnen gedragen, hetgeen zonder eenigen twijfel aan de komplexiteit van deze phasen moet worden toegeschreven.

Deze komplexiteit heeft haar grond in het voorkomen van verschillende molecuulsoorten in dezelfde phase, welke mol. soorten bij unair gedrag met elkaar in innerlijk evenwicht zijn. Ik heb er reeds vroeger uitdrukkelijk op gewezen, dat de uitdrukking „verschillende mol. soorten" *zoo breed mogelijk* moet worden opgevat [3]). Daaronder zijn te verstaan niet alleen de isomere en polymere molecule, maar ook de electrisch geladene dissociatieproducten, ionen + electrons, en het spreekt wel van zelf, dat in vele gevallen het verschil tusschen de hier genoemde „molecuulsoorten" in een verschil tusschen de atomen zetelt. Het zijn juist de nieuwere beschouwingen omtrent den atoombouw, die doen inzien, dat tusschen de verschillende atomen zeer fijne verschillen mogelijk zijn, die

---

[1]) Helvetica Chem. Acta **5**, 513 (1922).

[2]) Ber. d. Sächs Akad. v. Wiss. Leipzig **74**, 106 (1922).

[3]) The theory of Allotropy p. 2.

bijv. met een verandering van de kwanten-getallen der valentie-electronenbanen samenhangen en tot molecuulsoorten met *fijnere* verschillen leidt dan die, welke tusschen de gewone isomeren aangenomen worden. Dit neemt echter niet weg, dat ook deze verschillende molecuulsoorten bij een breedere opvatting van het begrip „isomerie" onder deze categorie te rangschikken zijn.

Welke molecuulsoorten in de verschillende phasen van het zuivere SO_3 voorkomen, kunnen wij nog niet zeggen. De mol. grootte in de dampphase klopt ongeveer met SO_3, maar het is zeer goed mogelijk dat isomere moleculen SO_3 naast elkaar voorkomen, en ook is het mogelijk, dat nog een polymere molecuulsoort in geringe concentratie aanwezig is. De molecuulsoorten, die in de gasphase voorkomen, zullen ook in de vloeistofphase en volgens de theorie der allotropie bij een *breede opvatting van het molecuulbegrip* [1]) ook in de vaste phase aanwezig zijn, maar in een andere verhouding. Tot heden verkeeren wij omtrent den fijneren innerlijken toestand van vast SO_3 nog geheel in het duister. De metingen omtrent de oppervlaktespanning kunnen onze kennis ten opzichte van de komplexiteit der vloeistofphase wel eenigermate verdiepen, maar wij missen tot heden nog een methode om uit te maken of een unaire vaste phase een mengkristal in innerlijk evenwicht is of niet.

In strijd met de meening van Le Blanc is het dan ook niet mogelijk, om uit het gevonden mol. gewicht van een stof in een oplosmiddel tot de mol. grootte van die stof in den vasten toestand te besluiten. [2])

Met het doel onze onderzoekingsmethoden aan te vullen met die, welke van de Röntgenstralen gebruik maken, in de hoop langs dezen weg tenslotte iets meer omtrent den fijneren innerlijken evenwichtstoestand in de vaste phase te leeren kennen, richtte ik, eenige jaren geleden, in mijn laboratorium een afdeeling voor het Röntgenonderzoek van de vaste stof in. Hoewel de weg die ik mij voorschreef tot de typische allotrope stoffen voert, scheen het gewenscht eerst enkele eenvoudige, maar niettemin zeer interessante stoffen te onderzoeken, waarbij resultaten waren te verwachten, die voor het inzicht in den aard der chemische binding van groot belang konden zijn. De Heeren J. M. Bijvoet en A. Karssen bestudeerden dan ook tot heden Li, LiH, $NaClO_3$, $NaBrO_3$ waarbij het, bij bepaalde onderstellingen, gelukte, den bouw en de binding der deeltjes vast te stellen. [3]) Thans is aangevangen met HgI_2 ofschoon wij weten, dat

[1]) Zie „The theory of Allotropy" p. 220.

[2]) L. c.

[3]) Gedeeltelijk gepubliceerd in Proc. Royal Soc. Amsterdam 29; 1208 (1921).

wij door dit onderzoek niet zullen kunnen uitmaken of de vaste phase een mengkristal is.

Het onderzoek door middel van Röntgenstralen is nl. lang niet zoo machtig als de meesten wel meenen. Dank zij de onderzoekingen van BAKHUIS ROOZEBOOM en zijn leerlingen hebben wij het gedrag der mengkristalphasen in binaire systemen reeds zeer goed leeren verstaan, maar wat zegt nu het Röntgen-onderzoek van deze mengkristallen ?

Nemen wij bijv. het eenvoudige systeem KCl,KBr een stelsel waarvan wij weten, dat de vaste komponenten in alle verhoudingen homogeen merkbaar zijn, en laten wij ons nu voorstellen dat een willekeurig mengkristal uit deze continue reeks aan een Röntgenanalyst gegeven wordt. Deze onderzoeker zal dan, indien hij in de meening verkeert een vaste phase van een enkelvoudige stof in handen te hebben, de gevonden intensiteiten op de gewone wijze interpreteeren en deze zéér goed in overeenstemming vinden met het beeld van het door hem *onderstelde éénkomponentige stelsel.* De intensiteiten kunnen n.l. alleen dienen ter toetsing van een reeds ondersteld model, en daar er bij het interpreteeren van deze intensiteiten nog zoo vele factoren zijn, die niet voldoende nauwkeurig bekend zijn, en omdat buitendien bijna altijd nog eenige parameters passend gekozen moeten worden, kan, ook wanneer de onderstelling foutief is, een goede overeenstemming worden gevonden.

Eenerzijds tengevolge van deze omstandigheden, anderzijds tengevolge van de onmogelijkheid reeds nu een scherp beeld te geven van de komplexiteit, zooals die door mij ook voor de vaste phase is aangenomen, kan het Röntgenonderzoek, in zijn tegenwoordige ontwikkeling, nog niet tot een verderen opbouw van de theorie der allotropie dienen, en het zal dan ook zeker nog wel eenige jaren duren, voordat het Röntgenonderzoek in staat zal zijn iets naders omtrent de innerlijke evenwichten te leeren, die reeds in den vasten toestand zijn geconstateerd.

Niettegenstaande dit alles zijn wij toch met de Röntgenstudie van het interessante HgJ_2 begonnen, om toch in ieder geval na te gaan of, en zoo ja welke veranderingen in het Röntgenspectrum van deze verbindingen in het temperatuurtraject 130—255° optreden, in de hoop dat zich dan daaruit iets met eenige waarschijnlijkheid zal laten concludeeren.

Ik heb het noodzakelijk gevonden het hier bovenstaande mede te deelen, omdat op dit gebied nog zoo groot misverstand heerscht.

Keeren wij nu weer terug tot het onderzoek van LE BLANC, dan wil ik nog opmerken, dat hij o.a. vond, dat bij afkoeling van de

onderkoelde vloeistof onder 13.9° plotseling stolling optreedt, waarbij de dampspanning, ook nadat de tijdelijke temperatuursverhooging was verdwenen, gestegen bleek te zijn. De gevormde vaste phase vertoonde dus bij dezelfde temperatuur een hoogeren druk dan de onderkoelde vloeistof en LE BLANC meende dit verschijnsel te kunnen vergelijken met de inwerking van zuurstof op phosphorus, waarbij ozon en een phosphorzuurstofverbinding wordt gevormd.

Deze op zijn zachtst uitgedrukt zéér verwonderlijke uiting demonstreert ten duidelijkste de onoverkomelijke moeilijkheid, die men ontmoet, wanneer men zich bij verschijnselen, die toch zoo duidelijk op het komplexe karakter der phasen wijst, toch op het vroeger standpunt blijft staan.

Thans wil ik niet verder op de bij het onderzoek van SO_3 gevonden verschijnselen ingaan, maar de bespreking daarvan tot de volgende mededeeling uitstellen.

Amsterdam, Maart 1923.

Laboratorium voor Alg. en Anorg. Chemie der Universiteit.

Scheikunde. — A. SMITS: „*Het electromotorisch gedrag van Magnesium.*" II [1]).

(Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en W. H. JULIUS.)

Inleiding. Meerdere malen is er reeds de aandacht op gevestigd, dat de rustpotentialen van Magnesium en Aluminium in de waterige oplossingen van de overeenkomstige zouten te weinig negatief worden gevonden. Niet bij machte dit verschijnsel te verklaren heeft men redding gezocht bij de oxydhuid en vele schijnen te meenen, dat zij daarin zijn geslaagd. Dit is daaraan toe te schrijven, dat men niet voldoende heeft nagegaan, wat men met de aanname van een oxydhuid eigenlijk bereikt. Speciaal bij Al spreekt men van een niet poreuse, isoleerende oxydhuid van moleculaire dikte. Nu hebben wij echter door verschillende proeven met zekerheid uitgemaakt, dat wanneer een geëtste of gepolijste aluminiumstaaf in kwik wordt gebracht, waarboven een waterige aluminiumzoutoplossing zich bevindt, de aluminiumstaaf *onmiddellijk* de kwikpotentiaal aangeeft, *zonder dat daarvoor blijkbaar een oxydhuidje behoeft te worden doorgeslagen* [2]). *Hieruit volgt, dat het oxydhuidje er niet is of de electronenbeweging niet verhindert.* Gingen er nu alleen electronen door de oxydlaag, dan zou de electrode zich moeten gedragen als een gaselectrode, hetgeen echter niet het geval is.

Hieruit volgt, dat wanneer een oxydhuidje bestaat, dit ook voor ionen doordringbaar moet zijn, maar dan is het ook direct duidelijk, dat de electrode een metaal-electrode zal wezen. Nu is het onder bepaalde omstandigheden mogelijk, dat de grensvloeistof, waarin de metaalelectrode zich bevindt, verzadigd is aan metaalhydroxyde en dit laat zich gemakkelijk onderzoeken, want dan kan men in de vergelijking

$$E = -\frac{0.058}{v}\log.\frac{L_M}{(M^{v}_{L})} - 2.8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

voor (M^{v}_{L}) de waarde $\frac{L_{M(OH)_v}}{(OH')}$ substitueeren, zoodat men krijgt

---

[1]) Hier zij verwezen naar de beschouwing gegeven in „The theory of Allotropy" De mededeeling I verscheen Versl. Kon. Akad. v. Wet. **29**, 819 (1920).

[2]) Z. f. Electr. Chem. **27**, 523 (1921).

$$E = -\frac{0.058}{\nu} \log. \frac{L_M}{L_M (OH)^{\nu}} - 2.8$$

of

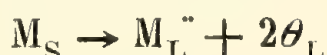
$$E = -\frac{0.058}{\nu} \log. \frac{L_M}{L_M (OH)_{\nu}} \cdot \frac{K_W^{\prime\nu}}{(H_L^{\cdot})^{\nu}} - 2.8 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit volgt, dat de electrode zich in dit geval, op een konstante na, zal gedragen als een zuurstof, resp. waterstofelectrode.

Deze beschouwing brengt ons echter niets verder, want verg. (1) blijft gelden en deze doet juist verwachten, dat, daar de metaalionenconcentratie in de aan metaalhydroxyde verzadigde oplossing zoo klein is, de potentiaal van het metaal in dit geval zéér negatief zal zijn, terwijl deze juist veel te weinig negatief is.

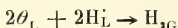
KISTIAKOWSKY[1]) berekende voor een tiental jaren de normaal potentialen t. o. v. waterstof van verschillende metalen zonder rekening te houden met den temperatuurscoëfficient in de formule van GIBBS-HELMHOLZ en vond bij Mn, Fe, Co, Cu, Cd verschillen tusschen de gevonden en de berekende normaal-potentialen van 10 tot ongeveer 60 m.V. Bij Ni, Sn, Pb, en Hg verschillen van 140 tot 190 m.V. Bij Ag vond hij een verschil van 310 m.V. en bij Tl van 360 m.V. terwijl het verschil bij Al 460 m.V. en bij Mg 900 m.V. bedroeg. Vooral het groote verschil bij zilver waargenomen, had tot groote voorzichtigheid kunnen aansporen; dit is echter niet het geval geweest.

Daar het nu KISTIAKOWSKI bleek, dat de electromotorische kracht, die hij berekende bij Mg en Al zooveel hooger is dan de experimenteel gevondene, nam hij eenvoudig maar aan, dat bij deze metalen in de cel metaal-electrolyt-waterstof, niet zooals in andere gevallen de reacties



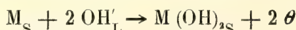
$$M_S \rightarrow M_L^{\cdot\cdot} + 2\theta_L$$

en



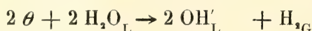
$$2\theta_L + 2H_L^{\cdot} \rightarrow H_{2G}$$

maar de volgende omzettingen plaats vinden



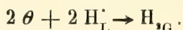
$$M_S + 2\,OH_L' \rightarrow M\,(OH)_{2S} + 2\,\theta$$

en



$$2\,\theta + 2\,H_2O_L \rightarrow 2\,OH_L' + H_{2G}$$

Deze laatste reactie zou dus thans aan de waterstofelectrode verloopen inplaats van



$$2\,\theta + 2\,H_L^{\cdot} \rightarrow H_{2G}\,.$$

[1]) Z. f. phys. Chem. **70**, 206 (1910).

Dat het metaal Mg zou bewerken, dat aan de waterstofelectrode een andere reactie verloopt, dan wanneer Zn zich bijv. op zijn plaats bevindt, is op zijn zachtst uitgedrukt een zonderlinge aanname. KISTIAKOWSKY concludeert echter terecht: „Hieraus folgt unmittelbar, dass die Mg bzw. Al. Electroden die Eigenschaften von Gaselektrode besitzen mussen, d.h. ihr E_h von der Metallionen-konzentration unabhängig, dafür aber von der $H^{\cdot}$ und OH'-Konzentration abhängig sein muss; ausserdem muss es, wie bei Pt, von den reduzierenden Eigenschaften des Elektrolyten abhängen."

KISTIAKOWSKY vergat hierbij echter geheel, dat het gedrag als een waterstofelectrode ook optreden moet bij elk ander metaal, indien de grensvloeistof bestaat uit een verzadigde oplossing van het metaalhydroxyde. Inplaats dat KISTIAKOWSKY bij verandering der $Mg^{\cdot\cdot}$-concentratie de Mg- en H_2-potentiaal in dezelfde oplossing mat, bracht hij zijn Mg-electrode behalve in een oplossing van $MgSO_4$ en in een oplossing van $MgCl_2$ in verschillende andere niet Mg-houdende oplossingen en kreeg daarbij natuurlijk uitkomsten, waaruit geen enkele conclusie mag getrokken worden. Hij meende echter, dat zijn uitkomsten bewezen, dat de Mg-potentiaal onafhankelijk is van de $Mg^{\cdot\cdot}$-concentratie.

De Heer BECK [1]) heeft in zijn dissertatie voor het eerst de onjuistheid van de opvattingen van KISTIAKOWSKY aangetoond en ook experimenteel bewezen, dat Mg zich *nooit* als waterstofelectrode gedraagt. Toch werd het electromotorisch gedrag van Mg in $MgSO_4$-oplossingen van *geringe* $(H^{\cdot}_L)$ nog niet opgehelderd, want het bleek hem, dat het verschil in potentiaal tusschen de Mg en H-electrode in deze oplossingen van geringe $H^{\cdot}$-concentratie met de Mg.concentoeneemt. [2])

De Heer BECK vond, dat de Mg-electrode zich niet als een waterstofelectrode gedraagt, maar als een normale metaal-electrode gedraagt het Mg zich toch ook niet, want er werd gevonden, dat de Mg-electrode sterker negatief wordt wanneer de $MgSO_4$-concentratie toeneemt. Verder bleek, dat bij vergrooting der $H^{\cdot}$-concentratie de Mg-potentiaal negatiever wordt, en dat deze voor elke $MgSO_4$-concentratie bij een bepaalde $H^{\cdot}$-concentratie een maximum negatieve waarde bereikt. Deze maximaal negatieve waarde veranderde met de $MgSO_4$-concentratie, althans qualitatief op normale wijze.

Dat de max. negatieve potentialen toch nog geen evenwichts-

[1]) Rec. tr. chim. **41**, 353 (1922).

[2]) Alle metingen werden door den Heer BECK uitgevoerd in een atmosfeer van zéér zuivere waterstof, onder sterk roeren van de vloeistof, terwijl de Mg-electrode stil stond.

potentialen zijn, volgt hier reeds uit, dat de potentiaal van door amalgamatie geactiveerd Mg in een oplossing van 1 grmol. $MgSO_4$ per liter, negatiever n.l. inplaats van —1.790 Volt —1.856 Volt is, welke waarde ook nog beneden de werkelijke normale evenwichtspotentiaal van Mg gelegen zal zijn, zooals hieronder zal worden aangetoond.

Magnesium.

Na deze inleiding zullen wij de metalen Mg en Al nader gaan beschouwen; in deze mededeeling zal echter in hoofdzaak alleen over *Magnesium* worden gesproken.

De moeilijkheden, die het electromotorisch gedrag van Mg en Al hebben opgeleverd, moeten daaraan worden toegeschreven, dat men niet voldoende heeft ingezien, dat bijzondere omstandigheden optreden, wanneer men met het doel evenwichtspotentialen te bepalen, zijn metingen voortzet tot de sterk onedele metalen zooals Al en Mg.

Om dit aan te toonen zullen wij een oogenblik onderstellen dat de Mg-potentiaal —1.86 Volt bedraagt. Daar nu de Mg-electrode waterstof ontwikkelt, zou dit willen zeggen, dat de potentiaal van —1.86 Volt overeenkomt met den potentiaal van het drie phasen evenwicht magnesium (in innerlijk evenwicht) — waterstof (in innerlijk evenwicht) — en grensvloeistof. De waterstofontwikkeling treedt dan op, doordat H-ionen van buitenaf in de grensvloeistof diffundeeren en zich daar met electronen vereenigen.

Bij de metalen als Fe en Zn mogen wij dit aannemen, omdat berekeningen laten zien, dat hier een grensvloeistof, die met metaal en waterstof, beide in den innerlijken evenwichtstoestand, kan coëxisteeren, ook inderdaad *bestaanbaar* is. Gaat men echter naar meer onedele metalen, dan wordt de ligging van den electrolyt, die met metaal en waterstof, beide in innerlijken evenwichtstoestand, zou kunnen coëxisteeren, zóó eenzijdig d.w.z. de verhouding $\frac{(M^{\cdot\cdot})}{(2\,H^{\cdot})}$ wordt zoo groot, dat deze electrolyt *onbestaanbaar* is geworden.

Van dit standpunt uit bezien is het gewenscht na te gaan of de zoo even genoemde potentiaal van —1.86 Volt een potentiaal kan zijn van magnesium en van unaire waterstof d.w.z. van waterstof in den innerlijken evenwichtstoestand t.o.v. dezelfde grensvloeistof, die b.v. 1 gr.ion Mg per liter bevat.

Passen wij de formule voor de experimenteel electrische potentiaal [1])

---

[1]) The Theory of Allotropy, p. 123.

$$E = -\frac{0.058}{2} \log. L_M - 2.8$$

toe en substitueeren wij voor $E = -1.86$ dan volgt hieruit:

$$L_{Mg} = (Mg_L^{\cdot\cdot}) (\theta_L)^2 = 10^{2 \times -16}.$$

Bedenken wij nu dat voor waterstof in innerlijk evenwicht geldt:

$$L_{H_2} = (H_L^{\cdot})^2 (\theta_L)^2 = 10^{2 \times -48}$$

dan zien wij, dat voor de grensvloeistof, die met Mg en H_2 gelijktijdig in electromotorisch evenwicht is, geldt:

$$\frac{(Mg_L^{\cdot\cdot})}{(H_L^{\cdot})^2} = \frac{L_{Mg}}{L_H} = 10^{2 \times 32}$$

welke verhouding in de verste verte niet realiseerbaar is. Kiezen wij b.v. $(Mg_L^{\cdot\cdot}) = 1$, dan is $H_L^{\cdot} = 10^{2 \times -32}$, en daar $(H_L^{\cdot})(OH_L') = 10^{-14}$ zou dan $(OH_L') = 10^{18}$ zijn. Nemen wij $(Mg_L^{\cdot\cdot}) = 10^{-4}$ dan wordt $(H_L^{\cdot}) = 10^{-24}$, of $(OH_L') = 10^{10}$.

Magnesium in een toestand waarin het oplosbaarheidsprodukt $10^{2 \times -16}$ is, kan dus nooit gelijktijdig met unaire waterstof en een grensvloeistof coëxisteeren, want die grensvloeistof, die daartoe vereischt wordt, is *onbestaanbaar*.

Beschouwen we onderstaande *E,X*-figuur 1, dan beteekent dit

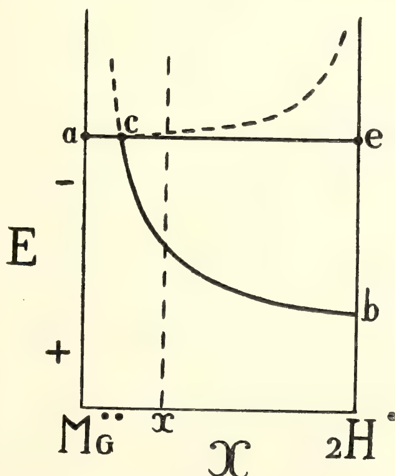


Fig. 1.

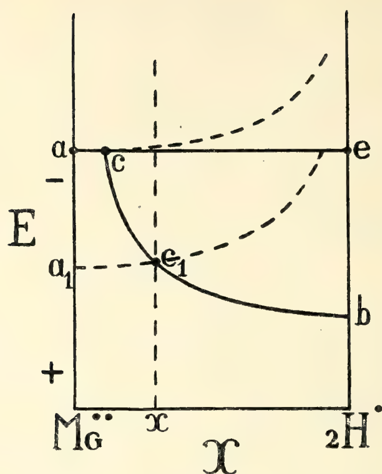


Fig. 2.

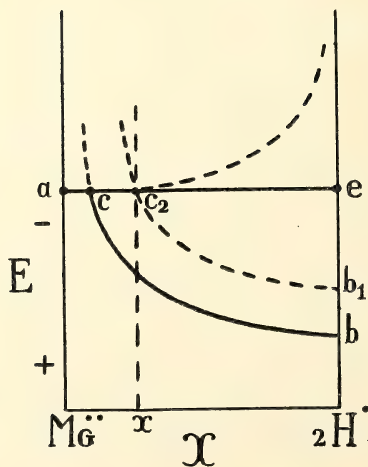


Fig. 3.

resultaat, dat de samenstelling van de electrolyt c zóó eenzijdig ligt, dat elke bestaanbare waterige oplossing een samenstelling heeft rechts daarvan gelegen. Heeft bijv. de oplossing, waarin wij de magnesium-electrode dompelen, de samenstelling x, dan zijn er voor de coëxistentie van Mg, H_2 en electrolyt twee grensmogelijkheden, waartusschen de waarneembare gevallen moeten liggen. Het eene grensgeval in Fig. 2 aangegeven, is dit, dat de waterstof in innerlijk evenwicht coëxisteert, maar dat het magnesium zóó sterk wordt verstoord, dat de potentiaallijn van het magnesium in den stand a_1c_1 komt. In het andere grensgeval, in Fig. 3 geteekend, blijft het Mg in innerlijk evenwicht, maar de waterstof ontwijkt in vormingstoestand, zoodat de potentiaallijn van deze waterstof in den stand b_1c_2 komt. In dit geval zal dus de gemeten potentiaal, behoorende bij het driephasen evenwicht, praktisch gelijk zijn aan de evenwichtspotentiaal van het magnesium [1]).

Wat hier gezegd is voor Mg met een potentiaal van —1.86 V. geldt ook voor Mg met een potentiaal van —1.3 V.

In dit geval is $L_{Mg} = 10^{2 \times -26}$ en dan zou $\frac{(Mg_L^{\cdot\cdot})}{(H_L^{\cdot})^2} = \frac{L_{Mg}}{L_{H_2}} = 10^{2 \times 22}$ zijn, zoodat voor $(Mg_L^{\cdot\cdot}) = 1$, volgt $(H^{\cdot}) = 10^{-22}$ of $(OH') = 10^8$.

Wanneer dus verstoord Mg van een potentiaal van —1.3 V. uit een magnesiumoplossing, waarin $(Mg_L^{\cdot\cdot}) = 1$, waterstof in innerlijk evenwicht ontwikkelde, zou (OH') in de grenslaag 10^8 moeten zijn. Dit is een onmogelijkheid, waaruit volgt, dat de met het magnesium en de grensvloeistof koëxisteerende waterstof niet in innerlijk evenwicht kan wezen, maar sterk uitgesproken in den vormingstoestand moet verkeeren, waardoor L_H veel grooter wordt dan in den innerlijken evenwichtstoestand.

Het voorgaande doet tevens vermoeden, dat magnesium in de grensvloeistof als $Mg(OH)_2$ wordt gepraecipiteerd. Het is nu gemakkelijk aan te toonen, dat zelfs wanneer dit gebeurt, de koëxisteerende waterstof toch in vormingstoestand moet optreden, en dat die vormingstoestand sterker moet zijn, wanneer de grensvloeistof niet meer verzadigd is aan $Mg(OH)_2$.

Het oplosbaarheidsproduct van $Mg(OH)_2$ is van de orde $10^{-10.5}$, welke waarde wij nu voor $(Mg_L^{\cdot\cdot})$ in de grensvloeistof aannemen doet er niets toe, daarom zullen wij hier weer aannemen $(Mg_L^{\cdot\cdot}) = 1$, dan is dus $(OH_L') = 10^{-5.25}$.

[1]) Er moet hier nog opgemerkt worden, dat de samenstelling van de grensvloeistof, bij waterstofontwikkeling, altijd meer naar links zal liggen dan die van de vloeistof daarbuiten.

Nemen wij nu weer de magnesium-electrode waarvoor $L_{Mg} = 10^{2 \times -26}$, dan hebben wij gezien dat $(H^{\cdot}_{L}) = 10^{-22}$ of $(OH'_{L}) = 10^{8}$. Dit is een onmogelijkheid, want de waarde van het oplosbaarheidsproduct van $Mg(OH)_2$ vereischt hier $(OH') = 10^{-5.25}$. Hieruit volgt dus, dat het oplosbaarheidsproduct van de waterstof, zooals deze hier optreedt, sterk afwijkt van de waarde, die deze grootheid bezit, wanneer de waterstof in innerlijk evenwicht verkeert, en wij kunnen nu direct aangeven, hoe groot het oplosbaarheidsproduct van deze waterstof, die in vormingstoestand verkeert, moet wezen.

Het blijkt nl. dat voor L_{H_2} een waarde is gebruikt, die $10^{2 \times 13.25}$ maal te klein is. Voor de hier optredende waterstof is dus $L'_{H_2} = 10^{2 \times -34.75}$ in plaats van $10^{2 \times -48}$. Deze waterstof is dus m.a.w. zooveel onedeler geworden, dat zij electromotorisch naar de omgeving van Zn is verhuisd.

Is de OH-ionenconcentratie in de grensvloeistof kleiner dan $10^{-5.25}$, dan zal in het hier ondersteldc geval geen praecipitatie van $Mg(OH)_2$ plaats grijpen. Onderstellen wij nu eens dat $(OH'_{L}) = 10^{-10}$ dan blijkt dat $L'_{H_2} = 10^{2 \times -30}$ moet zijn en de waterstof dus, wat haar electromotorisch gedrag betreft, komt in de omgeving van Mangaan.

Terugkeerende tot de zooevengenoemde grensgevallen dient opgemerkt te worden, dat de gevallen, in de praktijk waargenomen, natuurlijk tusschen deze twee uitersten zullen inliggen.

Het bijzondere, dat wij hierbij ontmoeten is nu dit, dat een nadering tot de evenwichtspotentiaal van het metaal alleen onmogelijk is, wanneer de waterstof sterker in vormingstoestand optreedt, want uit het voorgaande volgt, dat een toename van het oplosbaarheidsprodukt van den magnesium toestand gepaard zal gaan met een toename van L'_{H_2}, hetgeen bij minder onedele metalen niet noodzakelijk is.

Het is duidelijk, dat het hier besprokene eveneens geldt voor aluminium en wij zullen nu moeten nagaan onder welke omstandigheden wij de potentialen van deze metalen in den meest actieven toestand zullen kunnen meten.

Zooals bekend is leert de theorie der capillariteit, dat de discontinuïteit tusschen een gasphase en een vloeistofphase of tusschen twee vloeistofphasen feitelijk een uiterst steil verloopende continuiteit is. In deze gevallen hebben wij te doen met twee geordende toestanden en daarom treedt een complicatie op, wanneer wij overgaan tot de koëxistentie tusschen een metaal en een electrolyt, daar hier de eene phase geordend is doch de andere ongeordend. Dat echter ook hier in de grenslaag een steile overgang, zij het dan ook met een dis-

continuiteit, plaats heeft, is wel zeker [1]). Hierdoor komen wij tot de conclusie, dat wat de *samenstelling aangaat*, tusschen de koëxisteerende phasen in de grenslaag slechts quantitatieve verschillen zullen optreden.

Nu is het noodig aan te nemen, dat de bestanddeelen, die in de metaalgrenslaag aanwezig zijn en wel in concentraties, afhankelijk van de diepte van de laag, over het algemeen invloed zullen uitoefenen op de snelheid, waarmede het innerlijk metaal-evenwicht zich in de grenslaag instelt.

Zuurstof, salpeterzuur, nitraten, enz. hebben zich als vertragers voor de innerlijke evenwichtsinstellingen in het metaal doen kennen en nu wijst het electromotorisch gedrag van Mg en Al erop, dat het hydroxyd of oxyd van deze metalen eveneens een vertragenden invloed uitoefent.

In een niet aangezuurde oplossing van $MgSO_4$ bevindt zich, door hydrolyse, een zekere hoeveelheid $Mg(OH)_2$ opgelost. Dompelt men in deze oplossing een magnesiumstaaf, dan zal volgens het hierboven genoemde oplossingsverschijnsel naast de andere bestanddeelen ook $Mg(OH)_2$ in het metaaloppervlak oplossen. Dit verhindert niet, dat het oppervlak, hoewel gewijzigd, metaaleigenschappen behoudt; bijv. kwik uit een oplossing praecipiteert, zooals inderdaad het geval is, maar wel kan deze kleine opgeloste hoeveelheid $Mg(OH)_2$ invloed uitoefenen op de snelheid, waarmede het innerlijk evenwicht in het magnesium zich instelt, en deze invloed moet hier een vertragende zijn.

In een niet aangezuurde $MgSO_4$-oplossing, waarin het magnesium bij gewone temperatuur langzaam oplost, onder waterstofontwikkeling, vertoont dit metaal dan ook tengevolge van de verstoring van het innerlijk metaal-evenwicht, een veel te weinig negarieve potentiaal. Voegt men echter zwavelzuur toe, dan gaat de hydrolyse in den electrolyt terug, tengevolge daarvan wordt de metaalgrens armer aan het opgeloste, vertragende $Mg(OH)_2$ en in het metaal zal een omzetting plaats grijpen in de richting van het innerlijk evenwicht, waardoor de potentiaal sterker negatief wordt.

Nu is echter de invloed van toevoeging van zuur tweeërlei. Eenerzijds wordt de concentratie van den negatieven katalysator in het metaal verminderd, doch anderzijds wordt de aantasting van het metaal versneld. Deze aantasting veroorzaakt ook bij een snel metaal toch altijd eenigszins een storing, en zoo is te verwachten, dat in vele gevallen bij verhooging van de zuurconcentratie de potentiaal van het metaal eerst sterker negatief zal worden, dan een maximale negatieve waarde zal bereiken om vervolgens weer eenigszins te dalen.

[1]) Zie Theory of Allotropy, p. 173.

Dit is inderdaad door de Heer DE GRUYTER en mij en ook door den Heer BECK waargenomen.

Tabel XII p. 42 in de verhandeling van BECK[1]) laat ons tevens duidelijk zien, dat het verschil tusschen Mg en waterstofpotentiaal in het geheel niet constant is en dat terwijl de waterstofpotentiaal kleiner negatief wordt, de magnesiumpotentiaal in tegenovergestelde richting verandert. Hiermede is zéér duidelijk aangetoond, dat het magnesium zich in het geheel niet gedraagt als de waterstofelectrode, hetgeen het geval zou zijn, wanneer de magnesiumgrenslaag *niet veranderde* en deze omgeven was door een vloeistoflaagje, dat verzadigd was aan $Mg(OH)_2$. Nu mogen wij echter uit het feit, dat het magnesium zich niet als een waterstofelectrode gedraagt nog niet afleiden, dat de magnesiumelectrode nooit met een grensvloeistof was omgeven, die verzadigd was aan $Mg(OH)_2$. Het is zeer waarschijnlijk, dat dit bij enkele oplossingen met kleine H-ionenconcentratie wel degelijk het geval is, ook wanneer, zooals hier, de vloeistof sterk wordt geroerd. Maar wat met zekerheid uit de proeven van den heer BECK volgt, is dit, dat of de grensvloeistof verzadigd was aan $Mg(OH)_2$ of niet, de toestand van het magnesiumoppervlak veranderde met de H-ionen-concentratie en dat bij vergrooting van deze concentratie het magnesiumoppervlak onedeler werd, hetgeen dus zeggen wil, dat er dan transformaties in dit oppervlak optraden in de richting van het innerlijk evenwicht.

Een ander verschijnsel, dat door den heer BECK is waargenomen maar hier nog niet besproken werd, is het feit, dat de potentiaal van Mg in niet aangezuurde oplossingen van $MgSO_4$ negatiever wordt, wanneer de concentratie van het $MgSO_4$ toeneemt. Tot heden is steeds gevonden, dat een metaal in verdunde oplossing van de overeenkomstige sulfaten en chloriden gemakkelijker te verstoren is dan in een geconcentreerde oplossing van deze zouten. Bij chloriden is dit verschijnsel dikwijls zéér sterk uitgesproken, maar ook bij de sulfaten is het zeer duidelijk en wij hebben dit toegeschreven aan de zeer sterk positief katalyseerende werking van het Cl-ion en aan de minder sterk katalyseerende werking van het SO_4-ion, welke ionen, voor een gering bedrag in de metaalgrens oplossende, daar hun versnellende werking uitoefenen. De metingen van BECK toonen nu aan, dat de invloed van SO_4-ionen op het verstoorde Mg duidelijk waarneembaar is.

Ofschoon de meest negatieve potentiaal van —1.816 V. in bovengenoemde tabel de potentiaal van een actieven magnesiumtoestand

---

[1]) l. c.

is, en de koëxisteerende waterstofphase sterk overspannen geweest moet zijn, toch komt deze potentiaal nog niet met magnesium, in innerlijk evenwicht, overeen, want het is gebleken, dat magnesium, waarin kleine hoeveelheden kwik zijn opgelost, een nog negatievere potentiaal vertoont en dat de meest negatieve waarde reeds bereikt is met een magnesiummengsel, dat 2 at °/₀ Hg bevat.

In verband met het feit, dat door den Heer Beck [1]) gevonden is, dat de magnesiumrijkste verbinding Mg_3Hg is, en dat de electrolyten, die met de verschillende magnesiumamalgamen coëxisteeren, praktisch vrij van kwik zijn, kan de invloed van genoemde kleine hoeveelheden kwik op de potentiaal van de magnesiumelectrode geen andere dan een activeerende zijn, want aan den magnesiumkant moet de E, X fig. een gedaante hebben, als in Fig. 4 is aangegeven,

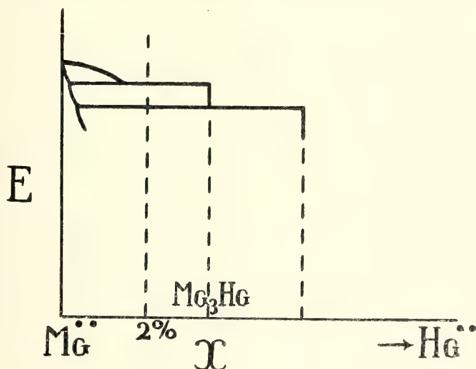


Fig. 4.

en zoo blijkt dus, dat door activeering met kleine hoeveelheden opgelost kwik de innerlijke evenwichtstoestand nog dichter kan worden genaderd. Met kwik geactiveerd Mg vertoonde in een oplossing van 1 gr. mol. per liter de potentiaal —1.856 V.

Ook deze potentiaal zal echter tengevolge van de aantasting, gedurende de meting, nog eenigszins beneden de werkelijke evenwichtspotentiaal liggen, maar waarschijnlijk zal de evenwichtspotentiaal hier toch sterk genaderd zijn [2]).

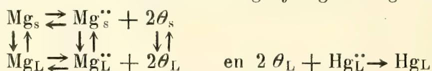
[1]) l. c.

[2]) De werkelijke potentiaal voor Mg, in innerlijk evenwicht, moet dan ook daarom nog iets negatiever zijn, omdat op grond van het type der E,X fig. 4, toevoeging van Hg de pot. van Mg, in innerlijk evenwicht, moet verlagen.

Aan het slot van deze beschouwing, naar aanleiding van het electromotorisch gedrag van magnesium, moet nog een merkwaardig verschijnsel worden besproken, dat reeds even werd aangeroerd.

Wanneer men aan een waterige oplossing van $MgSO_4$ of $MgCl_2$, waarin een Mg electrode is gedompeld, een weinig $HgCl_2$ toevoegt, slaat onmiddellijk kwik, in fijn verdeelden toestand, op de Mg-electrode neer en de magnesiumpotentiaal wordt *minder negatief.*

Zooals uit de onderstaande vergelijkingen volgt:



$$\begin{array}{ccccc} Mg_s & \rightleftarrows & Mg_s^{\cdot\cdot} & + & 2\theta_s \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ Mg_L & \rightleftarrows & Mg_L^{\cdot\cdot} & + & 2\theta_L \end{array} \qquad \text{en } 2\,\theta_L + Hg_L^{\cdot\cdot} \rightarrow Hg_L$$

bewijst het neerslaan van kwik, dat kwikionen de grensvloeistof, die met het magnesium in contact is, zijn binnengedrongen en zich daar met de electronen hebben vereenigd, waardoor het heterogene electronenevenwicht is verbroken en opnieuw electronen en magnesium-ionen in oplossing zijn gegaan.

Verder dient opgemerkt te worden, dat, daar tengevolge van de hydrolyde in de niet aangezuurde koëxisteerende magnesiumzout-oplossing, de magnesium-electrode $Mg(OH)_2$ opgelost bevatte en daardoor zeer traag was, door het snelle in oplossing gaan van electronen en magnesium-ionen, het evenwicht waarschijnlijk nog sterker in de edele richting werd verstoord.

Het hier beschreven experiment is belangrijk, want het leert ons in de eerste plaats, dat het oppervlak van de magnesium-electrode in een niet aangezuurde oplossing van $MgSO_4$, niettegenstaande de aanmerkelijke verstoring en zijn gehalte aan de bestanddeelen, uit de koëxisteerende vloeistof opgenomen, zijn metaaleigenschappen heeft behouden! Toch zijn die metaaleigenschappen, zooals ook te verwachten was, sterk gewijzigd, want het experiment toont immers tevens aan, dat het afgescheiden kwik *niet* bewerkt, dat het magnesium oogenblikkelijk wordt geactiveerd.

Bij oppervlakkig onderzoek zou men hieruit tot de conclusie kunnen worden gebracht, dat het afgescheiden kwik thans niet in het magnesium oplost, doch wanneer men de genoemde met fijn verdeeld kwik bedekte magnesium-electrode uit de $HgCl_2$ bevattende $MgSO_4$-oplossing neemt, haar snel met gedestilleerd water afwascht, en haar dan onmiddellijk in de zuivere $MgSO_4$-oplossing overplaatst, dan vertoont deze electrode wel aanvankelijk een minder negatieve potentiaal, doch zij wordt meer en meer negatief en verkrijgt na enkele minuten een waarde die sterker negatief is dan de potentiaal, die werd waargenomen, vóórdat aan de $MgSO_4$-oplossing $HgCl_2$ was toegevoegd.

Oplossing	Pot. Mg. t. o. v. 1 N. Cal. electrode
0.1 gr. mol. $MgSO_4$ p. L.	— 1.902
150 cc. „ + 5 cc. verzad. $HgCl_2$ oplossing	— 1.740 V
Mg electrode afgespoeld en overgebracht in de zuivere $MgSO_4$ pl.	
0.1 gr. mol. $MgSO_4$ p. L.	— 1.898 V
	— 1.956 V (na 5 min.)

Het hier vermelde electromotorisch gedrag van magnesium toont dus aan, dat de sterk verstoorde Mg-electrode, wel in zeer geringe mate, maar toch merkbaar, kwik oplost. Daar waar de electrische potentiaal van het magnesium door verstoring zoo verandert, behoeft het ons in het geheel niet te verwonderen, dat ook nog andere eigenschappen worden gewijzigd, zooals bijv. het opnemen van kwik.

De verklaring van de resultaten in het laatste tabelletje voorkomend, ligt nu voor de hand. De activeerende werking door de kleine hoeveelheid opgelost kwik uitgeoefend, was niet bij machte den vertragenden invloed van het opgeloste $Mg(CH)_2$ zoodanig te verminderen, dat de electrode ongevoelig werd voor de verstorende werking der aantasting, door water en $HgCl_2$ veroorzaakt. Bij overbrenging in de oplossing van zuiver $MgSO_4$ was de verstoring, door deze laatste stof uitgeoefend, echter verdwenen en kon de activeerende werking van de geringe opgeloste hoeveelheid Hg tot uiting komen.

Nu zou men kunnen zeggen, dat daar zich bij gemelde proef aan het oppervlak van de Mg-electrode onsamenhangend vast $Mg(OH)_2$ afscheidt, daardoor het contact tusschen het afgescheiden kwik en het Mg misschien wordt verminderd. Hierop kan echter worden geantwoord, dat het contact met den electrolyt zoo goed is, dat het kwik uit de oplossing over het geheele metaaloppervlak in fijn verdeelden toestand wordt neergeslagen, terwijl zich waterstof ontwikkelt, en daar waar kwik wordt *neergeslagen* is ongetwijfeld ook contact met kwik.

Het is echter volkomen duidelijk, dat wil men magnesium door amalgamatie in den meest actieven vorm overvoeren het gewenscht is, van te voren de metaal-grenslaag arm aan het daarin opgelost vertragende $Mg(OH)_2$ te maken, door het te dompelen in een zure oplossing en daarna Hg(Cl) toe te voegen.

Heeft men het metaal op deze wijze geactiveerd, dan is er meer kwik in opgelost en blijft zelfs in 1-N . KOH oplossing actief terwijl

het dan, overeenkomstig de zéér geringe Mg ionen concentratie de zeer negatieve potentiaal van —1.970 V. tov. de H_2-electrode vertoont. In een $MgSO_4$-oplossing 1 gr. mol per Liter bedroeg de meest negatieve potentiaal van geamalgameerd Mg —1.85 V. tov. H_2-electrode.

De hier beschreven amalgamatie-proeven zijn bij aluminium veel uitvoeriger nagegaan en hebben eigenlijk eerst den juisten kijk op het electromotorisch gedrag, niet alleen van aluminium, maar ook van magnesium, gegeven.

In de volgende mededeeling, handelende over aluminium, zullen deze onderzoekingen worden besproken.

Amsterdam, Febr. 1923.

Laboratorium voor algemeen en anorganische Chemie der Universiteit.

Palaeontologie. — O. POSTHUMUS: *„Bijdragen tot de kennis der Palaeontologie van Nederland. II. Over de Fauna der Phosphaatlagen in Twente (Beneden-Oligoceen).”*

(Aangeboden door de Heeren J. F. VAN BEMMELEN en J. C. SCHOUTE).

In een collectie fossielen, afkomstig uit de phosphaatknollen bevattende lagen van de vindplaatsen Ootmarsum en Rossum (tusschen Oldenzaal en Denekamp), trof ik de volgende vormen aan:

Coeloma balticum SCHLÜTER, Zeitschrift der deutschen Geol. Ges., Bd. 31, 1879, p. 604, Pl. XVIII; een exemplaar.

Myliobates toliapicus L. AGASSIZ, Recherches sur des Poissons fossiles, vol. 3, 1843, p. 321, tab. 47, fig. 15—20; losse tandplaten.

Carcharodon angustidens L. AGASSIZ, Recherches etc., vol. 3, 1843, p. 255, tab. fig. 20—25, tab. 30, fig. 3; tanden.

Notidanus primigenius L. AGASSIZ, Recherches etc., vol. 3, 1843, p. 218, tab. 27, fig. 4—8, 13—17; tanden.

Oxyrhina Desori (L. AGASSIZ) SISMONDA, Memoria della Reale Accademia delle Science de Torino, 2e serie, t. X, 1849, p. 44, tabel. II, fig. 7—16; tanden.

Oxyrhina Desori L. SISMONDA mut. flandrica, M. LERICHE, Mémoires du Musée Royal d'histoire naturelle de Belgique, T. 5, p. 280, fig. 87; wervels.

Odontaspis cuspidata L. AGASSIZ, Recherches etc., vol. 3, 1843, p. 294, tab. 37, fig. 43—49; tanden.

Otodus obliquus L. AGASSIZ, Recherches etc., vol. 3, 1843, p. 267, tab. 31, tab. 36, fig. 22—27; tanden.

Lamna spec., wervels.

Phyllodus polyodus L. AGASSIZ, Recherches etc., vol. 2, 1843, p. 240, tab. 69a, fig. 6, 7;

en bovendien eenige stukken been, vermoedelijk van Cetacea.

De plaats der phosphaatlagen in het profiel is als volgt: [1]) „Beneden de Midden-Oligoceene Septarienklei liggen . . . . . bleekgroene, zeer fijne glauconietzanden, die wellicht als Onder-Oligoceen zijn op te vatten, waarschijnlijk echter tot het Midden-Oligoceen behooren. Aan de basis dezer zanden treedt een zeer kenmerkend conglomeraatlaagje op van afgerolde phosphorietknollen en haaietanden, dat men bijv. in de eoceengroeven aan den Zuidvoet van den Lonnekerberg, in den omtrek van het dorp Rossum tusschen Oldenzaal en Denekamp en in de heuvels ten N. van Ootmarsum kan vinden”. De

[1]) Eindverslag van de Rijksopsporing van Delfstoffen. Amsterdam, 1918, p. 114.

phosphaatlagen zijn dus van Beneden-Oligoceenen ouderdom, althans gevormd in den aanvang der Oligoceene transgressie.

Voor vergelijking met gelijksoortige vormingen komen dus in de eerste plaats de Oligoceene phosphaatlagen in de Noordduitsche laagvlakte in aanmerking, waarvan die te Helmstedt ons door de onderzoekingen van VON KOENEN en H. B. GEINITZ [1]) zijn bekend geworden. Het blijkt, dat alle in Twente aangetroffen vormen, behalve Oxyrhina Desori, bij laatstgenoemde plaats worden gevonden, waaruit de gelijkwaardigheid der beide afzettingen blijkt.

Dit geeft mij aanleiding over de vorming der phosphaatknollen eenige opmerkingen te maken. Door de meeste auteurs is verondersteld, dat de min of meer afgeronde vorm dezer lichamen door afrolling zou zijn ontstaan, een meening, die, blijkens de geciteerde zinnen uit het Eindverslag, nog in den laatsten tijd wordt gehuldigd. Hiertegen is aan te voeren, dat de vorm der knollen in vele gevallen niet afgerond is, maar min of meer onregelmatig, ja zelfs dikwijls, zooals reeds STARING [2]) opmerkt, uit een paar, of uit meer ronde knollen schijnt te zijn samengesteld. Vaak zijn de haaietanden gedeeltelijk in een ongeveer ronden phosphaatknol ingesloten, het uitstekende gedeelte is echter in het geheel niet afgeslepen, wat met de vermoedelijke ontstaanswijze niet in overeenstemming te brengen is. H. B. GEINITZ nam aan, dat de afrolling der knollen in het Jong-Tertiair zou hebben plaats gevonden; hij grondde deze meening op de aanwezigheid in de door hem onderzochte lagen van Myliobates en van Lamna cuspidata, die toen slechts in het Plioceen waren aangetroffen. Dit laatste nu kan in de Overijselsche phosphaatlagen, waar deze resten eveneens worden aangetroffen, niet het geval zijn, want de jongere lagen van het Oligoceen zijn hier ook aanwezig. Het palaeontologisch argument voor het ontstaan van den afgeronden vorm door afrolling is hier niet houdbaar. We moeten wel aannemen, dat na de vorming der phosphaatconcreties de ligging der lagen onveranderd gebleven is; een meening, die op andere gronden reeds door Dr. W. P. A. JONKER [3]) verdedigd is.

Tenslotte betuig ik mijn hartelijken dank aan den heer J. BERNINK, directeur van het Museum „Natura Docet" te Denekamp, die mij het door hem verzamelde materiaal welwillend ter beschikking stelde.

[1]) H. B. GEINITZ, Die sogenannten Koproliethenlager von Helmstedt, Büddenstedt und Schleweke bei Harzburg. Abhandlungen der Naturwiss. Geselschaft „Isis" in Dresden. 1883, p. 3—14.

H. B. GEINITZ, Ueber neue Funde in den Phosphatlagern von Helmstedt, Büddenstedt und Schleweke. Isis, 1883, p. 37—46.

[2]) W. H. C. STARING, De bodem van Nederland. 2e deel. Haarlem, 1860, p. 195.

[3]) W. P. A. JONKER, Het ontstaan van phosphorieten. Handelingen van het 17e Natuur- en Geneeskundig Congres, 1920, p. 94—96.

Physiologie. — W. F. EINTHOVEN: „*De snaargalvanometer ten dienste der radiotelegrafie.*"

(Medegedeeld en aangeboden door Prof. W. EINTHOVEN).

Zooals bekend is bestaat de snaargalvanometer uit een electrisch geleidenden draad, die als een snaar in een sterk magnetisch veld is uitgespannen. Een stroom, die door de snaar wordt gezonden, doet haar uitwijken in een vlak, dat loodrecht op de magnetische krachtlijnen staat. De uitwijking kan bij sterke vergrooting waargenomen en gefotografeerd worden.

Men heeft sinds lang pogingen gedaan om dit instrument bij de ontvangst van draadlooze seinen te gebruiken, maar heeft daarbij steeds de in den handel aanwezige modellen beproefd, waarin een betrekkelijk lange snaar niet sterk was gespannen, zoodat zij een groote gevoeligheid voor constante stroomen vertoonde. De draadlooze seinen werden daarbij zoo opgevangen, dat de frequente wisselstroomen met behulp van een der tot dit doel gebruikelijke inrichtingen gelijk werden gericht. De gelijk gerichte stroomstooten werden dan door de snaar gezonden, die daarvan een soortgelijke uitwerking als van een werkelijken gelijkstroom ondervond.

Maar op deze wijze heeft de snaargalvanometer in het draadlooze verkeer slechts teleurstelling opgeleverd, daar hij op iederen stroom van eenigen duur met dezelfde gevoeligheid reageerde en reeds de geringste luchtstoringen hinderlijk werden ondervonden. Eenige groote maatschappijen, die den snaargalvanometer op haar transatlantisch verkeer hebben beproefd, hebben het verdere werk ermede opgegeven.

De hier nader te beschrijven toepassing van het instrument berust op de aanwending van een geheel andere methode. De aankomende wisselstroomen worden niet gelijk gericht maar als zoodanig door de snaar gevoerd. Deze is kort, en zóó strak gespannen, dat haar eigen periode overeenkomt met de periode der aethertrillingen, zooals die bij draadlooze seinen worden toegepast. Door de lengte der snaar doelmatig te kiezen en haar spanning te regelen kan zij in resonnantie gebracht worden met nagenoeg elke practisch voorkomende ongedempte zendgolf. Heeft deze bijvoorbeeld een golflengte van 1 kilometer, overeenkomende met een trillingsgetal van 300.000 per sec., dan wordt het eigen trillingsgetal der snaar eveneens op 300.000 per sec. gebracht.

De snaarlengte, die voor golven van bijvoorbeeld 10 kilometer ongeveer 10 m.M. mag bedragen, is voor kortere golven van bijv. 1 kilometer slechts 1 millimeter. Wij hebben ook wel met kortere

snaren gewerkt, die een nog hooger trillingsgetal bezaten. Voor zoover ons bekend is, heeft men tot nog toe nimmer aan eenig mechanisme deze groote frequenties kunnen mededeelen.

De snaar, waarvoor wij een dunnen door kathode-verstuiving geleidend gemaakten kwartsdraad gebruiken, bevindt zich tusschen 2 mikroskopen, waarvan het eene tot verlichting, het andere tot projectie dient, en die beide, wil men de beeldvorming doelmatig doen geschieden,

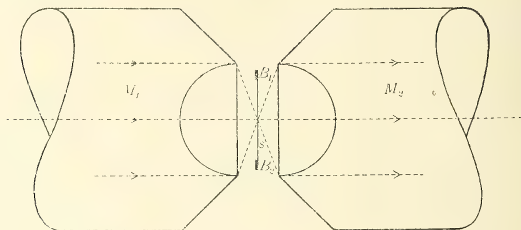


Fig. 1.

Schematische teekening van de snaar s tusschen de beide mikroskopen M_1 en M_2.

B_1 en B_2 bevestigingsbanden voor de snaar. De gang der lichtstralen is door gestippelde lijnen en pijlen aangegeven.

elkaar dicht moeten naderen. De objectieven, die een numerische apertuur van 0.95 hebben, zijn niet verder dan 0.2 mM. van de snaar verwijderd. Daar de frontlens van een dergelijk objectief een diameter heeft, die grooter is dan de snaarlengte, doet zich de vraag voor, hoe de snaar moet worden bevestigd, om te maken, dat de bevestigingsplaatsen den gang der lichtstralen niet belemmeren, zoodat de volle apertuur der objectieven nuttig kan worden gebruikt.

De moeilijkheid is opgelost door de snaar met haar uiteinden aan twee fijne metalen banden te soldeeren, die loodrecht op de snaar in het optische vlak aan de spaninrichting zijn bevestigd, zie fig. 1.

Het is van groote beteekenis, dat de snaar zoo vrij mogelijk trilt. Daartoe moet zij niet alleen dun maar evenals een piano- of vioolsnaar ook strak gespannen zijn. Haar geringe massa per lengte-eenheid maakt, dat zij een sterke luchtdemping ondervindt, die evenwel moet worden vermeden. Daartoe wordt de ruimte, waarin zij zich bevindt, luchtledig gepompt, en om het vacuum doeltreffend te maken, moet het tot zeer hoog worden opgevoerd. Wij bereikten wel een vacuum van 1μ Hg en hooger en konden constateeren, dat daarbij de luchtdemping practisch geen invloed meer op de snaar-

beweging heeft. De uittrillingstijd der snaar wordt door vacua, die nog hooger dan 1μ zijn, niet meer verlengd, daar de eigen wrijving in de snaar zelf of met andere woorden het niet volkomen elastisch zijn der snaar een oorzaak voor demping vormt.

Men verwachte niet, dat een door een metaallaag geleidend gemaakte kwartssnaar even fraai zou uittrillen als een tot trilling gebrachte, aan één einde bevestigde zuivere kwartsstaaf. Uit proeven van HABER u. KERSCHBAUM [1]) is gebleken, dat bij deze laatste in een vacuum van 0,01 μ Hg meer dan 12 minuten moeten verstrijken, voordat de amplitude van haar trillingen tot de helft wordt verminderd. LANGMUIR [2]) slaagde er in, de drukking in een gloeilamp zóó zeer te verlagen, dat de halveeringstijd der amplitude tot bijna 2 volle uren werd opgevoerd.

Maar kan de uittrillingstijd onzer snaar niet even gunstig worden gemaakt, voor ons doel is hij toch volkomen bevredigend. Wij konden bijv. bij een snaar, die 40.000 trillingen per sec. volbrengt, constateeren, dat zij zonder opzettelijk aangebrachte demping een tijd $\tau = 0.65$ sec. noodig heeft, om haar amplitude te verminderen in de verhouding van $1 : \frac{1}{e}$, waaruit kan worden berekend, dat het logarithmisch decrement der beweging 4×10^{-5} bedraagt, zie fig. 2.



Fig. 2.
Vrij uittrillende snaar. $\lambda = 7{,}5$ km, $\tau = 0{,}65$ sec., $\delta = 4 \times 10^{-5}$.

Dit decrement is van de grootste beteekenis voor het doel, dat met het instrument wordt beoogd, want hoe kleiner het is, des te beter is de selectiviteit. Is de snaar op een bepaalde golf afgestemd, dan zal zij des te minder reageeren op luchtstoringen en op stroomen van andere golflengte, die door vreemde zendstations worden uitgezonden, al naarmate haar decrement gunstiger is. Men kan wel zeggen, dat de grootte van het decrement de deugdelijkheid van een ontvanginrichting — althans in principe — bepaalt.

Ter vergelijking vermelden wij, dat de kleinst bereikbare decrementen in een electrischen kring niet veel kleiner dan 0,01 zijn en men praktisch meestal wel boven dit bedrag blijft. Ook de decrementen van alle ons bekende ontvanginrichtingen, die de seinen mechanisch registreeren, zijn grooter dan dat van den snaargalvanometer.

[1]) Zeitschr. f. Elektrochemie. Bd. 20, 1914, p. 296.
[2]) Journal of the American Chem. Soc. 35, 107 (1913) geciteerd naar HABER u. KERSCHBAUM.

Het volle nut van een klein decrement kan evenwel alleen dan worden getrokken, wanneer overmatig langzaam wordt geseind. Seinen, die met een gebruikelijke snelheid worden afgezonden, zouden bij een zoo langen uittrillingstijd der snaar in elkaar vloeien.

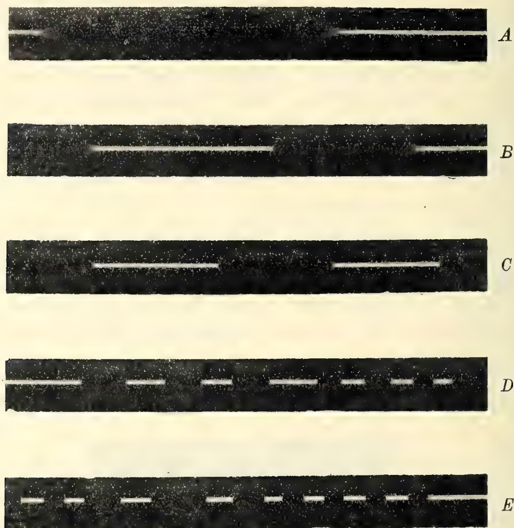


Fig. 3.

A. Veldstroom = 0,5 Amp., $\tau = 0{,}27$ sec., $\delta = 9{,}25 \times 10^{-5}$.
B. Veldstroom = 1 Amp.. $\tau = 0{,}1$ sec., $\delta = 0{,}25 \times 10^{-3}$.
C. Veldstroom = 2 Amp., $\tau = 0{,}03$ sec., $\delta = 0{,}83 \times 10^{-3}$.
D. Veldstroom = 4 Amp., $\delta = 3 \times 10^{-3}$.
E. Veldstroom = 6 Amp., $\delta = 6{,}2 \times 10^{-3}$.

Daarom is het noodzakelijk om ten behoeve van deze het decrement der ontvanginrichting opzettelijk te vergrooten. Dit geschiedt niet door lucht bij de snaar toe te laten. Integendeel wordt het vacuum bij alle proeven steeds zoo hoog mogelijk gehouden, maar de veldsterkte wordt gewijzigd. Door deze grootheid van 0 tot een maximum te varieeren kan men op even eenvoudige als nauwkeurige wijze de grootte van het decrement regelen.

In de bovenstaande figuur zijn opnemingen gereproduceerd van dezelfde snaar als die van fig. 2 bij dezelfde bewegingssnelheid der papierstrook; deze bedroeg 10.75 mM. per sec. Een constante golf

van 7,5 km. werd telkens in- en uitgeschakeld, terwijl in de opvolgende photo's de bekrachtigingsstroom van den veldmagneet van 0,5 tot 6 Amp. werd verhoogd. Men ziet, hoe de uittrillingstijd der snaar bij sterker bekrachtigingsstroom afneemt. De decrementen kunnen wegens de langzame beweging der papierstrook alleen in de photo's *A*, *B* en *C* gemeten worden, voor *D* en *E* zijn zij uit de veldsterkten, die daarbij 7600 resp. 10.900 Gauss bereikten, berekend.

Daarbij is, — zooals bij de berekening van wel alle practisch bruikbare decrementen toelaatbaar is — het eigen, door inwendige wrijving veroorzaakte decrement der snaar verwaarloosd, terwijl in een hoog vacuum ook de luchtdemping niet in aanmerking komt. Onder deze omstandigheden wordt de betrekking tusschen het decrement en de veldsterkte uitgedrukt door de formule

$$\delta = \frac{4}{\pi_2} \cdot \frac{H^2 \times 10^{-9}}{m\,w\,N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierin beteekenen :

δ het logarithmisch decrement.
H de veldsterkte in Gauss.
m de massa der snaar in grammen per centim.
w den weerstand der snaar in Ohms per centim,
N het aantal perioden per sec. der in resonnantie trillende snaar.

Bij de opneming van een sein regelt men het decrement zóó, dat de teekens nog juist niet in elkaar vloeien, zooals in de onderstaande reproductie wordt verduidelijkt. Hoe sneller de teekens op elkaar

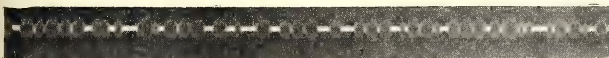


Fig. 4.
Opneming te Leiden van een Italiaansch station. Het snaardecrement is zoo geregeld, dat de teekens bijna in elkaar vloeien.

volgen, hoe grooter de veldsterkte en daarmede dus ook het decrement moet worden gemaakt. Het maximum van de neembare snelheid wordt bij het maximum der veldsterkte, in een onzer beide toestellen 22.600 Gauss, bereikt en bedraagt ongeveer 600 woorden per minuut.

Beschikt men over voldoend sterke seinen, dan zou de toelaatbare seinsnelheid nog kunnen worden verhoogd door lucht bij de snaar toe te laten.

Een van de moeilijkheden, die bij de constructie van het instrument moesten worden overwonnen, was de regeling van de snaar-

spanning. Deze moet buitengewoon fijn kunnen worden tot stand gebracht. Wij spannen de snaar door haar te rekken. Ten behoeve van de vorige figuren werd een snaar gebruikt van 6 mm. lengte, die zoodanig was gespannen, dat zij op een golf van 7,5 km. resonneerde. Neem eens aan, dat zij daarbij 1 °/₀ is gerekt en dus met 60 μ is verlengd.

Bij een bekrachtigingsstroom van 1 Amp. bedraagt het snaardecrement 0.25×10^{-3}. Hieruit kan worden berekend, dat bij een toeneming der rekking van 8×10^{-5} van het oorspronkelijke bedrag, dus in absolute maat met een bedrag van 4,8 $\mu\mu$, reeds een ontstemming intreedt, die de amplitude der trilling van 1 tot $\frac{1}{\sqrt{2}}$ terugbrengt. Deze zelfde vermindering, zijnde 30 °/₀ der amplitude, wordt teweeggebracht door een verkorting of verlenging met 4×10^{-5} van de golflengte van het sein, dus met 30 cm. op de 7.5 km. of anders uitgedrukt met een verandering in het trillingsgetal van 1,6 op de 40.000.

Bij de berekening is gebruik gemaakt van de formule

$$\frac{\lambda_r - \lambda_1}{\lambda_r} = \frac{\delta}{2\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

waarin λ_r de golflengte beteekent bij resonnantie van het sein en een daarmede gekoppelden kring en λ_1 die golflengte van het sein voorstelt, waarbij het stroomeffect van den kring tot de helft wordt teruggebracht. De snaar komt hier in de plaats van den gekoppelden kring, de amplituden harer beweging in de plaats van de kwadraten der stroomeffecten.

Het behoeft geen betoog, dat veel kleinere veranderingen in de amplitude meetbaar zijn dan de waarde, die hierboven gemakshalve als voorbeeld is genoemd. De spaninrichting moet het mogelijk maken, dat de snaar — binnen zekere grenzen — met een opklimming van onderdeelen van 1$\mu\mu$ volkomen regelmatig wordt gerekt. In de beide door ons geconstrueerde modellen voldoet zij aan dezen eisch.

De proeven, die met den galvanometer genomen zijn, hebben eenige verschijnselen der snaarbeweging aan het licht gebracht, die men tot nog toe niet heeft kunnen waarnemen, daar men nog nimmer over een trillende snaar met zoo gering decrement heeft kunnen beschikken. Neem eens aan, dat een viool- of pianosnaar een even langen uittrillingstijd als de galvanometersnaar heeft, bijv. ongeveer 2 of 3 sec., en dat zij 100 $\times$ minder trillingen per sec. volbrengt, dan is haar decrement ook 100-maal grooter naar de formule

$$\delta = \frac{1}{N\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin δ en N dezelfde beteekenis hebben als in formule (1) p. 373, terwijl τ den tijd in seconden weergeeft, die benoodigd is, om de amplitude der trilling te laten verminderen in de verhouding van 1 tot $\frac{1}{e}$. Als uittrillingstijd mag 3 of 5-maal de waarde van τ in rekening worden gebracht.

De snaar uit het muziekinstrument trilt dus zooveel minder vrij, kan minder scherp worden afgestemd, hetgeen voor haar doel ook onnoodig is, daar het menschelijk oor toch niet in staat is, zoo fijne variaties in toonshoogte waar te nemen. De vermeerdering, die de spanning der vioolsnaar ondervindt, wanneer zij zich van haar middenstand naar een der beide uiterste standen verplaatst, komt — althans bij matige amplituden — niet in aanmerking. Alle theorieën en berekeningen, die omtrent de frequentie van snaartrillingen zijn gemaakt, gaan uit van de veronderstelling, dat de snaarspanning in de verschillende phasen van haar trilling constant blijft [1]).

Maar met de snaar van den galvanometer is het anders gesteld. Een kleine amplitude, bijv. ten bedrage van 1 pro mille van de snaarlengte, kan onder bepaalde omstandigheden reeds voldoende zijn om den invloed van de spanningsvermeerdering, die de snaar door haar uitslag ondervindt, zichtbaar te maken. Op deze verschijnselen, die wij met het woord „sprongpunt" willen aanduiden, hopen wij bij een latere gelegenheid nog terug te komen. Hier zij slechts vermeld, dat de daardoor veroorzaakte bezwaren tot een minimum worden beperkt en practisch overwonnen, wanneer men de snaar, die met een gegeven golf moet resonneeren, zoo lang mogelijk neemt en haar tot een maximum rekt.

In fig. 5 wordt een te Leiden gedane opneming gereproduceerd, die voor ons Nederlanders een bijzonder belang heeft, nl. van den machinezender op den Malabar te Bandoeng. Om het telegramgeheim niet te schenden, zijn slechts eenige losse woorden en cijfers weergegeven, en wel zóó, dat niemand in staat is er een zin uit op te bouwen. Ofschoon met een kleine, voor het doel niet gunstige antenne werd ontvangen, konden wij meermalen lange telegrammen opnemen, waarvan de teekens volmaakt zuiver overkwamen.

In hoeverre kan de ontvangst met den galvanometer de vergelijking doorstaan met de ontvangst per telefoon?

Ter beantwoording dezer vraag vergelijken wij eerst de gevoelig-

---

[1]) Zie bijv. RAYLEIGH. The theory of sound, London 1877. Vol. 1, p. 36 en 128.

heden van beide instrumenten met elkaar. Het menschelijk oor is een zeer gevoelig zintuig. Volgens MAX WIEN [1]) is het voldoende,

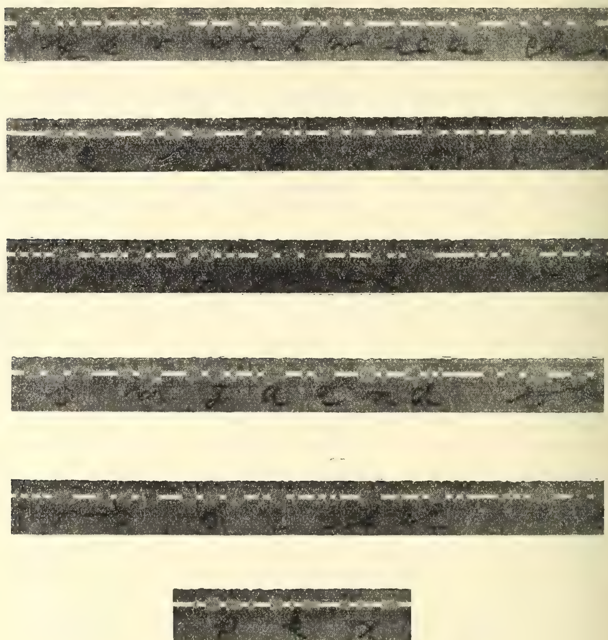


Fig. 5.
Opneming te Leiden van den machinezender op den Malabar te Bandoeng, 13 Januari 1923.

om per sec. aan het trommelvlies een energie van $0{,}83 \times 10^{-12}$ erg aan te brengen, overeenkomende met een stroomeffect van $0{,}83 \times 10^{-19}$ Watt, om een geluidsgewaarwording te doen ontstaan. De amplitude der luchtgolven is daarbij nog duizendmaal kleiner dan de diameter van een molecule. Dienovereenkomstig is de telefoon ook in staat om op zeer zwakke stroomen hoorbaar te reageeren. Vooral de moderne telefonen, die afgestemd zijn op een trillingsgetal, dat voor de waarneming met het menschelijk oor het gunstigst is, en die thans veelvuldig bij de draadlooze telegrafie in

[1]) MAX WIEN. Ueber die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe. PLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 97, S. 1.

gebruik zijn, moeten onder de gevoeligste van alle bestaande instrumenten worden gerangschikt.

Max Wien [1]) geeft aan, dat voor de gevoeligste telefoon in de gunstigst denkbare omstandigheden een stroomeffect van $3{,}03 \times 10^{-14}$ Watt benoodigd is, om een nog even waarneembaar geluid voort te brengen. Austin [2]) vermeldt een nog 60 × geringere waarde, $0{,}5 \times 10^{-15}$ Watt.

Om de gevoeligheid van den galvanometer te berekenen, gaan wij uit van de veronderstelling, dat gedurende de ontvangst van een sein een stationnaire effectieve electromotorische kracht E aan de uiteinden der snaar wordt aangebracht. In het eerste oogenblik, wanneer de snaar nog stil staat, zal zij met een maximalen stroom $I = \frac{E}{W}$ doorstroomd worden, waarin W den Ohmschen weerstand der snaar beteekent, maar geleidelijk zal door de tegen-electromotorische kracht, die de snaar bij haar beweging ontwikkelt, de stroomsterkte verminderen. Verwaarloozen wij de inwendige wrijving der snaar zelf en maken wij het vacuum zoo hoog, dat het practisch als absoluut mag worden beschouwd, dan zal, als de eindamplitude bereikt is, de ontwikkelde tegen-electromotorische kracht gelijk aan E zijn geworden. De stroomsterkte door de snaar is dan $= 0$. Zij blijft, zoolang het sein duurt, in resonnantie daarmede doortrillen zonder energie te verbruiken.

Als grondslag voor de berekening der gevoeligheid moet het maximum aantal Watts worden genomen, dat op een gegeven oogenblik noodig is, zijnde $\frac{E^2}{W}$. Heeft de snaar een massa M gram, resonneert zij op N perioden per sec., en is haar electromagnetisch decrement δ_{em}, dan is het benoodigd aantal Watts B om haar een eindamplitude U centim. mede te deelen

$$B = \frac{\pi^2}{2} \times 10^{-7} \times M\, U^2\, N^3\, \delta_{em} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

of ook

$$B = \frac{4500\, \pi^2\, M U^2}{\lambda^3\, \tau}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

waarin λ de golflengte in kilometers voorstelt en τ den tijd in seconden, die benoodigd is om de amplitude der snaarbeweging van 0 op te voeren tot $1 - \frac{1}{e}$ van haar eindbedrag. De toelaatbare seinsnelheid is omgekeerd evenredig aan τ.

[1]) Wiedemann's Annalen 4. IV, 1901, p. 450.

[2]) Jahrbuch der drahtl. Telegr. 11 en 12, 1916.

Het is niet moeilijk om nauwkeurig de geringe energie te berekenen, die noodig is, om de snaar met haar eindamplitude in trilling te houden. Want de som der grootheden, die wij boven hebben verwaarloosd, kan door een decrementsmeting van de vrij uittrillende snaar worden bepaald.

Noem dit decrement δ_{l+s}, dan is de gezochte waarde

$$B_1 = \frac{\pi^2}{2} \times 10^{-7} \times MU^2N^3 \delta_{l+s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

of ook

$$B_1 = B \times \frac{\delta_{l+s}}{\delta_{em}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij δ_{l+s} weder klein wordt verondersteld ten opzichte van δ_{em}, zooals bij een goede snaar, een matig veld en een bereikbaar vacuum trouwens steeds het geval is. In de omstandigheden, waaronder de figuren 2 en 3 zijn genomen, is $\delta_{l+s} = 4 \times 10^{-5}$, terwijl δ_{em} bij een bekrachtigingsstroom van 4 Amp. een 75 $\times$ grooter bedrag nl. 3×10^{-3} bereikt en dus $B_1 = 0{,}0133\, B$.

Welke waarde wordt met behulp van form. (4) voor B berekend? De uitkomst hangt af van de afmetingen, in 't bijzonder van den diameter der snaar, die in den galvanometer is uitgespannen.

Nemen wij een dunne snaar [1]) met een diameter van 0,2 μ, dan zal een trillingsamplitude van dezelfde afmeting reeds zichtbaar en registreerbaar zijn. Wij hebben dan $U = 2 \times 10^{-5}$ cm. De massa eener 1 centimer lange snaar van den genoemden diameter mag op $M = 2 \times 10^{-9}$ gram worden gesteld. Stel verder N op 20.000 en δ_{em} op 0,001, dan vinden wij voor het benoodigd aantal Watts $B = 3{,}2 \times 10^{-15}$, waaruit wij besluiten, dat de gevoeligheid van den galvanometer tot dezelfde orde van grootte kan worden opgevoerd als die der telefoon.

Het gebruik van zoo dunne snaren gaat met eenige practische bezwaren gepaard, zoodat wij er de voorkeur aan geven om met snaren te werken, die 5 tot 6-maal dikker en dus belangrijk minder gevoelig zijn. Bovendien vermindert de gevoeligheid nog, als de golflengte kleiner en de seinsnelheid grooter worden genomen, zooals uit form (5) kan worden afgelezen.

Met het oog op de vergelijking tusschen snaar en telefoon moet evenwel worden vermeld, dat dit laatste instrument in geen geval met de berekende maximum gevoeligheid praktisch kan worden gebruikt. Er is een groot verschil tusschen de intensiteiten van een nog juist even hoorbaar en een neembaar sein.

Voor de praktische toepassing van den snaargalvanometer in de

[1]) Vergel. W. Einthoven, Ueber die Beobachtung und Abbildung dünner Fäden. Pflüger's Archiv. f. d. ges. Physiol. Bd. 191, S. 60.

draadlooze telegrafie is het overbodig om naar de grootst mogelijke gevoeligheid van het instrument te streven. Het is niet de gevoeligheid, die zijn bruikbaarheid bepaalt, daar men, met behulp van electronenbuizen, in staat is zwakke seinen naar willekeur te versterken. De bruikbaarheid van een ontvanginrichting wordt veel meer bepaald door haar selectief vermogen of storingsvrijheid.

Om met het oog op deze laatste eigenschap de ontvangst per galvanometer te vergelijken met die per telefoon, moeten wij weder de eigenaardigheden van het menschelijk oor en de geluidsgewaarwording ter sprake brengen. Zooals bekend is, zijn wij in staat om een aantal geluiden, die tegelijkertijd worden voortgebracht, met ons gehoor van elkaar te onderscheiden. Wijdt men aan een der vele instrumenten van een vol orchest zijn bijzondere aandacht, dan kan men de klanken, die het voortbrengt, afzonderlijk volgen. Zoo kan ook de Marconist den toon van een sein nog onderscheiden, niettegenstaande hem vele andere geluiden, wanneer die bijv. door vreemde stations of door luchtstoringen worden overgebracht, tegelijkertijd bereiken. Dit geeft aan de telefoon-ontvangst een onschatbaar voordeel boven elke ontvangst, die op de registratie van het sein berust. In het graphische beeld van een concert van geluiden kan men den toon, dien men wenscht te kennen, uiterst moeilijk of in 't geheel niet volgen.

Maar tegenover dit nadeel van den galvanometer staat het voordeel van een veel kleiner decrement, en de vraag doet zich voor, in hoeverre bij de practische toepassing voordeel en nadeel tegen elkaar opwegen.

Het antwoord hangt af van de mogelijkheid om bij de ontvangst van een sein het volle nut uit het geringe snaardecrement te trekken. Trachten wij bijv. te Leiden de seinen op te vangen van den tegenwoordigen machine-zender te Bandoeng. Deze houdt zijn golf van 7,5 km niet volkomen constant, en laat de golflengte schommelen met bedragen, die naar onze metingen 1 tot 2 pro mille bereiken. Maakt men — door vermindering der veldsterkte — het decrement der snaar zoo klein, als bij de ontvangst van een constante golf wenschelijk en mogelijk is, dan wordt slechts nu en dan een sein opgevangen en wel alleen op die oogenblikken, wanneer de schommelende golf van den zender nauwkeurig overeenkomt met de golf, waarop de snaar afgestemd is. Op afwijkende golflengten reageert de snaar niet, zoodat de afgezonden letterteekens en woorden niet overkomen en het telegram onleesbaar wordt. Men is verplicht het decrement der snaarbeweging te vergrooten en daardoor een breeder gebied van golfvariatie voor de ontvangst toelaatbaar te maken.

Wij kregen den indruk, dat de ontvangst per telefoon van den machinezender van Bandoeng ongeveer evenveel door bijkomende geluiden gestoord wordt als de ontvangst per galvanometer. Door luchtstoringen gaan in beide gevallen ongeveer evenveel letterteekens verloren. Maar wij hebben nog geen gelegenheid gehad, hieromtrent nauwkeurige metingen te verrichten en merken op, dat men ook rekening zal dienen te houden met het verschil in vaardigheid van de onderscheidene Marconisten, die bij de vergelijkende proeven dienst doen.

Schommelt de zendgolf nog meer dan boven is aangegeven, dan komt de Marconist in het voordeel, maar als de golf constant wordt gehouden, zooals dat inderdaad bij vele moderne zenders geschiedt, dan wordt het voordeel naar de zijde van den galvanometer overgebracht. Men verkrijgt dan beelden op den band, die het voorkomen hebben van fig. 4 (p. 373) en van het bovenste beeld van fig. 6 (p. 381).

Hoe langzamer geseind wordt, des te geringer kan het snaardecrement worden gemaakt, waardoor de storingsvrijheid evenredig wordt verbeterd en de opnemings-mogelijkheid met den galvanometer wordt vergroot.

Daartegenover staat, dat de Marconist uit een meer volkomen constantie van de zendgolf binnen zekere grenzen geen voordeel putten kan; het menschelijk oor is niet in staat [1]) de kleine variaties in toonshoogte waar te nemen, waarop een met gering decrement trillende snaar reeds duidelijk reageert.

Maar niet alleen voor langzame seinen is de snaar in het voordeel. Zijn de seinen ten opzichte der luchtstoringen sterk genoeg, om hen met een matig of zelfs met een groot snaardecrement te kunnen registreeren, dan kan ,,automatisch snelseinen" worden toegepast en al heel spoedig is de Marconist dan niet meer in staat de teekens op te nemen, terwijl de galvanometer nog gemakkelijk eenige honderden woorden per minuut ontvangt.

Een gelukkig denkbeeld is ons aan de hand gedaan door Dr. de Groot in Bandoeng, aan wien wij veel verplicht zijn. Voor zijn warme medewerking bij de moeilijke proeven, die eenigen tijd geleden met den galvanometer te Bandoeng genomen zijn, brengen wij hem hier onzen besten dank.

Dr. de Groot stelde voor, om bij de opneming van een boogzender, die met arbeids- en rustgolf werkt, twee galvanometers tegelijk te gebruiken, een, die op de werkgolf en den anderen, die op de rustgolf is afgestemd. Een luchtstoring, die op een gegeven oogenblik intreedt, kan, als zij zich slechts op de registratie van een der beide golven laat gelden, gemakkelijk als zoodanig worden herkend.

[1]) Praktisch ook niet als de Marconist zwevingsontvangst toepast.

Daardoor wordt de mogelijkheid om de seinen door de luchtstoringen heen leesbaar te maken vergroot.

In fig. 6 reproduceeren wij een opneming, die op de door Dr. DE GROOT voorgestelde wijze te Leiden is gedaan. Men ziet, dat de

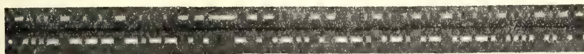


Fig. 6.
Opneming met 2 galvanometers tegelijkertijd van den boog *FL* Parijs. De werkgolf wordt door den eenen, de rustgolf door den anderen galvanometer geregistreerd.

snaar van den eenen galvanometer steeds trilt in den tijd, dat de andere stil staat en omgekeerd. Hoe hoog het praktisch nut dezer methode moet worden aangeslagen, hebben wij nog niet uitvoerig kunnen onderzoeken, maar de eerste indrukken, die wij van het resultaat van eenige weinige proeven ontvingen, zijn beslist gunstig.

Het denkbeeld om 2 galvanometers tegelijk te gebruiken kan ook toepassing vinden om de seinen, die met een schommelende golflengte worden uitgezonden, op te vangen. Elk van beide snaren kan afgestemd worden op een andere golf; de eene op een golf, die iets langer, de andere op een, die iets korter is dan de gemiddelde lengte, waarom de zendgolf slingert. Zoo wordt de toelaatbare breedte der slingering vergroot, terwijl het decrement der snaarbeweging klein kan blijven.

Maar beter dan de toepassing van dit toch eenigszins gebrekkige hulpmiddel is het te trachten den zender te volmaken. De tegenwoordige techniek is inderdaad reeds in staat zenders te leveren, die hun golf zoo goed als volkomen constant houden.

De voordeelen, die de ontvangst per galvanometer biedt boven die per telefoon, zijn niet gering. Bij langzaam seinen zullen teekens door den galvanometer kunnen worden ontvangen, die per telefoon niet neembaar zijn. Iedere verbetering in deze richting van de ontvangtoestellen, die toch steeds betrekkelijk eenvoudig blijven, spaart, zooals AUSTIN [1]) terecht opmerkt, groote sommen uit zoowel in den vorm van kapitaal, dat ten bedrage van millioenen guldens besteed moet worden aan de oprichting van groote zendstations als aan haar bedrijfskosten. En dat ook bij den tegenwoordigen stand der techniek verbeteringen noodig zijn, mag blijken uit de vele moeilijkheden, die men zelfs met de beste installaties ondervindt. Om een voorbeeld

[1]) Vgl. Jahrbuch der drahtl. Telegr. Bd. 20, Oct. en Nov. 1922.

te noemen zij vermeld, dat gedurende de geheele maand Juli van 1921 het verkeer tusschen twee der groote transatlantische stations, die tot de betrouwbaarste gerekend worden, zoo slecht was, dat slechts 23 °/₀ der uitgezonden woorden met goed gevolg werden ontvangen [1]).

De snelontvangst met den galvanometer biedt de mogelijkheid om op bepaalde tijden van het etmaal, die voor de overbrenging der seinen het gunstigst zijn, het volle nut van de installatie te trekken en veel meer woorden over te seinen dan telefonisch zouden kunnen worden opgevangen. Daarbij kan het geheim der telegrammen zooal niet volledig worden verzekerd, dan toch belangrijk beter worden bewaard. De talrijke opnemers per telefoon kunnen de snelle teekens niet volgen.

In oorlogstijd wordt een opzettelijke storing bemoeilijkt, wanneer rust- en werkgolf van een boogzender met 2 galvanometers tegelijk worden opgenomen.

Tenslotte vermelden wij nog een voordeel, dat betrekking heeft op de algemeene toepassing, die de draadlooze telegrafie in de wereld vindt. Het is Dr. de Groot, die dit op den voorgrond heeft geplaatst. Er worden gedurende het geheele etmaal tallooze seinen uitgezonden van vele honderden zendstations. De installaties hinderen elkaar, wanneer zij met golven werken, waarvan de lengte niet veel uiteenloopt. Het verschil in golflengten, die voor het seinen praktisch nog bruikbaar zijn, is beperkt; men kan slechts golven gebruiken, die noch beneden noch boven een zekere lengte komen, of anders uitgedrukt: het door de bruikbare golven gevormde spectrum bezit slechts een bepaalde breedte. Ieder, die hiervan een stuk gebruikt, ontneemt dat als het ware aan een ander. Met hoe kleiner deel van het spectrum hij zich tevreden kan stellen, hoe grooter deel er voor anderen overblijft.

Dank zij het geringe decrement van den galvanometer kan een draadlooze installatie met de inbeslagneming van een kleiner stuk van het spectrum volstaan dan tot nog toe mogelijk was, met het gevolg, dat het aantal gelijktijdig werkende draadlooze installaties kan worden vermeerderd. Aan deze vermeerdering bestaat groote behoefte, zoodat met grond mag worden verwacht, dat de galvanometer in het draadlooze wereldverkeer nuttige diensten zal kunnen bewijzen.

Wij eindigen deze uiteenzetting niet zonder dank te hebben gebracht aan de velen, die ons bij het werk behulpzaam zijn geweest. In 't bijzonder wenschen wij onze erkentelijkheid te betuigen voor de belangstelling en den steun, die wij van Mr. Th. B. Pleyte, den toenmaligen Minister van Koloniën, hebben ondervonden.

[1]) Vgl. Austin t.a.p. p. 312.

Natuurkunde. — H. A. LORENTZ: „*De bepaling van het g-veld in de algemeene relativiteitstheorie met behulp van de wereldlijnen van lichtsignalen en stoffelijke punten, met eenige opmerkingen over de lengte van staven en den duur van tijdsintervallen en over de theorieën van* WEYL *en* EDDINGTON."

§ 1. Eenige jaren geleden heeft KRETSCHMANN [1]) aangetoond dat de waarden der potentialen g_{ab} in een gravitatieveld door waarnemingen, enkel omtrent den loop van lichtstralen en de beweging van stoffelijke punten, tot op een constanten factor na bepaald kunnen worden. Hij doet nl. zien dat wanneer twee stel waarden der potentialen, g_{ab} en $\overline{g}_{ab}$, met deze waarnemingen in overeenstemming zijn, de verhouding $g_{ab}/\overline{g}_{ab}$ onafhankelijk van de coördinaten, en voor alle a's en b's dezelfde moet zijn.

Men kan gemakkelijk aanwijzen hoe inderdaad de potentialen uit de bedoelde waarnemingen kunnen worden afgeleid.

Wij zullen ons voorstellen dat een natuurkundige een gravitatieveld bestudeert door te letten op de beweging van lichtsignalen en stoffelijke punten; daarbij zullen wij aannemen dat hij naar goedvinden lichtsignalen en stoffelijke punten in het veld kan werpen en dat hij dit een groot aantal malen en op de meest verschillende wijzen doet. Wat hij nu kan waarnemen zijn de ontmoetingen van twee zijner „projectielen" en deze nummerende zou hij in een register van al die ontmoetingen aanteekening kunnen houden.

Een duidelijker samenvatting der waarnemingen kan door een graphische voorstelling in een vier-dimensionale ruimte R_4 worden verkregen; voor elk projectiel wordt daarin een „wereldlijn" getrokken, en wel zoo dat een ontmoeting van twee projectielen door een snijding hunner wereldlijnen wordt aangegeven en dat langs de wereldlijn van een der projectielen de snijpunten met andere lijnen in dezelfde orde op elkaar volgen als de overeenkomstige ontmoetingen na elkaar zijn gekomen.

Het is duidelijk dat men in het teekenen dezer „wereldfiguur" een groote mate van vrijheid heeft; een willekeurige vervorming, waarbij de samenhang nergens verbroken wordt, kan worden aangebracht zonder dat de figuur ophoudt aan haar doel te beantwoorden.

[1]) E. KRETSCHMANN, Ueber den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, Ann. d. Physik, (4) **53** (1917), p. 575.

In zekeren zin, daar het alleen op de snijpunten en hunne volgorde langs elke wereldlijn aankomt, kunnen alle door een vervorming uit elkander verkregen wereldfiguren geacht worden *dezelfde* figuur te zijn. Men merke op dat eerst door de snijdingen der lijnen bepaalde punten in de wereldfiguur worden aangewezen en dat men in den gedachtengang der relativiteitstheorie ook geen ander middel heeft om punten vast te leggen; elk punt stelt een „gebeurtenis" voor.

Wij nemen aan dat het aantal wereldlijnen en ontmoetingen zoo groot is, dat van een continue opeenvolging van punten langs elke lijn en van oneindig dicht bij elkaar liggende punten kan worden gesproken.

Is eenmaal de wereldfiguur geconstrueerd, dan kan men daarin coördinaten invoeren, door aan elk punt vier getalwaarden $x_1, \ldots x_4$ toe te kennen. De eenige beperking daarbij is dat langs elke wereldlijn de coördinaten continu veranderen en dat, als men langs een wereldlijn in positieve richting, beantwoordende aan de opeenvolging der ontmoetingen, voortgaat, de tijdcoördinaat x_4 steeds toeneemt.

§ 2. De theorie van EINSTEIN verlangt dat het mogelijk is voor elk punt der wereldfiguur tien getallen g_{ab} $(g_{ba} = g_{ab})$ aan te wijzen, zoodat, als men

$$ds^2 = \Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b$$

stelt („lijnelement") voor de wereldlijn van een lichtsignaal

$$ds = 0$$

is, terwijl de wereldlijn van een stoffelijk punt een geodetische lijn is, bepaald door

$$\delta \int ds = 0$$

bij gegeven begin- en eindpunt. Men kan nu aantoonen dat de straks ondersteld waarnemer, als hij het eenmaal zoover heeft gebracht als gezegd werd, zoodat hij in de wereldfiguur de waarden der coördinaten kan aflezen, niet alleen de waarden der potentialen op een constanten factor na kan bepalen, maar bovendien nog verschillende verificaties der theorie kan opmerken.

Te dien einde kan hij vooreerst zijn aandacht vestigen op de lichtwereldlijnen, die door een punt P gaan. Vat hij op een daarvan een punt Q op oneindig kleinen afstand van P in het oog, dan ziet hij in zijn figuur de verschillen dx_a, die aan den overgang van P naar Q beantwoorden, en heeft hij dus in

$$\Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b = 0$$

een homogene lineaire vergelijking tusschen de potentialen, met bekende coëfficienten $dx_a\, dx_b$. Evenzoo met acht andere van de

door P gaande wereldlijnen te werk gaande, krijgt hij 9 vergelijkingen, en uit deze kunnen de verhoudingen der potentialen bepaald worden. Dit kan voor elke plaats van P worden gedaan en de uitkomst kan worden geschreven in den vorm

$$g_{ab} = \omega \, \gamma_{ab} \tag{1}$$

waarin de grootheden γ_{ab} bekende functiën van de coördinaten zijn ($\gamma_{ba} = \gamma_{ab}$), terwijl ω een nog onbekende functie daarvan is. Wanneer er, zooals wij zullen onderstellen, geene discontinuiteiten in het veld bestaan, kunnen voor γ_{ab} doorloopende functiën worden genomen, en zal ook ω zulk een functie zijn.

Dat de bij bovenstaande beschouwing niet gebruikte lichtwereldlijnen met de gevonden verhoudingen in overeenstemming zijn, is een verificatie der theorie.

§ 3. Om de functie ω nader te bepalen kan men zich van de wereldlijnen der stoffelijke punten, de geodetische lijnen, bedienen. Langs elke dergelijke lijn gelden de vier vergelijkingen

$$\frac{d^2 x_c}{d s^2} = - \Sigma (ab) \left\{ \begin{matrix} a\,b \\ c \end{matrix} \right\} \frac{dx_a}{ds} \frac{dx_b}{ds} \tag{2}$$

en wij kunnen deze in den vorm van een differentiaalvergelijking voor ω brengen.

Zooals men weet is

$$\left\{ \begin{matrix} a\,b \\ c \end{matrix} \right\} = \Sigma (e) \, g^{ce} \begin{bmatrix} a\,b \\ e \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \Sigma (e) \, g^{ce} (g_{ae,\,b} + g_{be,\,a} - g_{ab,\,e})$$

waarin $g_{ac,\,b}$ het differentiaalquotient van g_{ac} naar x_b is, terwijl het stel grootheden g^{ab} het „omgekeerde" is van het stel g_{ab}. Wij kunnen evenzoo het stel grootheden γ^{ab} invoeren en de differentiaalquotienten $\gamma_{ab,\,c}$, en wel zijn γ^{ab} en $\gamma_{ab,\,c}$ evenals γ_{ab} geheel bekende grootheden.

Klaarblijkelijk is

$$g^{ab} = \frac{1}{\omega} \gamma^{ab}, \qquad g_{ae,\,b} = \frac{\partial}{\partial x_b} (\omega \, \gamma_{ae}), \text{ enz.,}$$

waaruit men kan afleiden

$$\left\{ \begin{matrix} a\,b \\ c \end{matrix} \right\} = \tfrac{1}{2} \Sigma (e) \, \gamma^{ce} (\gamma_{ae,\,b} + \gamma_{be,\,a} - \gamma_{ab,\,e}) + $$
$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma (e) \, \gamma^{ce} \left(\gamma_{ae} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{be} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - \gamma_{ab} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_e} \right). \tag{3}$$

Stelt men verder

$$d\sigma^2 = \Sigma (ab) \, \gamma_{ab} \, dx_a \, dx_b \,, \tag{4}$$

dan is

$$ds = \sqrt{\omega} \, d\sigma \tag{5}$$

Men kan ook $d\sigma$ als een uitdrukking voor het lijnelement (in een andere maat dan ds) beschouwen, en daar uitdrukking (4) geheel bekend is, in elk punt van een geodetische lijn de waarde van $\sigma = \int d\sigma$, van een willekeurig gekozen vast punt af gerekend, aangeven. Daar men in ieder punt ook de waarden der coördinaten kent, worden deze langs de lijn bekende functiën van σ en kent men ook overal hun eerste en tweede differentiaalquotienten naar σ.

Nu is wegens (5)

$$\frac{dx_c}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{dx_c}{d\sigma}, \text{ enz.}$$

$$\frac{d^2 x_c}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{dx_c}{d\sigma}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{d^2 x_c}{d\sigma^2} - \frac{1}{2\omega^2} \frac{dx_c}{d\sigma} \frac{d\omega}{d\sigma}.$$

Substitueert men een en ander in de vergelijking der geodetische lijn, dan komt er, na vermenigvuldiging met ω

$$\frac{d^2 x_c}{d\sigma^2} - \tfrac{1}{2} \frac{dx_c}{d\sigma} \frac{d \log \omega}{d\sigma} = - \Sigma (ab) \left\{ \begin{matrix} a\,b \\ c \end{matrix} \right\} \frac{dx_a}{d\sigma} \frac{dx_b}{d\sigma}, \qquad (6)$$

waarin men nu nog de uitdrukking (3) en de waarde

$$\frac{d \log \omega}{d\sigma} = \Sigma (f) \frac{dx_f}{d\sigma} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_f}$$

kan substitueeren. Men krijgt op deze wijze in elk punt vier vergelijkingen ($c = 1, 2, 3, 4$) waarin de vier onbekenden

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial x_f}$$

lineair voorkomen, en overigens alles bekend is.

§ 4. Wij hebben nu nog aan te toonen dat de onbekenden werkelijk door de vergelijkingen bepaald worden. Het zou nl. kunnen zijn dat de vergelijkingen onderling afhankelijk zijn; tegenstrijdigheid is uitgesloten, daar wij aannemen dat de theorie van EINSTEIN juist is.

Schrijven wij de onbekende termen links en de bekende rechts, dan heeft (na vermenigvuldiging met 2) de vergelijking, die wij op de gezegde wijze uit (6) afleiden, den vorm

$$- \Sigma (f) \frac{dx_c}{d\sigma} \frac{dx_f}{d\sigma} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_f} +$$

$$+ \Sigma (a\,b\,e)\, \gamma^{ce} \frac{dx_a}{d\sigma} \frac{dx_b}{d\sigma} \left(\gamma_{ae} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{be} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - \gamma_{ab} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_e} \right) = \ldots . \qquad (7)$$

Wij hebben hier de bekende grootheden door .... voorgesteld en zullen dit in de eerstvolgende vergelijkingen eveneens doen, daar het er alleen om te doen is, de *mogelijkheid* van de bepaling der

onbekenden te doen zien, waarbij de waarde der bekende termen niet ter zake doet.

Uit (7) leiden wij vier nieuwe vergelijkingen af ($h = 1, \dots 4$) door met γ_{ch} te vermenigvuldigen en naar c op te tellen [1]).

Van de vier termen vallen er twee tegen elkander weg en er komt

$$\Sigma (a\, b) \left(\gamma_{bh} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - \gamma_{ab} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_h} \right) \frac{dx_a}{d\sigma} \frac{dx_b}{d\sigma} = \dots .$$

of wel, wanneer wij hierbij dezelfde vergelijking optellen, na in het eerste lid a en b met elkaar verwisseld te hebben

$$\Sigma (a\, b)\, \Phi_{ab} \frac{dx_a}{d\sigma} \frac{dx_b}{d\sigma} = \dots . \tag{8}$$

$$\Phi_{ab} = \gamma_{ah} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{bh} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - 2\, \gamma_{ab} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_h} .$$

Wij vatten nu een bepaald punt P en een bepaalden index h in het oog. Dan is er, daar $\Phi_{ba} = \Phi_{ab}$ is, van 10 waarden $\Phi_{11}, \dots$ $\Phi_{12}, \dots$ sprake, en wel zijn deze onafhankelijk van de richting eener uit P getrokken geodetische lijn. Elke geodetische lijn geeft nu, daar $\frac{dx_a}{d\sigma}$ en $\frac{dx_b}{d\sigma}$ daarvoor bekend zijn, een vergelijking als (8) waaraan de Φ_{ab}'s moeten voldoen. Door (8) op 10 geodetische lijnen in P toe te passen krijgt men evenzoovele lineaire vergelijkingen, waaruit de Φ_{ab}'s kunnen worden opgelost. Dit is mogelijk als de determinant op de coëfficienten van Φ_{ab} niet nul is, en aan deze voorwaarde is voldaan, als de eerste elementen der gekozen geodetische lijnen niet op een kegel van den tweeden graad liggen.

De uitkomst der zooeven geschetste berekeningen is dat men voor alle combinaties a, b, h kent

$$\gamma_{ah} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{bh} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - 2\, \gamma_{ab} \frac{\partial \log \omega}{\partial x_h} = \dots . \tag{9}$$

Vermenigvuldigt men dit met γ^{ab} en telt men dan, zoowel naar a als naar b op, dan geeft de eerste, zoowel als de tweede term $\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h}$ en de derde $-\,8\, \frac{\partial \log \omega}{\partial x_h}$, zoodat men het differentiaalquotient $\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h}$ leert kennen. Dit geldt voor elken index h en in elk punt der vier-dimensionale uitgebreidheid. Daar men dus overal de differentiaalquotienten van $\log \omega$ naar de coördinaten leert kennen, is $\log \omega$ overal op een additieve constante na, en dus ω op een con-

[1]) Men heeft $\Sigma (c)\, \gamma_{ch}\, \gamma^{ce} = \delta_h^e$ ($\delta_h^e = 1$ voor $h = e$, en $= 0$ voor $h \neq e$).

stanten factor na bepaald. Blijkens (1) worden dus ook de potentialen g_{ab} op zoodanigen factor na bepaald. [1])

Daar voor deze bepaling slechts 10 van de door P gaande wereldlijnen van stoffelijke punten zijn gebruikt, daar verder het aantal der vergelijkingen (9) veel grooter is dan 4, het aantal der onbekenden, en daar eindelijk, als de differentiaalquotienten van $log\ \omega$ als functiën van de coördinaten bepaald zijn, de betrekkingen

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x_b\ \partial x_a} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x_a\ \partial x_b}$$

moeten gelden, zou de physicus, dien wij ons voorstelden, tal van verificaties der theorie kunnen vinden.

§ 5. Bij het voorgaande werd begonnen met een willekeurige keus der coördinaten x_a. Kiest men in plaats daarvan andere x'_a, functiën van x_a, dan kan men op dezelfde wijze als in het oude, ook in het nieuwe stelsel de gravitatiepotentialen bepalen. Het is echter duidelijk dat men, eenmaal een geschikt stel waarden g_{ab} gevonden hebbende, voor de grootheden g'_{ab} die kan nemen, welke door de bekende transformatieformules uit g_{ab} worden afgeleid, m.a.w. die welke voortvloeien uit de voorwaarde dat ds^2 invariant is. Is nl. $ds' = ds$, dan zullen de wereldlijnen van lichtsignalen en stoffelijke punten, als zij voldoen aan $ds = 0$ en $\delta \int ds = 0$, ook voldoen aan $ds' = 0$ en $\delta \int ds' = 0$.

Natuurlijk zou men de door de transformatieformules bepaalde g'_{ab}'s ook alle met een zelfden constanten factor kunnen vermenigvuldigen.

Welken invloed een dergelijke constante factor in de zwaartekrachtspotentialen bij de volgende beschouwingen zou hebben, is gemakkelijk na te gaan. Ter vereenvoudiging zullen wij aannemen

[1]) Weyl (Raum-Zeit-Materie, 1ste druk, p. 182) meent dat voor deze bepaling der potentialen reeds de lichtwereldlijnen voldoende zijn. Het komt mij echter voor dat hij zich hierin vergist. Stel b.v. dat men, bij geschikte keus der coördinaten, den loop van die lijnen kan weergeven door voor g_{44} en g_{ab} $(a \neq 4, b \neq 4)$ zekere waarden aan te nemen, die alleen van de ruimte-coördinaten x_1, x_2, x_3 afhangen, en door (voor $a \neq 4$) $g_{a4} = 0$ te stellen (zoodat men met een statisch gravitatieveld te doen heeft). Dan kan men de potentialen alle met een zelfde willekeurige functie van x_1, x_2, x_3 vermenigvuldigen, zonder iets aan de uit $ds^2 = 0$ afgeleide voortplantingssnelheden te veranderen, dus ook zonder wijziging te brengen in den loop van lichtstralen in de ruimte x_1, x_2, x_3, d.w.z. in de lichtwereldlijnen. Men ziet dit in als men bedenkt dat de loop der lichtstralen door de constructie van Huygens bepaald wordt, bij welke alleen van de voortplantingssnelheden gebruik wordt gemaakt.

dat in het eerst gebezigde coördinatenstelsel de constante factor op deze of gene wijze wordt vastgelegd en dat bij verandering van coördinaten de invariantie van ds^2 wordt gehandhaafd.

Zijn eenmaal in zeker coördinatenstelsel de potentialen g_{ab} bepaald, dan kan, zooals men weet, de geheele meetkunde in R_4 worden opgebouwd als men ds als de uitdrukking voor het lijnelement aanneemt. Men komt dan op bekende wijze tot de vaststelling van den hoek tusschen twee lijnelementen en tot de differentiaalvergelijkingen voor geodetische lijnen. Hier moge alleen aan het volgende worden herinnerd.

1. Twee lijnelementen (PQ en PQ') ds en $d's$ met de componenten dx_a en $d'x_a$ staan loodrecht op elkaar als

$$\Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, dx_a\, d'x_b = 0$$

is.

2. Daaruit volgt, als het lijnelement QQ' door $d''s$ wordt voorgesteld

$$d''s^2 = ds^2 + d's^2.$$

3. Elk lijnelement is een (contravariante) vector, waarvan de grootheden $\frac{dx_a}{ds}$ de richtingsconstanten ξ^a zijn.

4. Verschuift men een vector met zijn beginpunt langs een lijnelement dx_a, zoo dat hij naar de terminologie van LEVI CIVITA evenwijdig aan zich zelf blijft, [1]) dan worden de veranderingen van zijne richtingsconstanten bepaald door

$$d\xi^a = -\Sigma\,(b\,c) \left\{ \begin{matrix} b\,c \\ a \end{matrix} \right\} \xi^c\, dx_b \qquad (10)$$

---

[1]) Tot het begrip der evenwijdige verplaatsing van een vector komt men b.v. op de volgende wijze. Wij merken eerst op dat, als in een punt P twee onderling loodrechte richtingen gegeven zijn, bepaald door de constanten ξ^a en ξ'^a, en wanneer φ een willekeurige hoek is, ook de vier grootheden

$$\xi''^a = \xi^a \cos\varphi + \xi'^a \sin\varphi$$

richtingsconstanten zijn. De richting die zij bepalen ligt, zooals wij zullen zeggen, met de twee eerstgenoemde in een vlak; zij maakt met de eerste daarvan den hoek φ.

1. Zij P een punt van R_4 en L een daarvan uitgaande geodetische lijn. Wij willen vaststellen wat verstaan zal worden onder een evenwijdige verschuiving van een vector PA met zijn beginpunt langs L.

Is nu in de eerste plaats de vector PA in P langs L gericht, dan stellen wij vast dat hij steeds daarlangs gericht blijft.

2. Evenzoo verlangen wij dat als de vector in P loodrecht op L staat, hij voortdurend loodrecht daarop moet blijven. Daarmede is echter de stand in een willekeurig

§ 6. Wij kunnen ons voorstellen dat een natuurkundige vóór hij andere verschijnselen in het gravitatieveld bestudeert, eerst met behulp van wereldlijnen van lichtsignalen en stoffelijke punten de potentialen g_{ab} in de ruimte R_4 vastlegt. Zijn die, evenals de waarden der coördinaten in elk punt aangeteekend, dan heeft hij hierin het middel om bij allerlei verschijnselen lengten en tijden te meten, en wel in een maat die onafhankelijk is van de keus der coördinaten, in hetgeen wij „invariante" of „natuurlijke" maat kunnen noemen. De formule voor ds^2 levert nl. den invarianten afstand tusschen twee punten in R_4 en hiertoe kunnen andere gevallen worden teruggebracht. Men beschouwt bijv. een staaf, stel gemakshalve van oneindig kleine lengte. Men kan de wereldlijnen L en L' van de uiteinden A en A' in het oog vatten en zou als maat voor de lengte den invarianten afstand kunnen nemen van de punten dier wereldlijnen, die aan een zelfden tijd x_4 beantwoorden. Het getal waartoe men dan geraakt zou echter van de keus der coördinaten afhankelijk zijn, en het algemeene beginsel der relativiteitstheorie brengt mede dat men naar een getal zoekt, geschikt om de lengte van de staaf voor te stellen en invariant. Dit nu kan men op de volgende wijze bereiken. Zij A een punt der wereldlijn L van het eene uiteinde, en B een punt van de wereldlijn L' van het andere, dat hierdoor bepaald is, dat AB loodrecht op L' staat; dan berekenen wij de lengte l van de staaf uit:

---

punt Q van L niet bepaald. Om de onbepaaldheid op te heffen gaan wij als volgt te werk.

Uit het punt P trekken wij een tweede geodetische lijn L', die een oneindig kleinen hoek met L maakt en waarvan de richting in P met die van L en den vector PA in één vlak ligt.. Neem nu op L en L' van P af gelijke oneindig kleine stukken PQ en PQ'; dan bepaalt het lijnelement QQ' de richting die de vector PA bij evenwijdige verschuiving naar Q zal hebben.

Met oneindig kleine stappen voortgaande kan men zoo den vector over willekeurigen afstand langs L verschuiven.

3. Heeft eindelijk de vector PA een willekeurige richting, dan ontbinden wij hem in PC langs L en PD loodrecht daarop. Wij verschuiven verder PC en PD beide evenwijdig aan zich zelf en met behoud van hun grootte naar een willekeurig punt van L en stellen ze daar weer samen. De resulteerende vector geeft dan de gezochte richting aan.

Is op deze wijze de parallelverschuiving langs een geodetische lijn gedefinieerd, dan is daarmede tevens vastgesteld wat men onder de parallelverschuiving langs een willekeurig lijnelement te verstaan heeft, daar men dit altijd kan beschouwen als tot een geodetische lijn te behooren. Verder staat dan ook vast hoe men den vector, met oneindig kleine stappen voortgaande, langs een willekeurige lijn kan verschuiven.

Het gezegde uitwerkende komt men tot verg. (10).

$$l^2 = -\overline{AB}^2, \tag{11}$$

waarbij $\overline{AB}^2$ met de formule voor ds^2 bepaald wordt. [1])

De uitwerking dezer berekening is heel eenvoudig. Beschouw nl. het punt A' van L' dat aan denzelfden tijd x_4 beantwoordt als A op L, en stel dat B beantwoordt aan $x_4 + \tau$. Dan kan men den oneindig kleinen tijd τ bepalen uit de voorwaarde dat $A\,B$ loodrecht op L' staat (men kan ook zeggen loodrecht op L) en als τ gevonden is kent men $\overline{A'B}^2$ en $\overline{AB}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{A'B}^2$.

De uitkomst is

$$l^2 = -\Sigma\,(a\,b)\,g_{ab}\,(x'_a - x_a)\,(x'_b - x_b) + \frac{\{\Sigma\,(a\,b)\,g_{ab}\,\dot{x}_a\,(x'_b - x_b)\}^2}{\Sigma\,(ab)\,g_{ab}\,\dot{x}_a\,\dot{x}_b} \tag{12}$$

waarin de coördinaten van A met x_a en die van A' met x'_a zijn aangeduid (zoodat $x'_4 = x_4$ is). Verder zijn $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ de snelheidscomponenten van het eerste uiteinde der staaf ($\dot{x}_4 = 1$).

Dat het inderdaad doelmatig is, de door (12) bepaalde grootheid de „lengte" der staaf te noemen, kan hieruit blijken dat onder overigens gelijke omstandigheden l evenredig is met de coördinatenverschillen $x'_a - x_a$, en dat voor een stilstaande staaf in een veld met $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = c^2$, $g_{ab} = 0$ voor $a \neq b$, de formule overgaat in

$$l^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2.$$

§ 7. Met het bovenstaande is nog niets gezegd over de verschijnselen die zich bij staven in het gravitatieveld zullen voordoen; wij hebben slechts vastgesteld naar welken regel de lengte zal worden gemeten. Zulke metingen uitvoerende zal nu de natuurkundige van het gravitatieveld evengoed als een physicus van de oude school vinden dat de lengte van een staaf van verschillende omstandigheden afhangt en zoo zal hij geleid worden tot beschouwingen over den invloed van de temperatuur en tot het opstellen van een elasticiteitstheorie. In de oude natuurkunde heeft men geleerd dat men, in werkelijkheid min of meer, en in gedachten zooveel men wil, kan naderen tot een staaf van onveranderlijke lengte (op constante temperatuur houden of wel kleine uitzettingscoëfficient, hooge elasticiteitsmodulus). In de algemeene relativiteitstheorie neemt men aan dat men, juist in dezelfde mate, kan naderen tot het geval van een

[1]) Bij waarden zooals zij veelal voor de potentialen worden aangenomen (b.v. $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = c^2$, $g_{ab} = 0$ voor $a \neq b$, of waarden weinig van deze verschillend) wordt $\overline{AB}^2$ negatief. Teneinde voor l een reëele waarde te vinden, is in (11) het minusteeken geschreven.

staaf waarvan de *natuurlijke* lengte onder alle omstandigheden hetzelfde is. Voor zulk een „ideëele" staaf heeft dus l een bepaalde waarde.

Nu is er niets tegen om eventueel, terwijl men de meetkunde in R_4 met het lijnelement ds opbouwt, in de driedimensionale ruimte (R_3) x_1, x_2, x_3 als rechthoekige cartesische coördinaten te beschouwen en als maat voor den afstand van twee punten, of voor de lengte eener staaf te nemen

$$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2}.$$

Dit is zelfs een zeer natuurlijke opvatting, daar het voor de hand ligt de *gelijktijdige* standen van de twee uiteinden met elkander te vergelijken. Maar de aldus bepaalde lengte, de „euclidische" zooals men zou kunnen zeggen, verschilt van de natuurlijke lengte l en juist als deze laatste onder alle omstandigheden dezelfde is, zal de euclidische lengte dat niet zijn. Zij zal veranderingen ondergaan, die, als zij maar grooter waren, gemakkelijk in het oog zouden vallen. Liggen op een bepaald oogenblik twee staven langs elkander, zoodat de linker uiteinden samenvallen, dan kan men onmiddellijk waarnemen welke staaf aan de rechterzijde het verst reikt; zoo vergelijkt men de euclidische lengten (of de coördinatenverschillen) maar niet de natuurlijke lengten. Dat men uit het voorgaande de in de speciale relativiteitstheorie ter sprake komende verkorting van een staaf die zich in de richting van de lengte beweegt. kan afleiden, behoeft nauwelijks gezegd te worden.

§ 8. De invloed van het gravitatieveld op den gang van een uurwerk kan op een dergelijke wijze worden behandeld. Stel dat het uurwerk zoo klein is dat men van zijn wereldlijn L kan spreken; op die lijn markeeren de achtereenvolgende tikken een reeks van punten, A, B, C, enz., die wij onderstellen op oneindig kleinen afstand van elkaar te liggen. De uitspraak dat een uurwerk „volmaakt" is, heeft een beteekenis onafhankelijk van de keus van het coördinatenstelsel als men er mede bedoelt dat de in natuurlijke maat gemeten afstanden PQ, QR, enz. onder alle omstandigheden voor dat uurwerk evengroot zijn. Is de lengte ervan τ en is dx_4 het „tijdsverloop" tusschen twee tikken, dan is dus $\tau^2 = \Sigma (a\, b)\, g_{ab}\, dx_a\, dx_b$, $\tau^2 = (g_{11}\, \dot{x}_1^2 + \ldots + 2\, g_{12}\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2 + \ldots + 2\, g_{14}\, \dot{x}_1 + \ldots g_{44})\, dx_4^2$, waaruit men kan afleiden hoe het in verschillende gevallen met dx_4 gesteld is.

§ 9. Dat bij een ideëele staaf de lengte, in natuurlijke maat gemeten, steeds dezelfde zal zijn, is niet uit waarnemingen gebleken;

men kan zich zeer goed verbeelden dat die lengte, b.v. als men nog met iets anders dan alleen een gravitatieveld te doen heeft, naar deze of gene regels veranderingen ondergaat. Door hieromtrent bepaalde onderstellingen te maken kan men komen tot de theorie van WEYL[1]), die reeds in de grondslagen een nauw verband tusschen electromagnetische verschijnselen en gravitatie legt, of althans tot een der wijzen waarop die theorie kan worden ingekleed.

Het is denkbaar dat de lengte van een staaf (wij denken hierbij steeds aan een oneindig korte staaf en aan de lengte bepaald op de in § 6 aangegeven wijze) verandert telkens als hij in R_3 anders gericht wordt en ook dat zij gewijzigd wordt als de coördinaten x_1, x_2, x_3 (de ruimte-coördinaten van een der uiteinden) en de tijd x_4 veranderen. Het eerste zullen wij *niet*, het laatste *wel* onderstellen, en daarbij zullen wij aannemen, zooals in dezen gedachtengang voor de hand ligt, dat de verandering der lengte evenredig is aan de lengte zelf en dat zij een homogene lineaire functie van de vier differentialen dx_a is.

Wij kunnen dan schrijven

$$d \log l = \Sigma (a)\, P_a\, dx_a \qquad (13)$$

met vier getallen P_a, functiën van de coördinaten en afhankelijk van den toestand in het veld op de beschouwde plaats en tijd. Het is de bedoeling dat, bij een bepaalde verplaatsing in R_4, $d \log l$ onafhankelijk is van de keus der coördinaten; P_a moet dus een covariante vector zijn.

Uit (13) kan men afleiden hoe de lengte verandert als de staaf in een zeker tijdsverloop een verplaatsing in de driedimensionale ruimte ondergaat, wat in R_4 door een zekere wereldlijn, stel met het beginpunt C en het eindpunt D, wordt voorgesteld. Laat de afmetingen dezer lijn CED zeer klein zijn en laten wij rekenen nauwkeurig tot in grootheden van de tweede orde met betrekking tot die afmetingen. Dan moeten wij, als voor een willekeurig punt van den weg

$$x_a = x_{a,C} + \mathrm{x}_a$$

gesteld wordt, P_a in (13) vervangen door

$$P_a + \Sigma (b) \frac{\partial P_a}{\partial x_b} \mathrm{x}_b \,,$$

waarin zoowel voor P_a als voor de differentiaalquotienten de waarden in C kunnen worden genomen.

De geheele verandering van $\log l$ wordt nu

$$\Delta \log l = \Sigma (a)\, P_a \int d\mathrm{x}_a + \Sigma (ab) \frac{\partial P_a}{\partial x_b} \int \mathrm{x}_b\, d\mathrm{x}_a \,.$$

[1]) Berl. Sitz. Ber., 1918, p. 465.

De laatste term in deze uitdrukking is afhankelijk van den weg tusschen C en D en klaarblijkelijk heeft men, als $\Delta' \log l$ de verandering is, die bij een tweeden weg $CE'D$ behoort,

$$\Delta \log l - \Delta' \log l = \Sigma (a\,b) \frac{\partial P_a}{\partial x_b} \int x_b \, dx_a \,, \qquad (14)$$

waar nu de integraal over den kring $CEDE'C$ in de door de volgorde der letters aangewezen richting moet genomen worden. Voor $a = b$ is deze integraal nul en men heeft $\int x_a \, dx_b = - \int x_b \, dx_a$, daar de som dezer integralen $\int d\,(x_a\, x_b) = 0$ is. In plaats van (14) kan men dus ook schrijven

$$\Delta \log l - \Delta' \log l = \tfrac{1}{2} \Sigma (a\,b) \left(\frac{\partial P_a}{\partial x_b} - \frac{\partial P_b}{\partial x_a} \right) \int x_b \, dx_a \,. \qquad (15)$$

Indien niet de vector P_a van een eenwaardigen potentiaal φ afhangt $\left(P_a = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \right)$, zal de lengte van de staaf verschillend zijn naar gelang de verplaatsing langs den eenen of den anderen weg geschied is.

§ 10. De toestand in een electromagnetisch veld wordt bepaald door een viertalligen potentiaal $\overline{P_a}$, uit welken door de in

$$\frac{\partial \overline{P_a}}{\partial x_b} - \frac{\partial \overline{P_b}}{\partial x_a} \qquad (16)$$

aangegeven bewerkingen de componenten van de electrische en de magnetische kracht, die te zamen een antisymmetrischen tensor van den tweeden rang vormen, kunnen worden afgeleid.

Weyl meent nu dat, indien werkelijk de besproken lengteveranderingen van een staaf bestonden, dit de aanwijzing zou zijn van het bestaan van een electromagnetisch veld, zoo nl. dat de vector P_a die de lengteveranderingen bepaalt op een constanten factor na kan geïdentificeerd worden met den viertalligen potentiaal $\overline{P_a}$:

$$P_a = \lambda \overline{P}_a \,. \qquad (17)$$

Omgekeerd zou men dan ook moeten aannemen dat in elk electromagnetisch veld de bedoelde lengteveranderingen plaats hebben en in het bijzonder, zooals uit (15) blijkt, dat het bestaan van de electrische en magnetische krachten, d. i. het van nul verschillend zijn der uitdrukkingen (16) meebrengt dat de lengte van een staaf van hare vroegere verplaatsingen afhangt.

Bestonden de uitzettingen en samentrekkingen waarvan wij spraken inderdaad, dan zou de theorie van Weyl als aanwijzing van

een samenhang tusschen twee groepen van verschijnselen van het grootste belang zijn. Maar zoover zijn wij nog niet en men kan zelfs zeggen dat de onderstelde lengteveranderingen weinig passen bij wat wij gewoon zijn ons voor te stellen. Dit blijkt b.v. in het geval van een stationair electrisch veld. Daarin bestaat van de componenten $\overline{P_a}$ alleen $\overline{P_4}$, de gewone electrostatische potentiaal en volgens (13) zou dus de lengte van een staaf, onafhankelijk van zijn beweging, in den loop van den tijd voortdurend in dezelfde richting veranderen. Had men twee aan elkander gelijke staven, eerst naast elkander liggende op de plaats 1 en bracht men dan, terwijl de eerste daar blijft, de tweede naar de plaats 2, waar de potentiaal hooger of lager dan in 1 is, om hem na eenigen tijd naar de plaats 1 terug te brengen, dan zou tusschen de lengten een verschil zijn ontstaan, dat van het potentiaalverschil tusschen de plaatsen 1 en 2 zou afhangen en des te grooter zou zijn naarmate de tweede staaf langer van de eerste verwijderd was geweest.

Zoo lang deze en dergelijke lengteveranderingen in een electromagnetisch veld nog niet zijn waargenomen of wel zoolang zij, indien men ze op grond van een kleine waarde der constante λ in (17) voor onwaarneembaar wil houden, niet door andere overwegingen aannemelijk zijn gemaakt, zou ik er de voorkeur aan geven, in elk punt van R_4 den viertalligen electromagnetischen potentiaal in te voeren, zonder daaraan nog een andere physische beteekenis toe te kennen.

Het verdient nog opmerking dat, zoo men niet anders wil doen dan de lengte van onmiddellijk naast elkander liggende staven vergelijken, de waarneming alleen de grootheden

$$\frac{\partial P_a}{\partial x_b} - \frac{\partial P_b}{\partial x_a}$$

(verschillen of veranderingen van potentiaalwaarden) kan leeren kennen. Zooals de zaak in het voorgaande werd voorgesteld zou men echter in de wereldfiguur met haar coördinaten en g-waarden het middel hebben om de lengte van een enkele staaf (in natuurlijke maat) te bepalen, zoodat men ook elken term in het tweede lid van (13) uit de waarneming zou kunnen afleiden. Er zou dus *deze* tegenstelling bestaan, dat men de waarden der vier potentialen zelf kon vinden, terwijl uit de electromagnetische verschijnselen slechts hunne differentiaalquotienten kunnen worden afgeleid. Deze tegenstelling kan echter misschien door een andere inkleeding der theorie worden weggenomen.

§ 11. Ten slotte moge hier nog iets worden gezegd van de theorie

die EDDINGTON [1]) als een generalisatie van die van WEYL heeft voorgesteld. Het merkwaardige van zijne beschouwingen is hierin gelegen dat zij tot op zekere hoogte kunnen worden ontwikkeld zonder de zwaartekrachtspotentialen g_{ab} in te voeren, dus zonder een uitdrukking voor ds^2 op te stellen, d.w.z. zonder van de lengte van lijnelementen in R_4 te spreken.

Het is EDDINGTON er om te doen, tot de invoering te komen van den anti-symmetrischen covarianten tensor F_{ab} der electrische en magnetische kracht, en van den viertalligen potentiaal waarvan deze krachten afhangen. Daartoe begint hij met in de wereldfiguur, nadat daarin coördinaten (maar geen waarden van g_{ab}) zijn ingevoerd, aan elk punt 40 getallen, die alle als doorloopende functiën van de coördinaten gedacht worden, toe te voegen, met welke getallen dan zekere nader aan te wijzen bewerkingen worden uitgevoerd. De bedoelde *grondgetallen* worden door het symbool Γ^c_{ab} voorgesteld, met de betrekking

$$\Gamma^c_{ba} = \Gamma^c_{ab}, \tag{18}$$

door welke het aantal der van elkander onafhankelijke getallen, dat anders 64 zou zijn, tot 40 beperkt wordt.

Daar wij geen g_{ab}-waarden hebben ingevoerd kunnen wij niet van de grootte van een lijnelement of van die van een vector A (zooals wij elk lijnelement kunnen noemen) spreken; alleen van de componenten dx_a, waarvoor wij zullen schrijven A^a. Niets belet ons nu ons voor te stellen dat, wanneer een vector met zijn beginpunt langs een lijnelement dx_b verschoven wordt, zijne componenten op deze of gene wijze veranderen. Door hiervoor een bepaalden regel te stellen definieert EDDINGTON wat hij een parallelverschuiving noemt; ik zal zeggen de „uitgekozen" verschuiving, om in het oog te houden dat men, zoolang geen ds is ingevoerd, noch van richtingsconstanten noch van hoeken kan spreken en dus ook niet van een parallelverschuiving in de beteekenis die wij in § 5 aan het woord hechtten.

Ter bepaling van de uitgekozen verschuiving dienen nu de grondgetallen. Voor de veranderingen der componenten A^a bij een verschuiving langs een lijnelement dx_b wordt nl. gesteld

$$dA^a = -\Sigma\,(b\,c)\,\Gamma^a_{bc}\,A^c\,dx_b\,. \tag{19}$$

Men kan ook na een verandering van coördinaten van *dezelfde* lijnelementen en dus ook van denzelfden vector in R_4 blijven spreken en het is de bedoeling dat, al kiest men andere coördinaten, zoowel het lijnelement dx_b als de vector A^a vóór en na zijn verplaatsing hetzelfde zullen zijn. Daaruit volgt dat formules van den vorm (19)

[1]) Proc. Roy. Soc. A. 99, p. 104 (1921); The mathematical theory of relativity. p. 213.

met andere grondgetallen Γ'^{a}_{bc} ook in de nieuwe coördinaten gelden. Men kan de betrekkingen tusschen de oude en de nieuwe grondgetallen opstellen; deze transformatieformules blijken dan echter een andere gedaante te hebben dan die waardoor tensoren gekarakteriseerd zijn. M.a.w. Γ^{a}_{bc} is geen tensor.[1])

§ 12. Wij leiden uit (19) de veranderingen ΔA^a af, die de componenten van een vector ondergaan als, bij een opeenvolging van oneindig kleine uitgekozen verschuivingen, zijn beginpunt langs een gesloten lijn in R_4 rondgaat. De afmetingen van die lijn onderstellen wij zeer klein en wij gaan in de berekening tot en met grootheden die ten opzichte van de afmetingen van de tweede orde zijn.

Zij P het beginpunt en laat, voor een willekeurig punt Q van den kring,

$$x_a - x_{aP} = \mathrm{x}_a$$

zijn. Dan hebben wij te berekenen

$$\Delta A^a = -\Sigma\,(b\,c) \int \Gamma^{a}_{bc}\, A^c\, d\mathrm{x}_b\,. \tag{21}$$

Hierin vervangen wij Γ^{a}_{bc} door

$$\Gamma^{a}_{bc} + \Sigma\,(s)\,\Gamma^{a}_{bc,s}\,\mathrm{x}_s\,,$$

waar $\Gamma^{a}_{bc,s}$ het differentiaalquotient van Γ^{a}_{bc} naar x_s voorstelt en zoowel voor dat differentiaalquotient als voor Γ^{a}_{bc} de waarde in P wordt genomen. Verder moeten wij bedenken dat in (21) A^c de c-component is, zooals die is geworden als het punt Q is bereikt. Willen wij onder A^c de oorspronkelijke waarde verstaan, dan moeten wij in (21) A^c vervangen door A^c vermeerderd met de verandering die de component bij de verplaatsing van P naar Q ondergaan heeft. Intusschen behoeven wij die verandering slechts tot in grootheden van de eerste orde te nemen, zoodat wij blijkens de grondformule (19) moeten rekenen met

$$A^c - \Sigma\,(h\,i)\,\Gamma^{c}_{hi}\,A^i\,\mathrm{x}_h\,,$$

waarin ook aan den vóór x_h staanden factor de in P geldende waarde wordt gegeven.

---

[1]) De transformatieformule voor Γ^{a}_{bc} is

$$\left(\frac{\partial x'_a}{\partial x_b} = \pi_{ba}\quad,\quad \frac{\partial x_a}{\partial x'_b} = p_{ab}\right)$$

$$\Gamma'^{a}_{bc} = -\Sigma\,(kl)\,p_{kc}\,p_{lb}\,\frac{\partial \pi_{ka}}{\partial x_l} + \Sigma\,(k\,l\,m)\,p_{lb}\,p_{mc}\,\pi_{ka}\,\Gamma^{k}_{lm} \tag{20}$$

Als hier in het tweede lid alleen de laatste term stond, zou Γ^{a}_{bc} een tensor zijn. Daar $\frac{\partial \pi_{ka}}{\partial x_l} = \frac{\partial \pi_{la}}{\partial x_k}$ is volgt uit (20) dat ook Γ'^{a}_{bc} de door (18) uitgedrukte symmetrie heeft.

Na substitutie van een en ander in (21) verdwijnt de term met $\int d\mathrm{x}_b$, terwijl men dien met het product $\mathrm{x}_s\,\mathrm{x}_h$ mag weglaten. Dus:

$$\triangle A^a = -\Sigma\,(b\,c\,s)\,\Gamma^a_{bc,s}\,A^c \int \mathrm{x}_s\,d\mathrm{x}_b + \Sigma\,(b\,c\,h\,i)\,\Gamma^a_{bc}\,\Gamma^c_{hi}\,A^i \int \mathrm{x}_h\,d\mathrm{x}_b\,,$$

of na vervanging in den eersten term van c en s door i en h, en na een voor de hand liggende samenvatting van termen (verg. § 9)

$$\triangle A^a = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(b\,i\,h)\,B^a_{i\,h\,b}\,A^i \int \mathrm{x}_h\,d\mathrm{x}_b\,, \tag{22}$$

waarin

$$B^a_{i\,h\,b} = \Gamma^a_{hi,b} - \Gamma^a_{bi,h} + \Sigma\,(c)\left[\Gamma^a_{bc}\,\Gamma^c_{hi} - \Gamma^a_{hc}\,\Gamma^c_{bi}\right] \tag{23}$$

is. In het algemeen is dit niet nul, zoodat, als men in het punt van uitgang is teruggekeerd, de componenten van den vector veranderd zijn. Gemakkelijk toont men aan dat $B^a_{i\,h\,b}$ een tensor is, covariant wat de indices i, h, b en contravariant wat den index a betreft [1]).

Uit dezen kan men nu een covarianten tensor van den tweeden rang G_{ih} afleiden door $b = a$ te stellen en vervolgens naar a op te tellen. Dat inderdaad

$$G_{ih} = \Sigma\,(a)\,B^a_{i\,h\,a} \tag{24}$$

een tensor van den genoemden aard is volgt uit de transformatieformule voor $B^a_{i\,h\,b}$ [2]).

---

[1]) Men mag in (22) op A^i de transformatieformule voor de componenten van het lijnelement toepassen; evenzoo op x_h, daar deze grootheid als oneindig klein wordt behandeld, en op $\triangle A^a$ omdat dit het verschil van twee vectoren in *hetzelfde* punt is. Dit alles met de waarden der grootheden p_{ab} en π_{ab} in het punt P. Die waarden gebruiken wij ook bij de transformatie van $d\,\mathrm{x}_b$ (ofschoon dit element op eenigen afstand van P ligt) daar men anders tot grootheden van te hooge orde zou komen. Dus:

$$\triangle A'^k = \Sigma\,(a)\,\pi_{ak}\,\triangle A^a = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(a\,b\,i\,h)\,\pi_{ak}\,B^a_{i\,h\,b}\,A^i \int \mathrm{x}_h\,d\mathrm{x}_b$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(a\,b\,i\,h\,l\,m\,n)\,\pi_{ak}\,p_{il}\,p_{hm}\,p_{bn}\,B^a_{i\,h\,b}\,A'^l \int \mathrm{x}'_m\,d\mathrm{x}'_n\,,$$

wat denzelfden vorm heeft als (22), indien men

$$B'^k_{l\,m\,n} = \Sigma\,(a\,b\,i\,h)\,\pi_{ak}\,p_{il}\,p_{hm}\,p_{bn}\,B^a_{i\,h\,b}$$

stelt.

[2]) Men drukt in

$$G'_{ih} = \Sigma\,(a)\,B'^a_{i\,h\,a}$$

B' in de grootheden B uit en maakt gebruik van

$$\Sigma\,(a)\,\pi_{ba}\,p_{ca} = \delta^c_b\,.$$

Bij willekeurige keus der grondgetallen is de tensor G_{ih} noch symmetrisch, noch antisymmetrisch. Men kan hem echter in twee deelen splitsen, waarvan het eene symmetrisch en het andere antisymmetrisch is. Die deelen zijn

$$R_{ih} = \tfrac{1}{2}(G_{ih} + G_{hi}) \quad \text{en} \quad F_{ih} = \tfrac{1}{2}(G_{ih} - G_{hi}).$$

Men overtuigt zich er gemakkelijk van dat dit covariante tensoren zijn en ziet aanstonds dat $R_{hi} = R_{ih}$ en $F_{hi} = -F_{ih}$ is.

Voert men de boven aangegeven bewerkingen, waardoor men van den tensor (23) tot F_{ih} komt, uit en neemt men daarbij de betrekkingen (18) in aanmerking, dan vindt men

$$F_{ih} = \tfrac{1}{2} \Sigma(a) \left(\Gamma^{a}_{ah,i} - \Gamma^{a}_{ai,h} \right)$$

en hieruit blijkt dat de tensor F van een viertalligen potentiaal A_k afhankelijk is. Stelt men n.l.

$$A_k = \tfrac{1}{2} \Sigma(a) \Gamma^{a}_{ak}, \tag{25}$$

dan is

$$F_{ih} = \frac{\partial A_h}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_h}. \tag{26}$$

EDDINGTON identificeert nu de grootheden F_{ih} met de componenten van de electrische en de magnetische kracht, of wel de componenten A_k met die van den viertalligen electromagnetischen potentiaal.

Hierbij moet worden opgemerkt dat de grootheden A_a, als wij ze door (25) definieeren, geen tensor vormen. Wil men dat dit wel het geval is, dan kan men die vergelijkingen vervangen door [1])

$$A_k = \tfrac{1}{2} \Sigma(a) \Gamma^{a}_{ak} + \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

waarin ψ een functie van de coördinaten is, met de transformatieformule

$$\psi' = \psi - \tfrac{1}{2} \log p \tag{27}$$

(p de functionaaldeterminant der oude coördinaten naar de nieuwe). De toevoeging der van ψ afhankelijke termen [1]) is bij (26) zonder invloed.

---

[1]) Men heeft, als men van (20) gebruik maakt,

$$A'_r = \tfrac{1}{2} \Sigma(a) \Gamma'^{a}_{ar} + \frac{\partial \psi'}{\partial x'_r} = -\tfrac{1}{2} \Sigma(akl)\, p_{kr}\, p_{la} \frac{\partial \pi_{ka}}{\partial x_l} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma(aklm)\, p_{la}\, p_{mr}\, \pi_{ka}\, \Gamma^{k}_{lm} + \frac{\partial \psi}{\partial x'_r} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log p}{\partial x'_r}.$$

Hier heffen de eerste en de laatste term elkaar op. Want (men bedenke

$$\Sigma(a)\, p_{la}\, \pi_{ka} = \delta^{l}_{k} \quad \text{en dus} \quad \Sigma(a) \frac{\partial}{\partial x_l}(p_{la}\, \pi_{ka}) = 0\,)$$

§ 13. Wij zijn nu zoover gekomen dat wij uit de grondgetallen de componenten van de electrische en de magnetische kracht F_{ih} hebben afgeleid. Daar zij van een viertalligen potentiaal blijken af te hangen, voldoen zij aan het eene viertal der vergelijkingen van MAXWELL. Wat echter het andere viertal betreft, de vergelijkingen nl. die in het tweede lid de dichtheid der electrische lading en de componenten van den convectiestroom bevatten, daarin moet noodzakelijk een contravariante tensor voorkomen. In den vorm, dien EINSTEIN aan de electromagnetische vergelijkingen heeft gegeven, zijn de componenten van dien tensor

$$F^{ab} = \sqrt{-g}\, \Sigma(ih)\, g^{ai}\, g^{bh}\, F_{ih},$$

zoodat men, om het tweede viertal vergelijkingen op te stellen, de zwaartekrachtspotentialen moet invoëren, wat wij tot nog toe niet behoefden te doen.

Intusschen kan men, zooals EDDINGTON opmerkt, ook de zwaartekrachtspotentialen uit de grondgetallen laten voortkomen. Deze gaven ons nl. (§ 12) ook den symmetrischen tensor R_{ih} en men kan den tensor g_{ih} met dezen identificeeren door te stellen

$$g_{ih} = \frac{1}{\lambda} R_{ih},$$

waar λ een of andere constante is. Dan zou dus alles wat men in de theorie noodig heeft uit de grondgetallen zijn afgeleid.[1])

§ 14. Klaarblijkelijk komt het in §§ 11—13 gezegde op niets anders neer dan een voorschrift hoe met de grondgetallen zal worden gewerkt om er de grootheden die het electromagnetisch veld bepalen

---

voor den eersten kan men schrijven

$$\tfrac{1}{2}\, \Sigma(l) \frac{\partial p_{lr}}{\partial x_l} = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(lu)\, \pi_{lu} \frac{\partial p_{lr}}{\partial x'_u} = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(lu)\, \pi_{lu} \frac{\partial p_{lu}}{\partial x'_r}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \Sigma(lu) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial p_{lu}} \frac{\partial p_{lu}}{\partial x'_r} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log p}{\partial x'_r}.$$

Substitueert men verder in den derden term

$$\frac{\partial}{\partial x'_r} = \Sigma(m)\, p_{mr} \frac{\partial}{\partial x_m},$$

dan komt er

$$A'_r = \Sigma(m)\, p_{mr}\, A_m.$$

Men merke op dat de door (27) bepaalde transformaties een groep vormen.

[1]) Men kan nl. nog stellen

$$\psi = -\tfrac{1}{2} \log \sqrt{-g},$$

waardoor aan (27) voldaan is.

en, zoo men wil, de zwaartekrachtspotentialen uit af te leiden. Daarbij is de bedoeling dat de grondgetallen (die wij ons eerst als willekeurig gekozen voorstelden) op een of andere wijze door den toestand van het veld bepaald zijn en omgekeerd dien toestand karakteriseeren, dat zij nl. zulke waarden hebben, dat de componenten van de electrische en de magnetische kracht en eventueel de gravitatiepotentialen juist de werkelijke grootte krijgen.

Hierbij moet worden opgemerkt dat het aantal grondgetallen veel grooter is dan het aantal physische grootheden voor welker bepaling zij moeten dienen. Beperkt men zich tot het electromagnetische veld, dan heeft men zelfs slechts de vier grootheden (25) noodig, in welke van de 40 grondgetallen er slechts 16 gebruikt worden, die dan nog vier aan vier bij elkaar worden opgeteld. Wil men ook de zwaartekrachtspotentialen uit de grondgetallen doen voortvloeien, dan heeft men 40 grootheden ingevoerd om er 14 uit af te leiden.

De vraag is of dit aanbeveling verdient en of het niet wel zoo doelmatig is, rechtstreeks de 14 grootheden in elk punt van R_4 als kenmerkend voor het electromagnetische veld en het gravitatieveld in te voeren. Eerst wanneer men grond heeft om aan te nemen dat de verscheidenheid die het systeem der grondgetallen toelaat, en die grooter is dan de verscheidenheid der waargenomen verschijnselen, een physischen achtergrond heeft, dat er iets reëels, ofschoon nu nog niet bekend, aan beantwoordt, wordt de invoering der grondgetallen van waarde en zelfs van zeer groote waarde.

Een belangrijke vraag is natuurlijk of men deze getallen altijd zoo kan kiezen dat zij aan een werkelijk bestaand electromagnetisch veld en gravitatieveld beantwoorden. Met het oog op het groote aantal waarden waarover men kan beschikken, zou men geneigd zijn, dat te verwachten, maar dit neemt niet weg dat het niet gemakkelijk valt waarden der zwaartekrachtspotentialen als $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = c^2$ uit een eenigszins eenvoudig stelsel van grondgetallen af te leiden. Eindelijk kan worden opgemerkt dat, zoo men met de grondgetallen het diepst in de verschijnselen doordrong, werkelijk fundamenteele vergelijkingen die zouden zijn, waardoor de grondgetallen bepaald worden. In dezen gedachtengang zou men er toe komen, als b.v. een electromagnetisch veld een gravitatieveld teweegbrengt, in EINSTEIN's veldvergelijkingen alles in de grondgetallen uit te drukken. Dit zou echter tot formules van een hopelooze ingewikkeldheid leiden.

§ 15. Ten slotte moge nog met een enkel woord op de overeenkomst tusschen de formules (10) en (19) worden gewezen. Daar

„richtingsconstanten" ook kunnen worden opgevat als de componenten van een vector van de grootte één, bevat (10) zoowel als (19) een voorschrift voor een uitgekozen verschuiving van een vector. Derhalve is (10) als een bijzonder geval van (19) te beschouwen. Ook voor dit bijzondere geval kan men op de in § 12 aangegeven wijze te werk gaan; men heeft slechts Γ^a_{bc} door $\left\{ \begin{matrix} b\,c \\ a \end{matrix} \right\}$ te vervangen, waarbij aan (18) voldaan is. De door (23) en (24) bepaalde tensoren B^a_{ihb} en G_{ih} gaan dan in de bekende krommingstensoren over. De laatste, en dit is in de gravitatietheorie van belang, is symmetrisch. Dit volgt hieruit, dat thans het antisymmetrische deel (26) verdwijnt.

Men heeft nl. volgens (25)

$$2A_k = \Sigma(a) \left\{ \begin{matrix} a\,k \\ a \end{matrix} \right\} = \Sigma(a\,b)\, g^{ab} \begin{bmatrix} a\,k \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \Sigma(a\,b)\, g^{ab} \left(\begin{bmatrix} a\,k \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\,k \\ a \end{bmatrix} \right) = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(a\,b)\, g^{ab}\, g_{a\,b,\,k}$$

$$= \frac{1}{2g}\, \Sigma(a\,b)\, \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_k}.$$

Physiologie. — J. B. ZWAARDEMAKER: „*De reguleerende hartzenuwen van Petromyzon fluviatilis*".

(Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en R. MAGNUS).

In de 2e ed. van zijn „Physiologie des Kreislaufs" merkt TIGERSTEDT [1]) op, dat remmende hartzenuwen bij bijna alle gewervelde dieren voorkomen. Slechts enkele cyclostomen maken hierop een uitzondering. GREENE [2]) vond, hoe bij een myxine electrische prikkeling vanuit hersenen, ruggemerg of vagi zonder invloed op de frequentie van den hartslag bleef. CARLSON [3]) bevestigde deze vondst en trachtte het onderzoek tot de andere groep der cyclostomen, de petromyzonten, uit te breiden. Eerst had hij slechts de beschikking over het larvenstadium. Hierbij bleken reguleerende hartzenuwen afwezig. Later onderzocht hij volwassen dieren [4]). Wanneer hij hierbij de medulla oblongata electrisch prikkelde, ongeveer op de plaats, waar de vagus uittreedt, dan zag hij een kortdurenden stilstand, die vervolgens plaats maakte voor een versneld rythme. Hij besluit hieruit: "the central nervous system is connected with the heart by ordinary augmentor and probably also by inhibitory nerves" (l. c. p. 231).

JOHANNES MÜLLER noemt in het vervolg op zijn „Vergleichende Anatomie der Myxinoiden" een verbinding tusschen N. sympathicus en hartzenuwen [5]); hij maakt dan tevens eenige opmerkingen over den N. vagus, waarvoor ik echter meen naar het oorspronkelijke te moeten verwijzen (l. c. p. 59 c. a.)

De eerste proeven, die ik zelf deed om na te gaan of bij den Petromyzon fluviatilis van het centraal zenuwstelsel eenige invloed op de hartswerking uitgaat, vielen negatief uit, conform GREENE en de eerste proefreeks van CARLSON [6]). Ik ben echter in de gelegenheid geweest mijn onderzoek voort te zetten. Om aan eigen bewegingen

[1]) R. TIGERSTEDT, Die Physiologie des Kreislaufs II p. 319.

[2]) CH. W. GREENE, Amer. Journ. of Physiol. VI p. 318 1901.

[3]) A. J. CARLSON, Zeitschr. f. allg. Physiol. IV p. 259 1904.

[4]) A. J. CARLSON, Amer. Journ. of Physiol. XVI p. 230 1906.

[5]) J. MÜLLER, Fortsetzung der vergleichenden Anatomie der Myxinoiden p. 57, Berlin 1838.

[6]) J. B. ZWAARDEMAKER, Physiologendag Amsterdam Dec. 1922.

van het dier te ontkomen, curariseerde ik het vooraf. Algemeene verlamming der skeletspieren wordt bij visschen slechts door zeer groote doses bewerkt [1]). Voor mijn proefdieren gebruikte ik 4 mgr. tubo curare, waarvan 2 mgr. intraperitoneaal ingespoten, in staat waren 220 gram rat na 7 minuten te verlammen. Daardoor wordt ook een mogelijke vagusfunctie beinvloed [2]), doch dit bezwaar liet zich door de gevolgde techniek terzijde stellen, daar de vagusuiteinden zich eerder herstellen dan de motorische innervatie.

De prik werd na de injectie met rust gelaten tot geen stelreflexen meer waarneembaar zijn. Ook de kieuwkorf staat dan geheel stil. De groote hersenen worden op dat oogenblik van het overige zenuwstelsel gescheiden door een snede achter langs beide oogen. Daarna worden hersenen en ruggemerg blootgelegd tot aan het 2e kieuwgat. Nu wordt een rechte glazen canule in de Vena cava dextra gebracht en van hieruit wordt het dier in buikligging eenigen tijd doorstroomd met RINGER'sche vloeistof, waarin $6^1/_2$ gr. NaCl, 200 mgr. $NaHCO_3$, 200 mgr. $CaCl_2$, 200 mgr. KCl [3]). Het teveel aan curare wordt hierdoor gaandeweg uitgewasschen. Het atrium wordt bevestigd, door een venster van het kraakbeenig pericardium [4]), aan een hefboom onder het dier. Nu worden twee dunne platina electroden goed zichtbaar vastgezet op de plaats, van waaruit prikkeling het beoogde effect teweegbrengt. Bij sterk gecurariseerde dieren duurt het soms vrij lang, voordat eenige werking zichtbaar wordt. Op dat oogenblik echter is het dier volkomen rustig en kan men zeker zijn alleen de bewegingen van het hart te registreeren. In latere stadien der doorstrooming ziet men ook beweging van de kieuwkorf. De electroden zijn verbonden met de secundaire klos van een slede van DU BOIS-REIJMOND, voorzien van een NEEF'schen hamer. In de primaire keten staat een accumulator. Het Pfeil-

---

[1]) *a*. J. SCHIFFER, Arch. f. Anat. u. Physiol. p. 453, 186 8.

b. J. STEINER, ibid 1875.

c. BOLL, Mon. Ber. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. Nov. 1875.

d. J. STEINER, Das americanische Pfeilgift Curare p. 56.

c. en *d*. geciteerd naar R. BOEHM in het Handbuch der experimentellen Pharmacologie II 1. Hälfte p. 183.

[2]) R. BOEHM, l. c. p. 202

[3]) J. B. ZWAARDEMAKER, Diss. Utrecht 1922.

[4]) Bij het openen van het pericardium verandert dit plotseling van kleur. Voordien ziet men het hart blauwachtig door het kraakbeenige weefsel heenschemeren; na het openen vertoont het pericard zijn eigen melkwitte kleur, terwijl het atrium nu op den bodem van de holte blijkt te liggen. Klaarblijkelijk heerscht in het pericardium een negatieve druk, die bij het openen er van natuurlijk verloren gaat, waardoor het atrium gedeeltelijk samenvalt.

signaal, dat soms werd gebruikt (bijv. in de eerste figuur) kon niet in shunt worden geplaatst, dus kwam het in de primaire keten. De gevonden rolafstanden (R. a.) zijn dan kleiner dan wanneer geen signaal is ingeschakeld. Prikkelt men, dan ziet men hoe kort, nadat

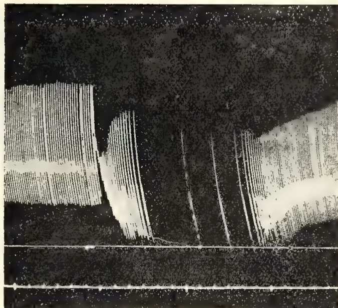


Fig. 1.
Accelerans-vagus effect.
Petromyzon fluviatilis. Doorstroomd met Ringer'sche vloeistof. Prikkeling gedurende 5 sec. van medulla oblongata ter plaatse van het uittreden des N. vagus. R. a. 100.
Onder elkander registratie van atrium beweging,
" " prikkelsignaal,
" " tijdlijn 10 sec.

de prikkeling begint, een aanzienlijke versnelling optreedt. Werkt de prikkel slechts korten tijd (in fig. 1 bijv. 5 secunden), dan ziet men, hoe deze versnelling weldra verdwijnt en plaats maakt voor een vertraging; wordt deze grooter dan komt het tot stilstand. Nadat het negatief chronotroop effect voorbij is, treedt opnieuw een rythme op, sneller dan het oorspronkelijke. Eenigen tijd later maakt het dan voor het oude rythme plaats. In figuur 1 is het rythme voor den prikkel ± 45 slagen per minuut, na den stilstand treft men een frequentie van 55 aan. De werking van stroomlissen op de hartspier zelve is bij deze experimenten uit te sluiten, omdat het effect alleen komt, wanneer een zeer scherp omgrensde plaats in het verlengde merg wordt geprikkeld en een geringe verschuiving der electroden het effect te niet doet. Bovendien is summatie van grooten invloed. Een prikkel bijv., die bij inwerking gedurende 2 of 5 seconden geen invloed heeft, brengt na langeren tijd inwerken duidelijken stilstand teweeg.

Laat men in plaats van slechts korten tijd te prikkelen, den stroom voortdurend doorgaan, dan ziet men eerst een aanzienlijke versnelling van het rythme, gepaard aan een sterk positief inotroop effect. Klaarblijkelijk is dit een accelerans werking. Verbreekt men

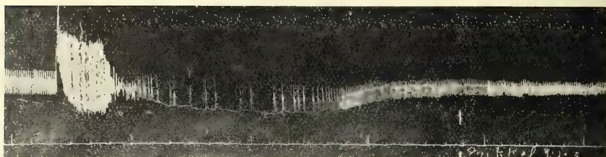


Fig. 2.
Petromyzon fluviatilis.
Vermoeienis van accelerans en vagus door permanente prikkeling vanuit medulla oblongata. Bij eerste verheffingen begint prikkel. R.a. 143. Deze duurt tot streepje. Tijd 10 sec.

gedurende deze periode den stroom, dan treedt zeer snel een stilstand op, die door nieuwe prikkeling direct kan worden verbroken. Gaat de prikkel echter onafgebroken voort, dan ziet men na eenigen tijd (in fig. 2 ± een halve minuut) spontaan een langzamer rythme optreden, terwijl ook de hoogte der contracties gaandeweg afneemt. Het is de overgang tot een duidelijk vagus-effect. Heeft ook dit een zekeren tijd geduurd (in fig. 2 ongeveer 1 min.) dan komt het daarna tot een rythme, dat slechts even sneller is dan het normale of hier in het geheel niet van afwijkt en dan na het verbreken van den stroom onveranderd voortduurt.

Doorstroomt men het dier in plaats van met kaliumhoudende vloeistof met kaliumvrije, uraniumhoudende, dan ziet men, dat de verschijnselen bij K- en U-toestand practisch dezelfde zijn. Men ziet eerst een versnelling, dan een vertraging. In sommige gevallen volgt hierop weer een versnelling. Deze is echter nooit zoo uitgesproken als in het begin der prikkeling.

Uit het bovenstaande blijkt, dat:

1°. bij Petromyzon fluviatilis reguleerende hartzenuwen aanwezig zijn,

2°. bij de gebruikte techniek na uitwassching van curare de prikkelbaarheid van de hartzenuwen eerder terugkeert dan die der motorische zenuwen,

3°. bij het gecurariseerde dier de accelerans korter latente periode heeft dan de vagus,

4°. bij langdurende prikkeling eerst het accelerans-effect en daarna het vagus-effect duidelijk wordt,

5°. na kortdurende prikkeling het vagus-effect pas na ophouden van de prikkeling optreedt,

6°. na afloop van de vaguswerking soms een versnelling volgt, die misschien is toe te schrijven aan een langer nawerken der accelerans-prikkeling.

Voor de boekerij worden de volgende geschenken aangeboden:

1°. Door den Heer F. A. F. C. WENT een exemplaar van zijn „*Leerboek der algemeene plantkunde*".

2°. Door den Heer L. E. J. BROUWER, namens Prof. R. WEITZENBÖCK, een exemplaar van diens „*Invariantentheorie*".

3°. Door den Heer H. R. KRUIJT een exemplaar van „*Premier rapport de la commission internationale des éléments chimiques. Tables internationales des isotopes et des éléments radioactifs* 1923" (Union internationale de la chimie pure et appliquée).

4°. Door den Heer L. RUTTEN: „*Geological, petrographical and palaeontological results of explorations, carried out from September* 1917 *till June* 1919 *in the island of Ceram*" by L. RUTTEN and W. HOTZ. First series: Petrography N°. 1, H. DE JONG: „*Studien über Eruptiv- und Mischgesteine des Kaibobogebietes* (*West Ceram*)."

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

In de mededeeling van den Heer W. F. GISOLF, opgenomen in dit deel, blz. 160—167, zijn de figuren op blz. 162—163 verkeerd ingevoegd, zoodat op blz. 162 fig. 2 met het onderschrift van fig. 1 en op blz. 163, fig. 1 met het onderschrift van fig. 2 abusief voorkomt.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 28 APRIL 1923.

DEEL XXXII.

N°. 4.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

De Voorzitter verwelkomt den Heer EMILE ARGAND, hoogleeraar aan de Universiteit te Neuchâtel, die als gast de vergadering bijwoont.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van den Minister van Koloniën dd. 11 April 1923 10e Afdeeling N°. 17, met dankbetuiging voor het namens de Afdeeling gegeven advies betreffende de door den militair-apotheker A. GOUDSWAARD ontdekte bereidingswijze van aloïne, welk advies door den Minister is ter kennis gebracht van den Gouverneur van Curaçao en van den Heer GOUDSWAARD.

Aangenomen voor kennisgeving.

2°. Kantschrijven van den Minister van O. K. en W. dd. 14 April j.l. N°. 1924, Afd. K. W., waarbij wordt toegezonden een uit het „Journal officiel" geknipt Presidentieel Besluit dd. 25 Maart 1923, waarin is opgenomen eene wijziging van het Besluit over het „Office National des recherches scientifiques et industrielles et des inventions".

Een afschrift van dit Besluit zal gezonden worden aan de W. A. C.-commissie.

3°. Missive van den Minister van O. K. en W. dd. 17 April 1923 N°. 1887, Afd. K. W., met de mededeeling dat H. M. de Koningin de herbenoeming van de Heeren F. A. F. C. WENT en A. F. HOLLEMAN, respectievelijk tot Voorzitter en Onder-Voorzitter der Afdeeling, heeft bekrachtigd.

Aangenomen voor kennisgeving.

4°. Uitnoodiging van de „*Société de Biologie*" te Parijs tot bijwoning der feestelijkheden ter gelegenheid van de herdenking van het 75-jarig bestaan van dat Genootschap op 26 Mei a. s.

Op een vraag van den Voorzitter verklaart de Heer H. ZWAARDEMAKER zich bereid de Akademie bij die gelegenheid te vertegenwoordigen.

5°. Missive van den Minister van O. K. en W. dd. 26 April 1923 N°. 2155, Afd. K. W., ter toezending van een afschrift van het Kon. Besluit, waarbij de Heeren H. A. BROUWER, G. A. F. MOLENGRAAFF en P. VAN ROMBURGH zijn benoemd tot gedelegeerden van de Nederlandsche Regeering bij het in Augustus en September a. s. te Melbourne en Sydney te houden „*Pan Pacific Congress*".

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter deelt mede dat hij vernomen heeft dat op 24—28 Mei a.s. de Heeren C. EYKMAN en F. M. JAEGER de Nederlandsche Universiteiten zullen vertegenwoordigen te Parijs bij de herdenking van het feit, dat vóór een eeuw LOUIS PASTEUR geboren werd.

Op een vraag van den Voorzitter of deze heeren bereid zullen zijn ook de Akademie bij die gelegenheid te vertegenwoordigen, wordt door hen bevestigend geantwoord.

Plantkunde. — D. TOLLENAAR: „*Donkergroeireacties*".

(Aangeboden door de Heeren A. H. BLAAUW en J. C. SCHOUTE).

In onze vorige publicatie over de licht- en donkeradaptatie van *Phycomyces nitens* (Deze Verslagen Deel XXX N°. 1, 1921) werd reeds in een groot aantal proeven het bestaan van de zoogenaamde „donkergroeireactie" bewezen, d.w.z. er treedt een groeireactie op, wanneer een aan licht geadapteerde sporangiëndrager van *Phycomyces nitens* (door urenlange 4-zijdige belichting) in het donker wordt geplaatst.

Het kwam ons de moeite waard voor na te gaan in hoeverre deze donkergroeireactie van *Phycomyces nitens* (waarmee de negatieve nabeelden van het menschelijk oog waarschijnlijk in den grond vergelijkbaar zijn) ook bij andere organen voorkomt.

In deze mededeeling vindt men de uitkomsten vermeld betreffende de donkergroeireacties van den sporangiëndrager van *Phycomyces nitens*, de hypocotylen van *Helianthus globosus*, de coleoptielen van *Avena sativa*, de wortels van *Avena sativa* en van de wortels van *Sinapis alba*.

Zooveel mogelijk zijn de resultaten vergeleken met de lichtgroeireacties voor zoover die tot dusver bekend zijn.

Methode en nauwkeurigheid der uitkomsten.

Bij alle proeven geschiedde de voorafgaande belichting 4-zijdig, terwijl de temperatuur constant werd gehouden door middel van den in „Licht u. Wachstum I" beschreven oliethermostaat. Hierdoor kon bij matige belichtingen de temperatuur tot op 0,02° C. constant worden gehouden.

Wij wijzen er hierbij uitdrukkelijk op, dat de groei door ons als regel slechts voldoende constant werd geoordeeld, zoolang deze niet meer dan 10 °/₀ schommelde of m. a. w. bij een gemiddelde groeisnelheid van 100 geen snelheden voorkwamen, grooter dan 105 en

geen kleiner dan 95. Hierdoor wordt het ons nl. mogelijk groeireacties te constateeren, die meer dan 5 °/₀ boven of onder het gemiddelde gaan, dus groeireacties van 10 °/₀ versnelling of vertraging kunnen wij eenigszins zeker beginnen te constateeren.

Wij deelen dit mede, om de figuren en de overzichten de waarde te geven, die aan deze toekomt, wat anders zonder de volledige gegevens, — welke wij hier uit het oogpunt van plaatsruimte achterwege laten, maar die alle nog dit jaar in de Mededeelingen der Landbouw-Hoogeschool zullen verschijnen — niet te beoordeelen valt.

Zoolang echter door onvoldoende constantheid der uitwendige omstandigheden of door inwendige oorzaken, de groei reeds vóór de verandering in de lichtomstandigheden sterk schommelt, valt begrijpelijkerwijze een groeireactie als gevolg van dezen éénen factor niet meer met nauwkeurigheid te constateeren. Daar nu slechts zelden groeireacties van meer dan 50 °/₀ optreden, zijn deze niet aantoonbaar zoolang de groei reeds vooraf dergelijke variaties toont. Helaas is dit bij de gegevens in de literatuur meermalen het geval. Wij herhalen, *dat wij slechts organen voor de reacties gebruikten, waarvan de groeischommelingen als regel niet grooter waren dan* 10 °/₀.

De bijgevoegde figuren stellen alle de reactie voor van individuën, die zoo goed mogelijk het gemiddelde type nabijkomen. Slechts bij *Phycomyces nitens* werd een schematische figuur van het reactieverloop weergegeven. Dergelijke figuren, waarin het reactietype van een bepaalde proefserie wordt samengesteld, zijn evenals in de meeste vroegere door Blaauw gepubliceerde curven in hoofdzaak gebaseerd op de zoogenaamde *cardinale punten*, die in de reacties van alle individuën aan den dag komen. Deze cardinale punten zijn: 1° het gemiddelde tijdstip, waarop de groeireactie aanvangt; 2° de gemiddelde tijd, waarop de reactie haar eerste hoogtepunt (hetzij groeimaximum of groeiminimum) bereikt; 3° de gemiddelde snelheid, die de groei op dat moment bezit in procenten van de oorspronkelijke groeisnelheid; en vervolgens wederom de gemiddelde tijd, waarop eventueel een verder top of dal optreedt en de gemiddelde snelheid, die de groei dan op dat moment bereikt.

Donker- en lichtgroeireacties van Phycomyces nitens.

De lichtgroeireacties zijn bekend uit de resultaten van Blaauw, gepubliceerd in „Licht u. Wachstum III" (Med. d. Landb. Hoogesch., 1918), p. 108. De cardinale punten laten we hieronder voor eenige intensiteiten volgen:

TABEL I.

Lichtintensiteit	Eerste reactie na begin der belichting	Maximum der reactie		Eindsnelheid
		na begin der belichting	in % der groeisnelheid in donker	
1/8 MK.	8 Min.	$9^1/_2$ Min.	141 %	102 %
1 „	$5^1/_2$ „	9 „	148 %	103 %
8 „	$5^1/_2$ „	$8^1/_2$ „	152 %	111 %
64 „	4 „	8 „	174 %	112 %

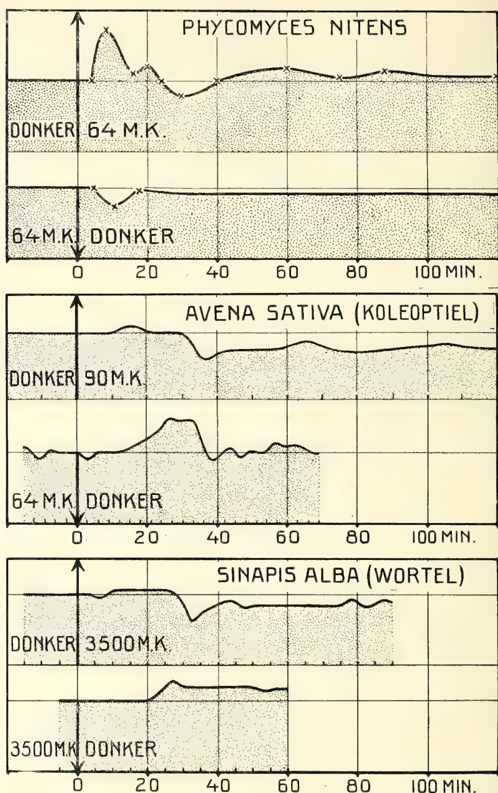
Aan belichtingen van 1/512, 1/64, 8 en 64 M.K. aangepaste sporangiëndragers werden bij een temperatuur van ongeveer 17° C. verdonkerd, terwijl de groeimeting werd voortgezet. De optredende groeireacties, welke bestonden in een groeivertraging waren zeer karakteristiek. De cardinale punten, berekend uit 5—6 proeven per keer, vindt men in onderstaande tabel vereenigd.

TABEL II.

Aangepast aan	Eerste reactie na begin der verdonkering	Minimum van den groei	
		na begin der verdonkering	in % der groeisnelheid in licht
1/512 MK.	10½ Min.	12½ Min.	89 %
1/64 „	6½ „	12½ „	85 %
8 „	6 „	11 „	67 %
64 „	4½ „	10 „	73 %

De reactie bij 64 MK. werd aan de hand van een grooter aantal waarnemingen (19) nagegaan. Zoo viel uit de daarbij verkregen uitkomsten verder nog af te leiden een maximum na ongeveer 17 min. met een groeisnelheid van ongeveer 98½ % van die in licht, terwijl daarna de schommelingen steeds onduidelijker worden en na $1^3/_4$—2 uur uiterlijk voor den groei het evenwicht is ingetreden. De groeisnelheid blijkt dan 93 % van die in licht te zijn geworden, met een middelbare fout van ± 1 %.

Uit vergelijking der bovenstaande overzichten zijn duidelijk waarneembaar de tegengestelde reacties, welke door het licht en donker maken worden teweeggebracht. (Zie de figuur).

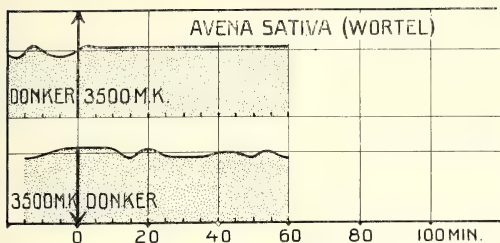


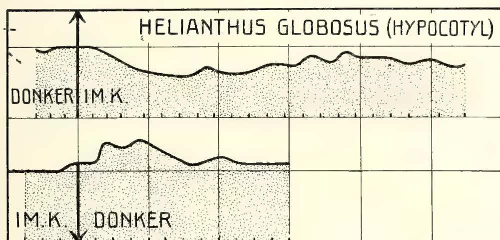
FIGUURVERKLARING.

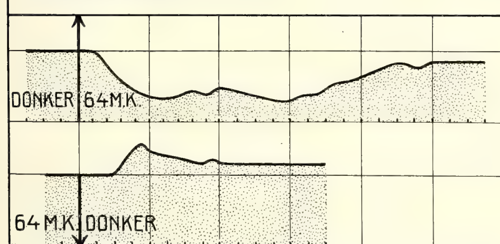
Deze figuren zijn twee aan twee gerangschikt en wel zoo, dat eerst het groeiverloop wordt afgebeeld, wanneer het orgaan in donker stond en dan blijvend verlicht wordt (↑) en dááronder, wanneer dat orgaan uren lang in licht heeft gestaan en vervolgens donker gemaakt wordt, (↓). De hoogte van het gepuncteerde geeft de groeisnelheid aan.

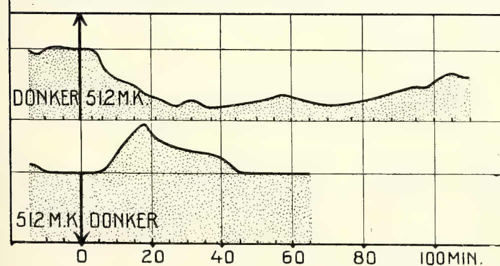
Voor *Phycomyces* zijn de twee groeicurven geconstrueerd volgens het gemiddeld verloop van een aantal individuen, waarbij de cardinale punten met × zijn aangeduid. Voor alle andere organen zijn de curven samengesteld uit de gevonden getallen van één der individuen. De kromme voor het coleoptiel van Avena sativa is geteekend naar een individueele reactie van Koningsberger.

Hoe deze curven zijn geconstrueerd zal in de uitvoerige publicatie nader worden besproken en gemotiveerd.


AVENA SATIVA (WORTEL)
DONKER 3500 M.K.
3500 M.K. DONKER
0
20
40
60
80
100 MIN.


HELIANTHUS GLOBOSUS (HYPOCOTYL)
DONKER 1 M.K.
1 M.K. DONKER


DONKER 64 M.K.
64 M.K. DONKER


DONKER 512 M.K.
512 M.K. DONKER
0
20
40
60
80
100 MIN.

De Donker- en Lichtgroeireacties van Hypocotylen van Helianthus globosus.

De lichtgroeireactie dezer organen is uit ,,L. u. W. II'' voldoende bekend. Deze bestaat in een groeivertraging, welke bij belichting met 1 MK. na 8 min. haar eersten invloed doet gelden ; het minimum van 74 °/₀ der groeisnelheid in licht treedt op na 27—38 minuten, waarna de groei weer tot haar vroegere snelheid terugkeert, tenminste na 3 uur is deze althans bij een gering aantal waarnemingen niet merkbaar anders dan vóór de belichting.

Bij 64 MK. treedt de eerste reactie reeds na ongeveer 3½ min. op, het minimum, dat nu 39 °/₀ bedraagt valt na 20—25 min., terwijl ook daarna de groeisnelheid langzaam op haar beginwaarde terugloopt.

Bij 512 MK. tenslotte is de reactietijd 3½ minuut, het minimum, nu 21 °/₀, valt na ongeveer ½ uur en houdt lang aan. De groeisnelheid blijft zelfs eenige uren na het begin der belichting merkbaar beneden die in donker. Men vergelijke ook de hier bijgevoegde figuren.

Welke reactie treedt nu op, wanneer deze hypocytolen 5—7 *uur aan een constante belichting in hoofdzaak zijn aangepast, en we maken donker?*

De resultaten van deze proeven, uitgevoerd bij ongeveer 20° C. vindt men in onderstaande tabel in het kort samengevat.

TABEL III.

Aangepast aan	Begin der reactie na donker maken	Maximum der reactie		Tweede maximum na
		na begin der verdonkering	in % der groeisnelheid in licht	
1 MK.	7½ Min.	18½ Min.	128 %	40 Min.
64 „	8½ „	19 „	137 %	—
512 „	8½ „	18 „	157 %	—

Na ongeveer anderhalf uur was de groei weder zeer rustig geworden. Wat de snelheid betreft, als wij alle gegevens van 1, 64, en 512 MK. tezamen nemen en de groeisnelheid in licht vergelijken met die, welke 1—2 uur na het donker maken heerscht, dan vinden we van de 14 uitkomsten bij 7 een groeivertraging, bij 6 een versnelling en bij één een onveranderde groeisnelheid, terwijl zich een gemiddelde groeiversnelling van 5 ± 21 °/₀ laat berekenen, zoodat

de kans op het bestaan van een blijvende groeiversnelling gering genoemd mag worden.

Vergelijken we nu de licht- en donkerreacties met elkaar (zie de figuur!), zoo valt ons wederom het tegengestelde verloop op, al is het dan geen volkomen symmetrie. In beide gevallen zien wij de reactie bij hoogere intensiteiten duidelijker optreden (diepere minima, respect. hoogere maxima).

In 't algemeen is de donkerreactie niet zoo krachtig als de lichtreactie. De reactietijd is langer, de groeiverandering is minder intens, het uiterlijke groei-evenwicht is eerder hersteld.

De Licht- en Donkergroeireactie van coleoptielen van Avena sativa.

Door proeven van Koningsberger, Sierp en Vogt is een lichtgroeireactie vastgesteld. Zoo vindt de eerste bij toediening van 90MK. 3 zijdig een minimum van omstreeks 55 % 35—40 minuten na het begin der belichting, daarna een maximum na ongeveer 65—70 minuten (ongev. 80 % der groeisnelheid in donker), terwijl na 90 minuten een tweede minimum optreedt van omstreeks 65—70 % der groeisnelheid in donker. Deze blijft intusschen nog uren lang onregelmatig schommelende. In de figuur is de lichtgroeireactiecurve ontleend aan een individu van tabel 9 uit Koningsbergers dissertatie.

Welke reactie treedt nu op, indien de groeisnelheid gedurende eenige uren in hoofdzaak aan licht is aangepast en we maken donker?

Bij *Helianthus* en *Phycomyces* bleek donker-maken minder intense groeiveranderingen teweeg te brengen, dan „licht". Indien dit ook bij de coleoptielen van *Avena sativa* het geval zou wezen, bestond het gevaar, dat door den onregelmatigen groei van *Avena*, als gevolg van optredende nutaties, deze reactie niet, of onduidelijk tot uitdrukking zou komen.

We hebben daarom gezocht naar een elimineeren of beperken van deze hinderlijke bewegingen. Niet alleen werd een groot aantal Haverrassen in dit opzicht nagegaan, maar ook werden omstandigheden van min of meer vochtig en warm kweeken geprobeerd. Daarbij is het gelukt een Haverras te vinden, „Zwarte President" genaamd, dat bij kweeken in een zeer drogen bodem slechts uiterst zelden hinderlijk nuteert. Zoolang de coleoptielen weinig of geen vochtdruppels afscheiden, was de groei buitengewoon constant en bleef dikwijls binnen den door ons gestelden eisch: niet meer dan 10 % groeivariatie. De temperatuur, waarbij de planten groeiden was ongeveer 22° C. Om over de uitkomsten, bij dit object ver-

kregen een goed oordeel mogelijk te maken, besloten wij reeds in deze mededeeling hiervan de individueele groeireacties in haar geheel te geven. Onze belichting vooraf geschiedde 4-zijdig met 64 MK., welke sterkte slechts weinig afwijkt van die, door de reeds meer genoemde onderzoekers gebruikt. De groeisnelheid is aangegeven in microns per minuut.[1])

N°. 1. Vooraf 4½ *uur bij* 21°,9 *C. met* **64** *MK belicht*:

45 12½ 50 12½ 55 12½ DONKER! 0 12½ 5 12½ 10 12½ 15 12½ 20 13 25 **16** 30 13 35 12 40 10½ 45 9 50 10 55 10½ 1 uur 10½ 1.05 10½ 1 10

N°. 2. Vooraf 4 *uur bij* 21°,9 *C. MK. met* 64 *MK. belicht*:

51 20 54 20 57 20 DONKER! 0 19 3 19 6 19 9 20 12 19 15 18 18 18 21 **22** 24 21 27 18 30 17 33 17 38 16 41 17 44 17 47 18 50 19 53 18 56 18 1 uur 18 1.03 18 1.06.

N°. 3. Vooraf 4 *uur bij* 22°,2 *C. met* 64 *MK. belicht.*

51 21 54 21 57 21 DONKER! 0 22 6 21 9 22 12 24 15 28 18 **29** 21 27 24 26 27 24 30 24 33 25 36 24 39 22 42 23 45 24 48 **25** 51 27 54 27 57 28 1 uur 26 1.03 25 1.06 25 1.09 **25** 1.12.

N°. 4. *Vooraf* 8 *uur belicht met* 64 *MK. bij* 21°,9 C.

50 9 55 8 DONKER! 0 9 5 9 10 11 15 11 20 **12** 25 11 30 10½ 35 10 40 9½ 45 10 50 10 55 9½ 1 uur 9½ 1.05.

N°. 5. Vooraf 6 *uur belicht met* 64 *MK. bij* 22°,0 *C.*

40 9 45 9 50 9 55 9 DONKER! 0 8½ 5 9 10 11 15 12½ 20 **14** 25 12 30 11 35 10 40 10 45 10 50 9½ 55 9 1 uur 9 1.05 9 1.10 9 1.15 9 1.20.

N°. 6. *Vooraf* 4 *uur belicht met* 64 *MK. bij* 21°,1 *C.*

45 26 48 24 51 25 54 25 57 25 DONKER! 0 24 3 24 6 25 9 25 12 25 15 28 19 30 21 33 24 **36** 27 **36** 30 **36** 33 29 36 24 39 24 42 26 45 24 48 25 51 25 54 27 57 27 1 uur 26 1.03 27 1.10.

De optredende donkergroeireacties in bovenstaande gevallen leveren de volgende gemiddelden voor de cardinale punten:

Eerste reactie na begin der verdonkering	Maximum der reactie		Een minimum in de groeisnelheid (behalve in No. 5) na begin der verdonkering
	na begin der verdonkering	in % der groeisnelheid in licht	
16 Min.	± 23½ Min.	133 %	± 42 Min.

In enkele gevallen treedt blijkbaar nog een zwak tweede maximum op na 50—60 min. (N°s. 2, 3, 4 en 6). Van de eindgroeisnelheid is uit deze proeven weinig op te maken. Veel schijnt deze echter niet van die in licht af te wijken.

[1]) De kleine cijfers geven den waarneemtijd aan, waarbij het begin van donkermaken weer op het volle uur (60) gesteld wordt.

In het bovenstaande treedt een duidelijke groeireactie, opnieuw tegengesteld aan de lichtgroeireactie, naar voren. Weer is deze niet zoo intens als de lichtgroeireactie; de eerste geeft nl. een geringere groeiverandering: de golvende beweging is minder heftig (korter durende golving met geringer amplitude).

In de gemiddelden van de licht- en donkergroeireactietabellen van KONINGSBERGER (4) kan men op pag. 51, 52 en 53 een na het donker maken optredend maximum eigenlijk ook terugvinden en wel na ongeveer 20—30 min., dus na omstreeks 25 minuten, maar deze reacties worden door KONINGSBERGER mede in verband met verdere proeven niet als zoodanig opgevat.

In de gevallen, dat VOGT de donkergroeireactie waarnam, valt deze gemiddeld na 21—24 min., d. i. gemiddeld na 22½ min., wat met onze uitkomsten overeenstemt. SIERP vindt zijn maximum gemiddeld na 30½—35½ min., dus na 33 min. We moeten echter niet vergeten, dat deze onderzoeker de belichting met 320 MK. niet in donker, maar in een geringere belichting met 17,7 MK. veranderde, (pag. 699 e. v.).

Wij vonden dus in onze proeven, zoowel na een voorbelichting van 6 en 8 uur, als van 4 en 4½ uur, telkens een donkergroeireactie bij de coleoptielen van *Avena*, welke tegengesteld is aan de lichtreactie van dit orgaan.

De Licht- en Donkergroeireacties van den Wortel van Sinapis alba.

Omdat dit orgaan veel minder lichtgevoelig is, achtte ik het wenschelijk sterkere belichtingen toe te passen, en wel zulke van 3500 MK. Ondanks het inschakelen van een koeler met stroomend water, kon hierbij een langzaam oploopen van de temperatuur van 0°.5—1°.0 C. in den loop van een uur niet worden voorkomen. Bij donker maken, kon door het weer in werking stellen van de verwarming een temperatuurdaling worden voorkomen en grootere schommelingen dan van 0°.05 tot 0°.1 C. kwamen dan niet voor.

De wortels werden 4-zijdig belicht bij 21°.5—22°.8 C. gedurende 3—5 uur. Daarbij werd eerst de optredende lichtgroeireactie vastgesteld, waarbij de volgende gemiddelden werden gevonden:

Eerste reactie na	Minimum van den groei		Groeisnelheid na enkele uren in licht in % der groeisnelheid in donker
	na licht maken	in % der groeisnelheid in donker	
37½ Min.	39½ Min.	79 %	88 %

We zien een duidelijke groeireactie optreden. De groeivertraging blijft bij alle gevallen ook na het bereiken van het nieuwe uiterlijke groei-evenwicht bestaan.

Werd daarna donker gemaakt, dan trad de volgende reactie op:

Eerste reactie na	Maximum van de reactie		Groeisnelheid in donker in % der groeisnelh. in licht
	na donker maken	in % der groeisnelheid in licht	
30½ Min.	35½ Min.	124 %	113 %

Ook hier zien we de tegenstelling tusschen licht- en donkerreactie optreden. Beide zijn vrijwel even geprononceerd.

Intusschen heb ik nog bij een lichtsterkte van 512 MK. de donkergroeireactie nagegaan. Ik vond daarbij als gemiddelde uit 7 proeven:

Eerste reactie na	Maximum der reactie		Groeisnelheid in donker in % van die in licht
	na donker maken	in % der groeisnelheid in licht	
27 Min.	36½ Min.	111 %	105 %

We naderen hier reeds de grens van de nog waarneembare reacties, wat ook bleek uit het feit, dat hierbij een paar planten reeds *geen* waarneembare donkergroeireactie meer gaven. Werden deze planten daarna aan een belichting van 512 MK. onderworpen, dan trad evenmin een lichtgroeireactie op. De gevoeligheid voor licht indertijd door Blaauw gevonden („L. u. W. III") bij Sinapis alba was grooter.

Zoo werd indertijd zelfs een duidelijke reactie bij 64 MK. geconstateerd met een minimum van 81 %, en een groeisnelheid na 2 uur van 91 %, wat een even sterke reactie is, als door ons eerst bij 3500 MK. gevonden werd. Welke oorzaken hiervoor in aanmerking komen (ouder zaad?, ander Sinapis alba-ras?) dient verder te worden onderzocht, en kan wellicht een aanwijzing worden voor den dieperen grond der lichtgevoeligheid.

Het gedrag van den hoofdwortel van Avena sativa, ten opzichte van licht en donker.

Blaauw vond bij lichtsterkten van 64 tot 500 MK. geen waarneembare reactie. Ik heb nu belicht met 3500 MK. Ook dan trad

geen reactie op, of een zóó geringe, dat deze evengoed aan het iets oploopen van de temperatuur kon worden toegeschreven.

Na 3-urige belichting bij een constante temperatuur van 20½°—22½°C. werd donker gemaakt. In geen enkel geval was een zekere reactie te constateeren, d. w. z. de optredende groeischommelingen bleven van de grootte, die ook bij constante omstandigheden voorkomt (kleiner dan 10 %).

Behouden wij ons het bestaan van een dergelijke uiterst zwakke reactie voorzichtigheidshalve voor, zoo kunnen wij overigens opmerken, dat hier het ontbreken van een lichtgroeireactie gepaard gaat met het eveneens ontbreken van een donkergroeireactie.

SAMENVATTING.

1. *Bij de onderzochte organen was bij het optreden van een lichtgroeireactie tevens een donkergroeireactie te vinden, die aan deze in hoofdzaak tegengesteld is.*

2. *Bij het ontbreken van een lichtgroeireactie (Avenawortel) is ook geen donkergroeireactie waar te nemen. Dit samengaan schijnt ook individueel van geldigheid (Sinapiswortel,* 500 *MK.).*

3. *Bij Phycomyces, Avena-coleoptiel en Helianthus-hypocotyl is de donkerreactie minder intensief dan de lichtgroeireactie: de golven hebben kleiner amplitude en houden minder lang aan, zoodat uiterlijk vroeger een constante groeisnelheid intreedt.*

Het blijft te onderzoeken, of ook inwendig het evenwicht spoediger hersteld is dan bij de lichtgroeireactie. Immers evenwicht in de inwendige processen en het optreden van een voor den waarnemer constante groeisnelheid vallen niet samen (7).

Bij het woord „donkergroeireactie", dat gemakshalve gebruikt wordt, dient men echter in het oog te houden, dat niet donker als zoodanig een prikkelreactie bewerkt, maar de verandering in de energietoevoer, hetzij deze plotseling intreedt (lichtgroeireactie), of ophoudt (donkergroeireactie), respect. stijgt of daalt. Dat een orgaan bij ophouden van energietoevoer zwakker en korter reageert, d. w. z. spoediger tot rust komt dan bij intreden van energietoevoer, is op zich zelf wel begrijpelijk.

LITERATUUR.

1 en 2. Blaauw, A. H. Licht u. Wachstum I en II (Zeitschrift f. Bot. 1914, **6** en 1915, **7**).

3. Blaauw, A. H. Licht u. Wachstum III (Med. d. Landb. Hoogesch. 1918, **15**).

4. Koningsberger, V. J. Tropismus u. Wachstum (Dissertatie. Utrecht, 1922).

5. SIERP, H. Ein Beitrag zur Kenntniss des Einflusses des Lichts auf das Wachstum der Koleoptile von Avena sativa (Zeitschr. f. Bot. 1918, **10**).

6. SIERP, H. Untersuchungen über die durch Licht und Dunkel hervorgerufen Wachstumsreaktionen bei der Koleoptile von Avena sativa (Eb. 1921, **13**).

7. TOLLENAAR, D. en BLAAUW, A. H. Light and Darkadaptation of a plant cell (Proc. Vol XXIV. Nos. 1, 2 and 3, 1921).

8. VOGT, E. Ueber den Einflusz des Lichtes auf das Wachstum der Koleoptile von Avena sativa. (Zeitschrift f. Bot. 1915, **7**).

9. WEEVERS, TH. „De werking van licht en zwaartekracht op Pellia epiphylla". (Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Deel XXX, 1922).

Wageningen,
April 1923.

Laboratorium voor Planten-physiologisch Onderzoek.

Plantkunde. — TH. VALETON: *„Het Rubiaceën-geslacht Coptosapelta* Korth.".

(Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WENT).

§ 1. Sedert ik in mijn opstel over *Lindeniopsis*, een nieuw ondergeslacht van *Coptosapelta* Korth., in de Verslagen der Akademie van Wetenschappen van 30 Mei 1908 een overzicht gaf van de weinige toen bekende soorten van dat geslacht, trof ik bij de voortgezette bewerking der *Rubiaceae* van den Maleischen Archipel en van Nieuw-Guinea opnieuw een aantal nog niet of niet in het juiste geslacht beschreven soorten ervan aan, waardoor dit aantal tot 10 is gestegen. Uit het onderzoek bleek tevens dat de bestaande en reeds door mij herziene diagnose niet meer op alle soorten van toepassing was. Ik wil dus thans de voornaamste kenmerken van systematisch belang van het geslacht aan een onderzoek onderwerpen en vervolgens een overzicht geven van de nu bekend geworden soorten.

§ 2. *Historisch overzicht.* Het geslacht werd door KORTHALS opgesteld (1851) naar eenige vruchtdragende takken van een liaan, die door zijn ambtgenoot Dr. MÜLLER op de zandige vlakten bij Karrau (Zuid- en Oosterafdeeling Borneo) verzameld waren en die hem bleken tot een nieuw geslacht te behooren in de groep der Cinchonaceae DECANDOLLE, waarvan slechts weinige geslachten in Ned.-Indië bekend zijn.

Als hoofdkenmerken beschouwde hij den liaanachtigen habitus, de vrucht die zich in twee elk weder splijtende kluizen splitst en de schildvormige zaden met een met franje voorzienen vleugel, een combinatie van eigenschappen, die nog in geen geslacht was aangetroffen. Bij het geven van een naam had hij klaarblijkelijk de zaden op het oog. Althans ik meen in het woord *Coptosapelta* de woorden *κοπτω*, in de beteekenis van *„hakken"* of *„houwen"* (om de ingekerfde vleugels) en *πελτη* *„schild"* te herkennen. Wat het tusschenvoegsel „sa" te beteekenen heeft is mij echter duister. Waarschijnlijk was de naam oorspronkelijk: *Coptospelta*, een slechte woordvorming. Als soortsnaam gaf hij aan de plant den naam: *„flavescens"*, die betrekking heeft op de geelachtige tint, die de

bladeren bij het drogen aannemen. Het exemplaar van KORTHALS ontbreekt in de Nederlandsche en N.-Indische Herbaria. Ook blijkt niet dat MIQUEL het gekend heeft (1856). Het was echter aan HOOKER bekend toen hij in 1876 een tweede soort van hetzelfde geslacht, *C. Griffithii* HOOK f., beschreef in Icones plantarum tab. 1089, en daarbij het origineel van KORTHALS en de vindplaatsen Borneo, Sumatra en Malacca aanhaalde.

Een korte beschrijving der soort gaf HOOKER later in HOOK. Flora indica III (1885) voornamelijk ter onderscheiding dezer soort van *C. Griffithii* en een iets meer uitvoerige gaf KING in KING and GAMBLE, Flora of the Mal. Peninsula (1903).

De soort was echter noch aan de aandacht van WALLICH noch aan die van BLUME ontgaan. De eerste publiceerde haar in 1828 abusievelijk als *Stylocoryne macrophylla* (= *Webera macrophylla* ROXB.), de laatste hield haar voor een nieuwe soort van hetzelfde geslacht en gaf er een korte diagnose van, in BLUME Bijdragen (1826), als *Stylocoryne tomentosa*, terwijl MIQUEL dezelfde soort door ZOLLINGER in Tjikoja op Java verzameld (nummer en jaartal onbekend) in 1856 in Fl. Ind. bat., als *Stylocoryne ovata* MIQ., iets uitvoeriger beschreef. Een derde soort van dit geslacht, in rangorde van tijd van ontdekking, is de vroeger door mij besproken *Coptosapelta Hammii* (subgenus Lindeniopsis) die in 1907 door HAM in Billiton werd verzameld, terwijl een vierde soort ongeveer tegelijkertijd in de Philippijnen verzameld. door E. D. MERRILL als *Randia olaciformis* beschreven en in 1912 (in Philippine Leaflets) door ELMER tot het juiste geslacht werd gebracht. Nog een vijfde soort, reeds in 1885—86 door H. O. FORBES in Britsch Nieuw-Guinea verzameld, werd door WERNHAM in 1917 (in Journ. of Botany) beschreven, die haar echter tot het geslacht *Tarenna* GAERTN. (= *Stylocoryne* WIGHT et ARNOTT) bracht. Verder vond ik in de Herbaria van Leiden en Berlin nog twee onbeschreven soorten van Borneo en 3 van Nieuw-Guinea, terwijl tenslotte nog een 11de soort, die door den officier van gezondheid JANOWSKY in 1910 aan de Geelvinkbaai verzameld was, ontdekt werd.

§ 3. *Habitus.* Behalve de bovengenoemde afwijkende soort *C. Hammii*, die een halfklimmende heester is, zijn alle thans bekende *Coptosapelta* soorten lianen. Op alle past wel in hoofdzaken de uitmuntende beschrijving door ELMER (Phil. Leaflets V p. 1856) van *C. olaciformis*: „A looping treeclimber; stem two inches thick, very irregular, heavy, looping, numerously branched toward the top and forming hanging masses; leaves coriaceous descending, curved

upon the upper deeper green surface, apex recurved; inflorescence from the longer somewhat drooping branches, erect.".

Van de door LEDERMANN in Duitsch Nieuw-Guinea verzamelde soorten, wordt opgegeven tweemaal „Liane mit beindickem Stamm", eenmaal „Liane mit armdickem Stamm". Voor *C. Griffithii* uit Malakka wordt evenals voor de oudste soort, *C. flavescens*, opgegeven „Liane", waarbij KING's inlandsche verzamelaar nog voegt, „a handsome creeper, 30—50 ft high." Een gelijken habitus hadden waarschijnlijk ook de beide hier nieuw beschreven soorten uit Borneo. Van de soort van JANOWSKY wordt alleen opgegeven: 10 meter hoog; het door hem verzamelde ongeveer een vinger dikke tak- of stamstuk vertoont een weeken witachtigen sterk-gelobden houtcylinder met groote vaten.

§ 4. *Stengel* en *knoppen*. De roedevormige twijgen zooals ze in de herbaria voorkomen zijn bijna rolrond (slechts in enkele soorten o. a. *C. montana* zijn de uiterste twijgen vierkant) de knoopen gezwollen en met een ringvormige groeve voorzien. Daar meest alleen de bloeiende zij- en eindtakken ingezameld worden, zijn slechts enkele eindknoppen, alle van jonge exemplaren, aanwezig van *C. flavescens* en *C. montana*. Deze missen een knophulsel, zij worden gevormd door de twee jongste, met de platte bovenvlakken tegen elkaar gedrukte blaadjes, en zijn slechts aan de basis door de twee vrije kleine steunblaadjes omgeven. Bij de jonge groeiende twijgen, zijn deze zeer jonge blaadjes lancetvormig en bestaan voor meer dan de helft uit een breede aan den top afgeronde, in vivo zeker donkergroene, „Vorläuferspitze" (zie RACIBORSKI, in Flora 1900), die herinnert aan die van *Dioscorea*-soorten. Waar okselknoppen aanwezig zijn, zijn deze slechts een paar mm. lang, eivormig, lang- en dicht-behaard.

§ 5. *Huidbekleeding*. Bij alle soorten bestaat het haarkleed uit enkelvoudige korte en dicht aangedrukte en lange aanliggende maar aan de toppen vrije haren; de laatste zijn zacht, recht, kleurloos of zelden (in sicco) geelachtig, meestal ijl geplaatst; aan de jonge stengels en bladeren, de bloeiwijzen, en meestal ook de bladstelen, staan ze dichter bijeen en vormen een zacht dun „*tomentum*".

Bij de volwassen bladeren ontbreken zij nagenoeg of geheel bij *C. olaciformis*, *fuscescens* en *maluensis*, waar ook de stengels op den duur kaal worden. Een zachte gekroesde beharing, bestaande uit lange gekroesde niet dicht opeen geplaatste haren komt voor bij *C. Griffithii*, *C. Beccarii* en een behaarde vorm van *C. flavescens*.

§ 6. *Bladeren*: 1 Vorm: Eigenaardig is in alle tot dusver bekende soorten de bijna zuiver elliptische vorm van de bladschijf bij het gemiddelde blad, dus een symmetrie der bladhelften ten opzichte der dwarsche zoowel als van de overlangsche middellijn, afgezien van de dikwijls verlengde top en wigvormige basis.

Hooker (1882) en King (1903) maken er melding van bij *C. Griffithii* en *C. flavescens*, Merrill bij *C. olaciformis*, Wernham bij *C. hameliaeblasta*.

De elliptische vorm is natuurlijk bij geen enkel individu constant maar gaat dikwijls in den eivorm over of wordt oblong (in dit geval blijft de symmetrie bewaard), de bladvoet varieert tusschen afgerond en wigvormig. Bij jonge planten van *C. flavescens* zijn de volwassen bladeren lancetvormig. Van *C. Janowskii* (een bergsoort) zijn de weinige bekende bladeren eveneens lancetvormig en met een lange druppelpunt voorzien. Bij *C. montana* (een bergsoort uit Borneo), zijn aan verschillende twijgen elliptische en eivormige bladeren met afgeronden voet en lancetvormige toegespitste bladeren aanwezig. Bij *C. Hammii* (de boven beschreven xerophiele soort) loopt de top in een zeer korte stekelharde punt uit. Overigens hebben de bladeren bij alle soorten een duidelijk afgezet acumen dat echter somtijds zeer kort is.

2. De consistentie van het blad is bij oude planten en oude twijgen dun-leerachtig, de kleur van boven sterk glimmend donkergroen, van onderen lichter groen met donkergroene aderen, in drogen toestand hard en in herbaria meestal bros. Bij jonge planten, (zie boven) zijn ze veel dunner, in sicco bijna vliezig (in vivo kruidachtig), ook bij *C. Janowskii* (zie boven) zijn ze dun. Bij het opdrogen ondergaan de bladeren altijd een gele of geelgroene verkleuring, in meerdere of mindere mate met sepiabruin gemengd, de bovenvlakte is meestal donkerbruin of olijfbruin 153—155 (Code des couleurs de Klincksiek et Valette). Bij *C. olaciformis* 183—188 of 193 of bleeker, 217; bij *C. Hammii* 202—217, bij *C. flavescens* de kleur der bovenzijde vaak 114, die van de achterzijde 153.

3. Voor de diagnose van het geslacht zoowel als van de soorten is van het grootste belang de nervatuur der bladeren, welke aan alle soorten gemeenschappelijke eigenaardigheden vertoont.

De bladeren zijn vedernervig, maar hierbij valt allereerst in het oog een ook elders dikwijls aangetroffen bijzonderheid n.l. dat de zijnerven nooit op gelijke hoogte tegenover elkaar uit de hoofdnerf ontspringen en voorts dat hun aantal meestal betrekkelijk gering is, 2 of 3 of 4 aan weerszijden, en dat bij vele soorten de dichtst bij den top gelegen zijnerven niet vóór het midden van de hoofd-

nerf ontspringen zoodat de tophelft van het blad voornamelijk door tertiaire aderen wordt voorzien. Verder ontspringen ze op ongelijke afstanden van elkaar en zijn bij den bladvoet het dichtst opeen geplaatst, de beide onderste nu eens aan beide zijden dan weer slechts aan één zijde dichtbij of zelfs uit den bladvoet zelf; daardoor gelijkenis vertoonende met triplinerve en trinerve bladeren (*Ficus*, *Cinnamomum*, *Viburnum*). Dikwijls ontspringt uit den bladvoet aan één of beide zijden een zijnerfje dat zoo dun is, dat het tot de tertiaire aderen kan gerekend worden en dus licht over 't hoofd gezien; toch volgt het in zijn loop de meer ontwikkelde zijnerven. Deze vertoonen de eigenaardigheid dat ze uit de hoofdnerf tredend (schuinopwaarts gaande met een wijden boog) tot nabij den rand en daaraan ± evenwijdig in de richting van den top verder gaan. De beide voorste (apicale) eindigen dan in den top (acrodrome nerven v. ETTINGHAUSEN) de volgende loopen een eindje tusschen den rand en het eerste paar en eindigen alle of voor het meerendeel zonder zich aan te sluiten in het tertiaire net.

De zijnerven loopen dus over een groote lengte evenwijdig aan den bladrand en de meest basale omvatten dus voor een deel de hooger ontspringende. Een geheel aan deze nervatuur beantwoordende definitie vind ik bij ETTINGHAUSEN niet. Zij vormt een vermenging van de gewone *camptodrome* (bogenläufige) met de *acrodrome* (spitzenläufige) nervatuur; men zou den naam *amplexidroom* kunnen toepassen (zie b. v. de figuren van *Thibaudia* soorten (acrodroom) in het werk van v. E., alsmede *Nectandra* en andere *Lauraceae*). Bij de soorten met grootere bladeren *C. flavescens, olaciformis, Beccarii* is het aantal bladnerven iets grooter (10—12) en sluiten zich de onderste nerven somtijds met een kromming naar binnen bij de voorafgaande aan: *schlingenläufige* (*brochidodrome*) nervatuur. Bij de afwijkende soort *C. Hammii* bedraagt het aantal zijnerven 12, en zijn ze in de betrekkelijk kleine bladeren vrij dicht opeen geplaatst en vrij regelmatig over de lengte van het blad verdeeld, daarbij boogvormig aan elkaar aansluitende. Hier is dus een regelmatige brochidodrome nervatuur, maar de bladvoet is spits en de nerven zijn ascendent en omvatten elkaar van onderen naar boven, zoodat het karakter van het geslacht niet geheel verloren gaat. Van het tertiaire adernet moet opgemerkt worden dat het altijd goed zichtbaar is en zich gelijkmatig door het geheele blad verspreidt; daarbij treden de horizontale (= loodrecht op de middelnerf staande) verbindingsaderen meestal op den voorgrond en vormen een fijne tralie-achtige dwarsstreeping. Bij afdrukken met carbonpapier komt dit tralieachtig netwerk gewoonlijk alleen te voorschijn.

4. Biologisch beschouwd behooren de bladeren van *Coptosapelta flavescens* volgens HANSGIRG (Phyllobiologie, 1903, pag. 293) tot het myrtus of lauraceen type, waartoe hij met talrijke andere *Rubiaceae* ook de *Coffea*-soorten brengt, alsmede ook *Crossopteryx*, een met *Coptosapelta* nabij verwant geslacht uit Afrika.

Hij geeft als kenmerkende eigenschappen dezer volgens hem xerophiele in de afwisselend droge en vochtige gebieden van de Middellandsche Zee van Spanje tot Palestina, en tevens in tropische gebieden met gelijksoortige klimatologische eigenschappen thuisbehoorende vormen: „sterk gecutiniseerde epidermis, rechtlijnige polygonale of zeldzamer gegolfde epidermiscellen, huidmondjes ingezonken, sterk glanzende meest kale, zeldzamer grauw- of witviltige, enkelvoudige gaafrandige, smalle of ronde elliptische, eivormige en langwerpige leerachtige en stijve lamina" als beschuttingsmiddelen tegen sterke insolatie, overmatige verdamping, aanhangen van water, wintertemperatuur etc." Ongetwijfeld komen vele van deze eigenschappen toe aan *C. flavescens*, die voorkomt in de secundaire bosschen der eerste zône, o. a. veel in bamboebosschen tusschen 200 en 500 M., echter alleen aan oude planten, waarvan de bladeren inderdaad een vrij groote gelijkenis hebben met die van *Coffea arabica*. Ook de viltig-behaarde bladeren van *C. Beccarii* en *C. Griffithii* behooren tot dit type. Daarentegen zijn *C. Janowskii* en *C. montana* beide bergplanten met smallere bladeren en een lange droppelpunt voorbeelden van het „ficustype der regenwouden" van HANSGIRG, en tot dit type naderen ook de jonge planten van de bovengenoemde soorten, bij welke de xerophilie dan ook niet zeer sterk op den voorgrond treedt. Veel meer is het de afwisseling der moessons, die het gevaar van te sterke verdamping maar niet minder dat van de schade van den sterken regenval meebrengt. Bij de overige soorten, waarvan *C. maluensis* niet hooger dan 200 meter zeeh. de overige op verschillende hoogte in het gebergte voorkomen, worden verschillende overgangen tusschen het *Myrtus*- en *Ficus*-type van HANSGIRG gevonden.

Een voorbeeld van echte xerophilie vertoont alleen *C. Hammii* (*Lindeniopsis*) die zooals ik vroeger heb meegedeeld, tot de „Hartlaub formation" van SCHIMPER moet gerekend worden.

§ 7. *Steunblaadjes.* De gewone vorm der stipulae is die van een klein driehoekje, dat bij de volwassen twijgen in de herbaria dikwijls is afgevallen, het is aan de rugzijde en aan de randen met rechts naar voren gerichte haren begroeid, die dikwijls langer zijn dan de steunblaadjes en deze soms geheel bedekken, de verschillen in

gedaante bestaan meest slechts in de verhouding tusschen breedte en lengte, die afhankelijk is van de breedte van den knoop.

Somtijds kunnen ze echter van dienst zijn voor het determineeren der soort. Dit is o. a. het geval bij *C. flavescens* en *C. olaciformis*, die bij een oppervlakkige beschouwing van bladeren en bloemen een groote gelijkenis vertoonen en door MERRILL o. a. als identiek werden beschouwd. Hier zijn, in talrijke door ons onderzochte exemplaren, de steunblaadjes volkomen voldoende om de beide soorten uiteen te houden. Bij *C. flavescens* zijn deze lijn-lancetvormig en gaan naar beneden nog al plotseling in de breede basis over, zij varieeren in lengte tusschen 4 en 8 mm. en vallen in de herbaria in het oog doordat althans in de droge exemplaren de rugzijde geheel kaal is en de breede wimperranden zich duidelijk vertoonen. Bij *C. olaciformis* zijn ze kleiner, meest slechts 2 mm., weinig langer dan breed, in ouden toestand onbehaard en aan de basis gezwollen. Deze beschrijving is genomen naar een door MERRILL zelf gedistribueerd exemplaar uit Luzon (Ph. pl. 396), en als *C. flavescens* gedetermineerd, en geldt ook voor het origineele exemplaar van ELMER (zie beneden § 11, Synonymie en verwantschappen).

§ 8. *Bloeiwijze.* De bloeiwijze bestaat bij alle soorten uit axillaire samengestelde bijschermen of tuilen, die nabij den top der twijgen uit de bladoksels ontspringen, en aan den top zelf dichter bijeen staan en meestal door reductie der draagbladen tot groote terminale gedecusseerde pluimen of thyrsi zijn opeengehoopt. Dergelijke eindpluimen komen ook bij andere geslachten van de groep der Cinchoneae voor nl. bij *Cinchona* en *Ferdinandusa*.

Ten onrechte wordt in de beschrijvingen van het geslacht (HOOKER, SCHUMANN, VALETON in Ic. bog.) van „thyrsi penduli" gesproken. De pluimen zijn ongetwijfeld in alle gevallen opgericht (zie de beschrijving van ELMER boven § 3) maar de uiteinden der lange vertakte stengels hangen neer en de eigenlijke bloeitakken ontstaan zijdelings aan deze. In goede herbaria kan men somtijds waarnemen, hoe de bloeitakken met een bijna rechten hoek op de bladtwijgen staan.

Van de uitbreiding der bloeiwijzen en de lengte-verhoudingen der assen hangt het voor de soorten dikwijls kenmerkend karakter der bloeiwijzen af. Allereerst kan men twee typen onderscheiden. Het eenvoudigste geval vinden wij bij *C. Janowskii*, een Nieuw-Guineesche bergliaan, waar de axillaire bloeiwijzen tot enkele bloemen en de eindthyrsus tot een enkelvoudigen gesloten tros is gereduceerd. De bloemstelen zijn daarbij vrij lang en omstreeks het midden van twee voorblaadjes voorzien. Het is zeer waarschijnlijk dat bij weel-

deriger takken deze voorblaadjes vruchtbaar zijn, zoodat er gevorkte bijschermen (dichasia) ontstaan. Ook bij *C. montana* vinden wij aan zwakke bloeitakken alleenstaande bloemen (± éénbloemige bijschermen) in de oksels en aan den top een 5-bloemigen tros. Bij een meer weelderige eindtwijg uit 6 internodia bestaande, staan in de onderste oksels lang-gesteelde 5-bloemige gesloten trossen, in de volgende 3-bloemige cymae, terwijl de top weder een gesloten tros vormt met lijnvormige bracteen.

Ook bij *C. Hammii* eindigt de twijg in een 5-7-bloemigen tros, maar met zéér korte internodiën en bloemstelen, zoodat de met lange kroonbuizen voorziene bloemen dicht opeen staan en de gedaante van een scherm aannemen.

In het tweede type zijn zoowel de axillaire als de terminale bloeiwijzen samengesteld, en hebben de laatste door de naar de toppen toe in lengte afnemende internodia en bloemstelen de gedaante van tuilen (corymbi) of neergedrukte (± schermvormige) thyrsi; ook de axillaire zijn min of meer tuilvormig. Het is vooral de betrekkelijke lengte van de stelen der partieele bloeiwijzen, het aantal en de dichtheid der bloemen, het aantal der internodia van de terminale pluimen, die hier het karakter der soorten bepalen. Het meest wijkt hierin *C. olaciformis* van de overige af door de geringe uitbreiding der corymbi en het kleine aantal bloemen. De axillaire bloeiwijzen zijn kort-gesteelde 3-5-bloemige bijschermen, vele malen korter dan de bladeren. De eindthyrsi bestaan slechts uit 2-3 internodiën en uit kort-gesteelde weinig-bloemige cymae, en zijn ook korter dan de hoogste bladeren.

Bij de overige soorten van dit tweede type zijn zoowel de axillaire als de terminale bloeiwijzen rijkbloemig, sterk-vertakt, tuilvormig, matig lang of zeer lang gesteeld en kunnen de eindpluimen uit 5 internodia bestaan. De meer of mindere dichtheid en rijkdom der bloemen en de verschillende lengteverhoudingen der assen geven hier nog eenige onderscheidende soortskenmerken aan de hand.

§ 9. *Bloem en Zaad.* De *k e l k* („kelkzoom") is nu eens napvormig, alleen oppervlakkig uitgerand met 4-5 zeer korte spitse tanden, dan weer tot of tot nabij den voet in nagenoeg vrije slippen verdeeld en in dat geval is de zoom niet zeer scherp van den eierstok (kelkbuis) gescheiden, in een derde, meer voorkomend, geval tot op of iets over de helft gespleten; is dus als geslachtskenmerk zonder, voor de soortbepaling van groote waarde. Vermelding verdienen echter voor alle soorten de met de slippen of tanden afwisselende aan de binnenzijde geplaatste „darmklier-papillen" (D a r m d r ü s e n

papillen: SOLEREDER) gelijk aan die welke bij de *Rubiaceae* altijd aan de binnenzijde der stipulae worden gevonden en zeker wel meer dan uit de literatuur blijkt, aldaar aan de kelken zullen voorkomen.

De *bloemkroon*, die in aestivatie contort is, echter zonder uitwendige draaiing, is trompetvormig en herinnert aan soorten van *Randia* en *Tarenna*, heeft dus een 5-deeligen zoom en evenals bij *Randia* is de lengteverhouding van buis en zoom, hoewel in een zelfde individu niet altijd constant, toch, als men het gemiddelde in aanmerking neemt, een hulpmiddel voor de soortonderscheiding.

De volgende gemiddelde verhoudingen werden aangetroffen: Buis vele malen langer dan de slippen (*Lindenia*-vorm), 3-6 cM. lang: *C. Hammii.* Buis tweemaal zoo lang als de slippen: *C. Janowskii.* Buis ongeveer evenlang als de slippen of iets korter: De meeste soorten. Buis ± half zoo lang als de slippen: *C. Griffithii, C. fuscescens* en *C. lutescens.* Een bijzonderheid is nog dat de buis die gewoonlijk cylindervormig, overal van gelijke wijdte is, bij twee soorten, die overigens door de lengte van de kroonbuis het verst van elkaar afstaan, boven het midden een plotselinge verwijding hebben.

Van eenig belang is nog de beharing der kroonbuis inwendig. Slechts bij 3 soorten *C. Hammii, C. olaciformis, C. flavescens* is deze geheel onbehaard van binnen evenals ook de helmdraden. Bij de andere soorten waar de helmdraden aan de voorzijde met lange neerdalende pelsachtige haren bedekt zijn, zet deze beharing zich als uitspringende lijsten of richels langs den binnenkant der buis tot aan het midden of tot nabij den voet voort. Tusschen deze lijsten is de binnenvlakte dan nog met een zacht kroezig haar bedekt; ten onrechte vindt men echter in de beschrijvingen van het geslacht: „*faux barbata*" want de beharing van de *faux* (beschouwd als orificium van de buis) ontbreekt overal.

Uitwendig is de bloemkroon bij nog gesloten zoom geheel met een dikviltige of kort zijdeachtige beharing bedekt.

De *meeldraden* hebben dunne draadvormige helmdraden, die zooals gezegd is aan de bloemkroonbuis congenitaal zijn aangegroeid en daar lijstvormig uitspringen; hun vrije buiten de kroon uitstekende deel is kort en draadvormig, bij enkele soorten onbehaard, bij de meeste aan de voorzijde pelsharig, de helmknoppen zijn zeer smal lancetvormig, hebben een lijnvormig connectivum, dat dicht bij den voet van den helmknop aan de rugzijde met den helmdraad verbonden is, de lange lijnvormige helmhokjes wijken aan den voet min of meer uiteen, zoodat de voet van den helmknop uitgerand of, bij *C. flavescens*, pijlvormig is, terwijl de top in een spits puntje uitloopt;

de achterzijde is met aanliggende haren bedekt, behalve bij *C. Hammii*, waar ook de vrije helmdraden bijna geheel ontbreken. De helmknoppen hangen gedurende den bloei min of meer bewegelijk buiten de bloemkroon uit en krommen zich spiraal- of boogvormig op.

De *stamper* is voor dit geslacht zeer karakteristiek. De stempel is wig-vormig of cylindervormig, (bij *Lindeniopsis* knodsvormig) *niet* in lobben gesplitst, en in verhouding lang. De stijl is recht en glad en zijdelings saamgedrukt, en ongeveer zoo lang als de kroonbuis, zoodat de stempel ver boven de bloemkroon uitsteekt. Ik vond de papilleuse oppervlakte meestal met stuifmeel bedekt.

De *eierstok*, die met een ringvormigen discus bedekt is, is regelmatig, tweehokkig als bij de geheele groep der Cinchoneae. Rondom een vleezige, cylindervormige as, die de beide eierstokhokjes bijna opvult, zijn de talrijke anatrope, platte schildvormige opgerichte eitjes, dakpansgewijs over elkaar geplaatst.

De *vrucht* is bolvormig of min of meer langwerpig, loodrecht op het tusschenschot saamgedrukt en heeft in rijpen toestand een taaihoornigen of dun perkamentachtigen vruchtwand, door een dunne verdroogde buitenlaag omgeven. Bij heel oude opengesprongen vruchten brokkelt de buitenlaag af en komen de hoornachtige kleppen geheel te voorschijn; hierin is dus eenige overeenkomst met *Bikkia* (*Condamineae*) waar te nemen. De splitsing in kleppen gaat niet volkomen regelmatig. Zij begint altijd aan den top met het losbreken van het tusschenschot van de as, zoodat twee aan den voet verbonden kleppen ontstaan, maar daarna splijt ook het tusschenschot zelf meestal, zoodat tenslotte 4 van boven en zijdelings open en aan den voet samenhangende kluizen gevormd worden. Deze splitsing kan echter ook achterwege blijven. De vleezige zaaddrager schrompelt daarbij in, waarbij de zeer talrijke zaden geleidelijk losraken.

De *zaden* zijn plat, rond of langwerpig met den navel ongeveer in het midden geplaatst (schildvormig) en door een vliezigen franjevormig ingesneden vleugel omgeven, die ongeveer zoo breed is als het zaad. Voor soortonderscheiding komen alleen verschillen in grootte in aanmerking (behalve bij *Lindeniopsis* waar de vleugelrand uitgeschulpt is); *C. olaciformis* en *C. maluensis* hebben voor zoover bekend de kleinste, *C. Griffithii* de grootste zaden.

Wat het proces der bestuiving betreft kan men alleen vermoeden. De gedraaide bewegelijke uithangende helmknoppen en de lang uitstekende stempel wijzen op de waarschijnlijkheid van windbestuiving, maar de naar vlier en naar oranjebloesem riekende in 't

oog vallende bloemen wijzen ook misschien op een verband met insecten. De mogelijkheid van zelfbestuiving vindt een bevestiging in de groote opeenhooping der bloemen en ook in het feit dat de helmknoppen reeds in de knoppen (althans in het herbarium) open zijn.

§ 10. De *standplaats*: Omtrent de standplaats der verschillende soorten is slechts het volgende bekend:

C. flavescens werd door KORTHALS verzameld in de dorre zandvlakten langs de Karrau-rivier op Borneo; door KING's collector in bamboebosschen in Malakka op 100—200 M. zeehoogte, door verschillende verzamelaars in West Java aan den voet der bergen, op verschillende plaatsen in licht secundair bosch.

C. maluensis op 40—100 M. zeehoogte in goed begaanbaar oerwoud ± 20—25 mM. hoog; de grond met loof bedekt („galeriewald" SCHIMPER), met weinig laag houtgewas, meest uit Pandanus en lage vederpalmen bestaande, (Kamp Malu); idem met veel boomvarens en bamboe en meterhooge Selaginella als ondergroei (Aprilflusz): LEDERMANN.

C. fuscescens „Buschwald", overgaande in bergwoud tot 1500 M. zeehoogte, weinig groote boomen, veel epiphyten en mos, veel lichte plaatsen, grond vaak begroeid. Op steile rotsige hellingen (Felsspitze): LEDERMANN.

C. lutescens in dicht woud op heuvels, ± 25 M. hoog, nogal mosrijk; in het onderbosch veel dwergwaaierpalmen en lianen, *Freycinetia, Araceae, Agathis, Pandanus*: LEDERMANN.

§ 11. *Verwantschappen* en *synonymie*. Door de structuur van eierstok en vrucht behoort *Coptasapelta* tot den zeer natuurlijken tribus der *Cinchoneae* HOOKER (Genera plant. II p. 11) waartoe 44 genera gerekend worden. Deze tribus wordt in twee subtribus verdeeld: I Eucinchoneae met een klepvormige en II *Hillieae* met een dakpansgewijze of gedraaide bloemkroonplooiing. Tot den laatsten tribus behoort *Coptosapelta*, welk geslacht in Genera plant. onder den eersten is gebracht, een vergissing, die reeds door KING en door SCHUMANN is gecorrigeerd.

De laatste plaatst (Pflanzenfam. IV, 4 p. 42 en 84) *Coptosapelta* onmiddellijk naast *Crossopteryx*, een Afrikaansch geslacht, dat ik niet heb kunnen onderzoeken, waartoe slechts éene soort of soortengroep behoort, die de dorre Campos van Abyssinië — tot beneden-Guinee bewoont. Bij vergelijking van de uitvoerige beschrijving, die OLIVER van dit geslacht geeft, vond ik dat bijna alle door O. gegeven

meer of minder belangrijke kenmerken ook op *Coptosapelta* toepasselijk zijn; slechts twee ontbreken, nl. Stigma clavatum bilobum en tubuscorollae gracilis, limbus parvus. Het belangrijke kenmerk van de lengte van den stijl is echter aanwezig. Bij *Lindeniopsis* vindt men echter een stigma clavatum en een tubuscorollae gracilis, zoodat hier als belangrijk verschil alleen maar de tweelobbigheid van den stempel overblijft. Dit wijst m. i. op een groote verwantschap tusschen deze beide geslachten, inzonderheid tusschen *Crossopteryx* en *Lindeniopsis*, wegens den struikachtigen, xerophielen habitus.

De bladnervatuur van *Crossopteryx* wordt niet uitvoerig beschreven, de bladeren hebben echter wel denzelfden vorm; zij zijn grooter dan bij de meeste *Coptosapelta* soorten, maar gelijk aan die van *C. flavescens*. De groote verwantschap van de beide geslachten kan niet betwijfeld worden. In 't oog vallende punten van overeenkomst met andere geslachten van den tribus der *Cinchoneae*, waarvan slechts een gering aantal soorten in de oude wereld voorkomen, heb ik niet kunnen vinden. De meest kenmerkende eigenaardigheid, de bouw van den stamper wordt bij geen enkel geslacht van dezen tribus aangetroffen.

Merkwaardig is echter de gelijkenis van stamper en bloemkroon bij soorten van twee geslachten, die tot de *besdragende Rubiaceae* met veel eitjes behooren, nl. *Tarenna* Gaertn. (syn. *Stylocoryne*, syn. *Webera*), die tot een eigenaardige synonymie aanleiding heeft gegeven.

De naam *Stylocoryna*, door Cavanilles in 1797 gegeven aan een soort uit den Liu-tchiu-Archipel is gevormd uit de woorden στυλος zuil en κορυνη knods en duidt dus in 't kort de eigenschappen aan, die voor den stamper van *Coptosapelta* gelden, zooals boven beschreven. Hooker bracht deze soort over in het geslacht *Randia* Linn., zoodat de karakteristieke geslachtsnaam verloren ging. In 1834 bracht Wight hem in den vorm *Stylocoryne* weer te voorschijn (onafhankelijk van Cavanilles?) voor een hem nieuwe plant uit Ceylon *St. corymbosa* Wight, die ook weder dezen eigenaardigen stampervorm had. Ook deze naam kon niet behouden blijven, daar dezelfde soort reeds vroeger door Gaertner (in 1788) als *Tarenna zeylanica* was gediagnostiseerd, welke laatste naam dus de voorkeur heeft. Deze geslachtsnaam was echter intusschen al door verschillende schrijvers (Roxburgh, Blume e. a.) aangenomen en Blume was de eerste, die haar toepaste op de door v. Hasselt en door hem zelf in Java ontdekte *Coptosapelta flavescens* Korth, door hem *Stylocoryna tomentosa* genoemd, terwijl ook Wallich, Miquel en later

MERRILL en WERNHAM soorten van *Coptosapelta* hetzij tot *Stylocoryne* of tot *Randia* brachten (zie blz. 424).

Of de groote overeenkomst in bloemstructuur tusschen twee geslachten, die tot verschillende hoofdafdeelingen der familie gebracht worden, ook op een natuurlijke verwantschap wijst, is nog een *open* kwestie.

§ 12. *Nieuwe geslachtsbeschrijving.* *Kelk* napvormig, 5-deelig, 5-spletig, of 5-tandig, overblijvend, met okselklieren.

Bloemkroon in den knop gedraaid, trompetvormig, buis verschillend in lengte, van buiten viltig of zijde-achtig behaard, van binnen kaal of met pelsachtige van de helmdraden neerdalende lijsten voorzien, en tusschen deze dun-viltig, recht of boven het midden verwijd, keel niet gebaard; zoomslippen lijnvormig-langwerpig stomp.

Meeldraden 5, op den keelmond ingeplant, helmdraden draadvormig, kort, aan de voorzijde pelsachtig behaard of kaal, helmknoppen dun, lijn-lancetvormig, van boven toegespitst, van onderen twee-puntig stomp of pijlvormig, nabij den voet dorsifix, van achteren met twee rijen naar boven gerichte haren voorzien, (bij *Lindeniopsis* kaal).

Discus klein ringvormig.

Eierstok 2-hokkig, stijl anceps, onbehaard, stempel gaaf, cylindervormig of knodsvormig, lang, ver boven de kroon uitstekend (bij één soort vierhoekig met behaarde hoeken); placenta's geheel aan het tusschenschot vastgegroeid, eitjes talrijk, ascendent, imbricaat.

Doosvrucht min-of-meer bolvormig of langwerpig, tweehokkig, aan den top loculicide tweekleppig, later vierkluizig.

Zaden klein, schildvormig, dakpansgewijs; zaadhuid vliezig, rondom gevleugeld met franje-achtig ingesneden vleugel; kiemwit vleezig, kiem recht, worteltje recht, naar onderen gericht.

Lianen of Heesters, (*Lindeniopsis*). Twijgen viltig of kaal, rond of min of meer vierkant. Bladeren tegenovergesteld, dun-leerachtig, elliptisch, lancetvormig of eivormig, meestal toegespitst met een vrij scherp afgezette punt; meestal aan de achterzijde behaard. Bladnervatuur min of meer acroroom. Steunblaadjes klein, interpetiolair, driehoekig.

Bloemen klein of middelmatig, wit of lichtgeel, in axillaire gesloten trossen of trichotoom vertakte cymae, aan de toppen tot veelbloemige pluimen vereenigd.

§ 13. *Overzicht der soorten.*

I. Subgenus *Lindeniopsis*. Heester. Zaden met een oppervlakkig gekartelden en gegolfden vleugel. Kelklobben langer dan de eierstok. Kroonbuis lang. Helmknoppen onbehaard

1. *C. Hammii*, VAL. 1909.

Bladeren elliptisch met korte spitse harde punt; zijnerven 5—7 aan weerskanten, boogvormig anastomoseerend, (brochidodroom). *Bloemkroon* van binnen onbehaard. Twijgen scherp vierkant. *Stipulae* zeer klein. Geheele plant grijs-viltig behaard, later kaal. *Vrucht* langwerpig, tot 30 mM. lang.

Geographische verspreiding: Tot dusver endemisch op Billiton, op zandige onvruchtbare gronden.

II. Subgenus *Eu-Coptosapelta*. Lianen. Zaden met in franje verdeelden vleugel. Kelklobben niet langer dan de eierstok. Kroonbuis niet meer dan 2 × zoo lang als de lobben. Helmknoppen aan de rugzijde met lange haren bedekt.

2. *C. olaciformis* (MERRILL), ELMER 1913. *Randia olaciformis*, MERR. 1908. *C. flavescens*, MERR. (non KORTH.) 1909.

Kroonbuis van binnen en Helmdraden onbehaard. Kroonlobben iets langer dan de buis. Bloeiwijzen tuilvormig vertakt, aan de twijgtoppen tot pluimen vereenigd; bijschermen kort-gesteeld, armbloemig. Bloemen zeer klein. Steunblaadjes klein, driehoekig, niet gewimperd. Bladeren elliptisch of eivormig, kort-toegespitst, kleiner dan 100 mM., aantal zijnerven 4—5 aan weerskanten, volwassen onbehaard, kleur in sicco bleek groen-grijs of olijfgrauw. Vrucht hoogstens 6 mM. breed, breeder dan lang, kelk uit vrije eivormige lobben bestaande.

Geographische verspreiding: Tot dusver endemisch op de Philippijnen, op de volgende plaatsen: Mindanao, lake Lanao, camp. Keithly, Mrs. CLEMENS n. 1220, 1907, (type); Mindanao, prov. of Agusan, in mt. Urdaneta, 700 M. zeehoogte; ELMER, n. 13355 ?; Luzon, San Antonio, prov. of Laguna, mt. Ramos, Bur. of Science, Manila, n. 396!

3 *C. flavescens*, KORTH. 1851. *Stylocoryna tomentosa* Bl., Bijdr. 1826; *Stylocoryne ovata*, MIQ. 1856; *Stylocoryne* (*Webera*) *macrophylla*, WALL non ROXB.; *Coptosapelta macrophylla*, K. SCHUM.

Kroonbuis van binnen en helmdraden onbehaard. Bloeiwijzen tuilvormig vertakt lang gesteeld, rijkbloemig, aan de twijgtoppen tot groote thyrsusvormige pluimen vereenigd. Bladeren elliptisch of eivormig of langwerpig, kort toegespitst, voet meest breed afgerond, lengte 80—125 mM., aantal zijnerven 4—5 aan weerskanten, kleur in sicco meest olijfbruin, bladonderzijde, vooral langs de nerven, dun aanliggend of kroes-behaard. Jonge stengels en bloeiwijzen dicht-zachtharig. Vrucht obovaat, kelklobben vrij, eivormig, opstaand. Steunblaadjes lijn-lancetvormig met breeden voet, gewimperd.

Geographische verspreiding: Maleisch schiereiland, Burma, West-Java, Sumatra: Palembang, (PRETORIUS[1]), 1837, in Herb. L. B; Borneo Z. O.-afdeeling, in zandvlakten aan de rivier Karrau (KORTHALS).

[1]) In deze soort, die een tamelijk wijde verbreiding heeft, komen naar de verschillende vindplaatsen nogal verschillen in habitus voor. Zoo hebben de exemplaren uit het Maleische schiereiland (KINGS collector 10384 en 10393) steviger bloeitwijgen belangrijk grooter bladeren en bloemen dan de exemplaren uit Java en Sumatra. De laatste onderscheiden zich weer van de Javaansche door kleinere smallere, in sicco donkerder bruin gekleurde, van achteren kroesharige bladeren. Dergelijke bladeren komen ook bij een exemplaar uit Malakka (MAINGAY, 908) voor.

4. *C. hameliaeblasta* (Wernh.) Val. nova comb. *Tarenna hameliaeblasta*, Wernh. Bovendeel van de kroonbuis van binnen evenals de helmdraden dicht behaard, niet verwijd. Kroonlobben ongeveer even lang als de dunne kroonbuis. Axillaire bijschermen langgesteeld, rijkbloemig; eindstandige thyrsi rijkbloemig. Kroonbuis van buiten aanliggend-witachtig (in sicco) behaard. Kelklobben ongeveer zoo lang als de eierstok, opstaande, uitgebogen. Bladeren langwerpig of elliptisch, zeer kort-toegespitst. Zijnerven aan weerskanten 3 4, soms met toevoeging van een dunne basaalnerf; nerven opgericht. Steunblaadjes zeer klein, driehoekig, aan den rand dicht-behaard. Kleur der bladeren in sicco geel-olijfgroen. Stengels en bloeiwijzen hirsuut, bladnerven aan de achterzijde met verspreide aanliggende haren.

Geographische verspreiding: Britsch Nieuw-Guinea, Sogeri region, op 950—1400 M. zeehoogte. (Forbes).

5. *C maluensis*, Val. n. sp.

Bovendeel der kroonbuis van binnen evenals de helmdraden behaard, niet verwijd. Kroonlobben iets korter dan of gelijk aan de kroonbuis. Axillaire bloeiwijzen langgesteeld; eindstandige thyrsi zeer rijkbloemig. Bl. de kleinste in het geslacht. Kroon van buiten kort-aangedrukt behaard. Kelkzoom tot de helft gespleten, lobben eivormig opstaand. Bladeren meest breed elliptisch met 3—4, zelden 3 zijnerven aan weerskanten (5—7 in 't geheel), acrodroom. Vrucht door de zeer kleine kelklobben gekroond. Blad-onderzijde nabij den rand zeer dun behaard, overigens kaal. Steunblaadjes spits, dun behaard.

Geographische verspreiding: Noord-Oost Nieuw-Guinea, op 190—200 M. zeehoogte, in oerwoud. (Ledermann).

6. *C. Beccarii*, Val. n. sp.

Bovendeel der kroonbuis van binnen evenals de helmdraden lang en dicht behaard, niet verwijd. Kroonlobben ongeveer zoo lang als de kroonbuis. Axillaire bloeiwijzen langgesteeld, thyrsusvormig. Eindstandige thyrsi zeer rijkbloemig. Bladeren langwerpig-elliptisch, staartvormig-toegespitst, groot, met 3—4 zijnerven aan weerskanten. Bladsteel vrij lang; blad onderzijde gekroesd-zachtharig.

Geographische verspreiding: Borneo (Beccari 2271).

7. *C. fuscescens* Val n. sp. Bovendeel der kroonbuis evenals de helmdraden dichtbehaard, niet verwijd. Kroonlobben tweemaal zoo lang als de buis. Axillaire bijschermen langgesteeld en herhaaldelijk ijl-vertakt; eindstandige thyrsi veelbloemig uitgespreid. Bloemkroonbuis van buiten kort-zijdeachtig behaard, lobben onbehaard. Kelk klein, lobben bijna tot den voet vrij. Bladeren elliptisch, onbehaard. Zijnerven meest 3, of bij een enkel exemplaar meest 2 aan weerskanten. Steunblaadjes zeer klein, stomp, driehoekig behaard, zeer klein.

Geographische verspreiding: Noord-Oost-Nieuw-Guinea in bergwouden van 600—1500 M. zeehoogte, op het Kanigebergte en het Torricelli-gebergte (Schlechter), op de Felsspitze op 1500 M. (Ledermann).

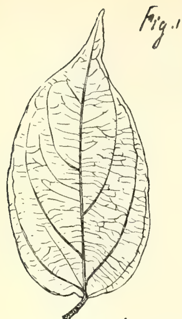
8. *C. lutescens*, Val. n. sp.

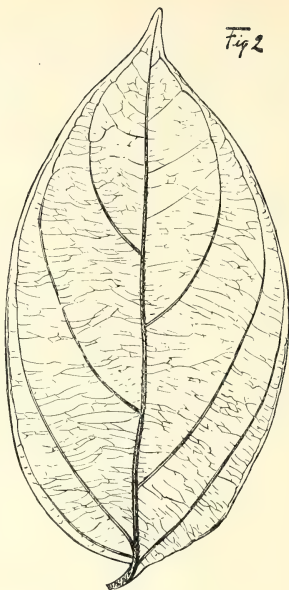
Bloemen als bij *C. fuscescens*, maar iets grooter. Bladeren met 2 zijnerven aan weerskanten, in sicco groenachtig-okergeel.

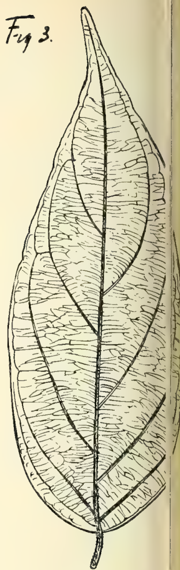
Geographische verspreiding: Noord-Oost-Nieuw-Guinea, op den Etappenberg op 850 M. in dicht hoog woud. (Ledermann).

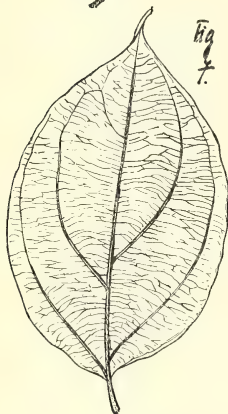
9. *C. Griffithii*, Hooker. f.

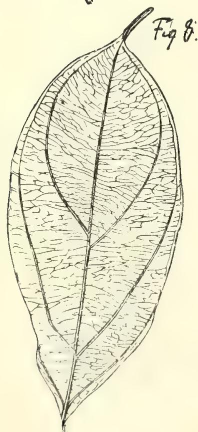
Bovendeel der kroonbuis van binnen evenals de helmdraden lang-dicht-behaard, verwijd, kroonlobben ruim tweemaal zoo lang als de korte wijde buis. Axillaire bijschermen nogal rijkbloemig; eindstandige thyrsi rijkbloemig gedrongen. Bl. van

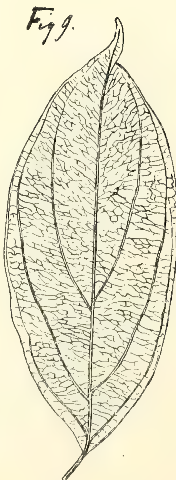

Fig. 1

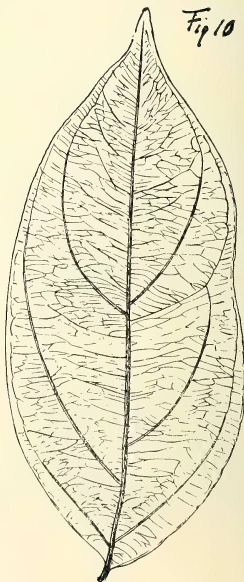

Fig 2

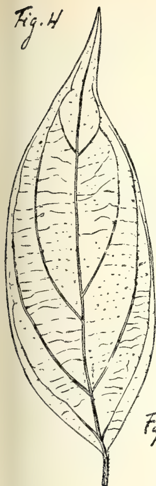

Fig 3.

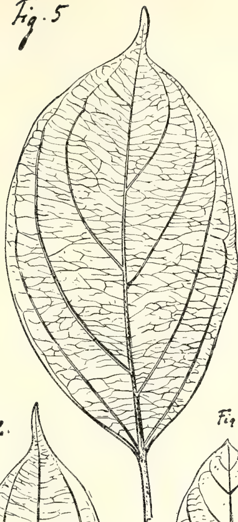

Fig 7.

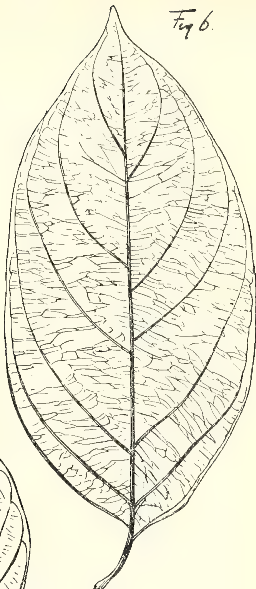

Fig 8.

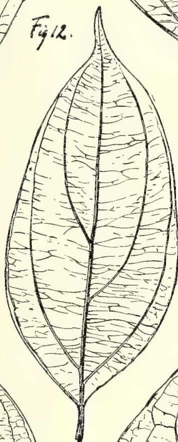

Fig 9.

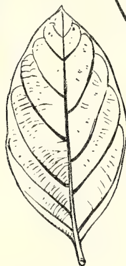

Fig 10

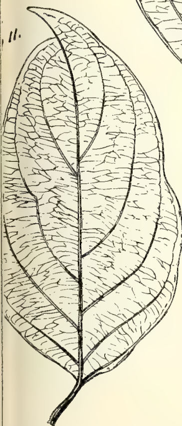

Fig. 4

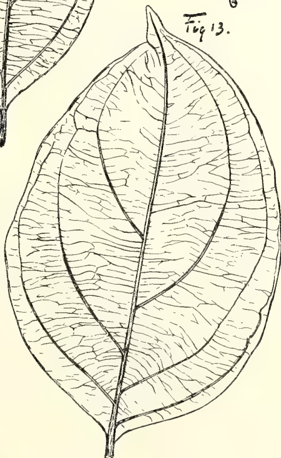

Fig. 5

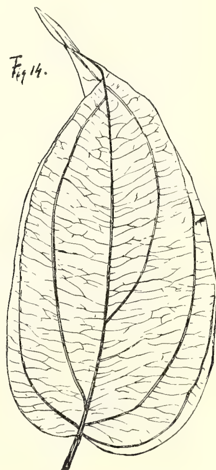

Fig 6.


Fig 12.


Fig 15.


11.


Fig 13.


Fig 14.

buiten geheel grijsviltig behaard. Kelkzoom wijd napvormig tot de helft in breede lobben verdeeld. Bladeren elliptisch, aan de onderzijde kroesharig. Zijnerven 3—4 aan weerskanten.

Geographische verspreiding: Op talrijke plaatsen in het Mal. schiereiland verzameld, in het laagland.

10. *C. Janowskii*, VAL, n. sp.

Bovenhelft van de kroonbuis verwijd, evenals de helmdraden lang- en dicht-behaard. Kroonlobben half zoo lang als de buis. Axillaire bloemstengels 1-3-5 bloemig. Eindstandige bloeiwijze enkelvoudig, trosvormig. Bloemen de grootste in het geslacht. Kroonbuis van buiten dun-viltig, lobben onbehaard. Kelk groot napvormig, niet ingesneden, met korte breede spitse tanden. Bladeren lancetvormig, langtoegespitst.

Geographische verspreiding: Noord Nieuw-Guinea. Jabigebergte.

11. *C. montana*, KORTH. msc., in Herb. L. B.

Bloemen onbekend. Vruchten in de bladoksels alleenstaand of in 3-5-bloemige gesteelde bijschermen, aan de twijgtoppen enkelvoudige gesloten trossen vormend. Kelklobben op de vrucht blijvend, alleen aan den voet verbonden, lijnpriemvormig. Bladeren lancetvormig of elliptisch vrij lang-toegespitst, met spitsen, stompen of afgeronden voet. Zijnerven aan weerszijden 2-3. Steunblaadjes klein 3-hoekig, langharig Stengels, bloeiwijzen en bladnerven aan de onderzijde dunviltig behaard, in sicco okergeel. Vrucht obovaat langwerpig.

Geographische verspreiding: Z. O. Borneo, Top van den Sakoembang, 1000 M. zeehoogte.

VERKLARING DER FIGUREN.

Fig. 1	Coptosapelta	montana; Blad van een oude plant.
Fig. 2	,,	flavescens, bloeiende plant.
Fig. 3	,,	,, zeer jonge plant.
Fig. 4	,,	montana; jonge vruchtdragende plant.
Fig. 5	,,	hameliaeblasta.
Fig. 6	,,	olaciformis.
Fig. 7 = Fig. 1.		
Fig. 8 en Fig. 9	Coptosapelta	fuscescens.
Fig. 10	,,	flavescens, bloeiende plant.
Fig. 11 = Fig. 6.		
Fig. 12	,,	lutescens.
Fig. 13 en Fig. 14	,,	maluensis.
Fig. 15	,,	Hammii.

De figuren zijn alle verkregen door afdrukken met carbonpapier volgens de methode van ELMER D. MERRILL. Fig. 4 en Fig. 10 zijn niet geretoucheerd, alleen met inkt overtrokken.

De overige zijn alle door den teekenaar met behulp van den oorspronkelijken afdruk en van het blad bijgewerkt; het tertiaire aderstelsel treedt daardoor iets te sterk naar voren.

Scheikunde. — ERNST COHEN, W. A. T. DE MEESTER en A. L. TH. MOESVELD: *„Een apparaat ter nauwkeurige oplosbaarheidsbepaling".*

Inleiding.

De methode, onlangs [1]) beschreven, ter direkte bepaling van de oplosbaarheid van stoffen bij hoogen druk heeft in het gebruik zoo goed voldaan, dat dit ons aanleiding heeft gegeven een toestelletje te konstrueeren ten gebruike bij oplosbaarheidsbepalingen bij gewonen druk, dat in vele opzichten aan het bovenbeschreven apparaat herinnert. Bij dit toestelletje zijn een aantal moeilijkheden overwonnen, die zich bij andere methoden voordoen, vooral wanneer het geldt oplosbaarheidsbepalingen bij hoogere temperaturen uit te voeren. Die moeilijkheden zijn o. a. het beletten van verdamping, benevens het ontijdig uitkristalliseeren der opgeloste stof tijdens het nemen van monsters van de verzadigde oplossing. Direkte aanleiding tot het hier beschreven onderzoek vonden wij in de noodzakelijkheid eenige bepalingen van de oplosbaarheid van thallosulfaat bij verschillende temperaturen te verifieeren, die indertijd door den EARL OF BERKELEY [2]) waren uitgevoerd.

Beschrijving der Methode.

1. Men brengt (Fig. 1) het oplosmiddel met overmaat der op te lossen stof in een pipet A (inhoud $\pm$ 10 cc.). Te dien einde lost men de vaste stof in een kolfje bij hooger temperatuur op, dan die, bij welke de oplosbaarheid zal worden bepaald. De aldus ontstane oplossing wordt in A opgezogen. Er kristalliseert dan bij bekoeling op de temperatuur der proef een zekere hoeveelheid „Bodenkörper" uit [3]). Nadat de oververzadigde oplossing in A is gebracht, zuigt men een zekere hoeveelheid zuiver kwik in A en sluit, wanneer A geheel is aangevuld, de kraan 1. Nu vult men de buis G bene-

[1]) Deze Verslagen **31, 618** (1922).

[2]) Transactions Royal Soc. London, Series A. **203**, 189 (1904).

[3]) Neemt de oplosbaarheid der onderzochte stof af bij temperatuursverhooging, dan bereidt men bij *lager* temperatuur dan die, bij welke de eigenlijke bepaling wordt uitgevoerd, een oververzadigde oplossing.

vens de pipet C (inhoud ± 17 cc.) met kwik; daartoe wordt het voorloopig nog losse stuk, dat later met behulp der stalen spiraalveeren S_3 en S_4, welke aan glazen haakjes zijn bevestigd, aan A kan worden verbonden, in een cylinder gedompeld, die kwik bevat. Men zuigt bij J_2 en doet de kwik tot aan het onderste deel der buis H opstijgen. Kraan 4 wordt gesloten en A met haar onderste slijpstuk bij D aan het gedeelte $GCHJ_2$ verbonden, waar bij de spiralen S_3 S_4 de stukken tegen elkaar gedrukt houden.

Daarna verbindt men de gereinigde, droge pipet B (inhoud ± 10 cc.) met behulp van het slijpstuk E aan A, nadat in F een propje watten is gebracht. De spiraalveeren S_1 S_2 houden B op A gedrukt. Kraan 2 en 3 worden gesloten.

Alle slijpstukken en kranen zijn ingevet met een spoor z.g. Ramsay-vet [1]).

2. Men plaatst nu het geheele apparaat in een houten houder, waarin de pipetten enz. worden ondersteund en waarin zij door

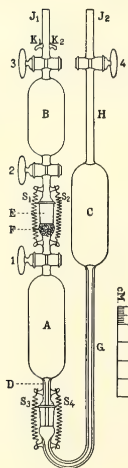


Fig. 1.

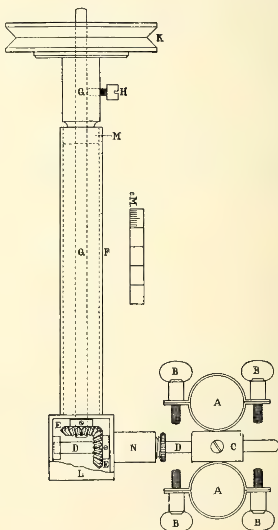


Fig. 2.

[1]) Dit wordt bereid door 2 gew. dln. kaoutchouk, 1 gew. dl. vaseline en $^1/_8$ gew. dl. vaste paraffine te verwarmen, totdat het mengsel een massa vormt, welke zich gemakkelijk laat uitstrijken.

koperen stiften worden vastgehouden. Aldus ligt het geheel volkomen vast en wordt breken der pipetten bij later schudden voorkomen.

Die houder is op een vlakke, koperen plaat geschroefd; deze laat zich met behulp der schroef *c* (Fig. 2) op een horizontale as *D* bevestigen, nadat het stuk *AABB* (dat voor andere doeleinden dient) van die as is verwijderd.

3. Het schudtoestel, in fig. 2 afgebeeld, kan in een met dunne, minerale olie gevulden thermostaat worden gedompeld. Wordt de schijf *K* (bv. door een heeteluchtmotor) in beweging gebracht, dan wentelt met behulp der acatène-inrichting *GED*, welke in een met smeerolie gevulde doos *L* is opgesloten, de as *D* en daarmede het geheele oplosbaarheidstoestel in de olie van den thermostaat rond.

4. Alvorens den toestel in gang te zetten, geeft men den inhoud der pipetten *A* en *C* en de lucht in *B* gelegenheid bij open kraan 4 uit te zetten, waarbij de uiteinden I_1 en I_2 boven de olie van den thermostaat worden gehouden. Daarna sluit men kraan 4 en dompelt den toestel geheel onder de olie, nadat men in J_1 en J_2 wattepropjes heeft gebracht en beide buisjes, die door kurken zijn gestoken, met glazen kapjes, op die kurken bevestigd, tegen het indringen van olie uit den thermostaat heeft beschermd.

5. De gebruikte thermostaat bestond uit een cylindrischen bak. Een afzonderlijke roerinrichting, welke op verschillende hoogten van den bak met behulp van koperen schroeven de olie in beweging hield, werd door een heeteluchtmotor gedreven. Dezelfde motor zorgt voor de omwenteling van het oplosbaarheidstoestel met behulp van de noodige transmissies.

6. De temperatuur regelden wij met een xylolregulator (inhoud ± 400 cc.); de schommelingen in de temperatuur van het bad bedroegen ± 0°.1 bij de hoogere temperaturen, daarentegen enkele honderdsten graden bij de lagere.

7. Het schudden werd gedurende ± 20 uren voortgezet. Men zet het schudtoestel stop (de roering van de olie in den thermostaat blijft doorgaan!) en brengt het apparaat in vertikalen stand, ten einde den ,,Bodenkörper" gelegenheid te geven tot bezinken.

Daarna haalt men den geheelen toestel, door losmaken van de klem, waarin het deel *M* (fig. 2) is vastgezet, zooveel omhoog, dat het bovenste deel van *B* buiten de olie van den thermostaat treedt. Men klemt nu *M* weer vast, verwijdert de kapjes, die J_1 en J_2 bedekken, en opent achtereenvolgens de kranen 4 (geheel) 1 (geheel 2 (geheel) (met een houten handvat, waarin de kraansleutel past; het handvat is bevestigd aan een koperen staafje, zoodat men de hand niet in de heete olie behoeft te brengen) en 3 gedeeltelijk.

De kwik in $GCHJ_2$ perst de verzadigde oplossing door de watten naar B. Er kondenseert in B op den binnenwand boven de verzadigde oplossing eenige damp, maar verlies treedt daarbij niet in. Is een voldoende hoeveelheid verzadigde oplossing naar B overgebracht, dan sluit men de kranen 3, 2 en 1, haalt den geheelen toestel zoover boven de olie van den thermostaat, dat het gedeelte EF er boven uitsteekt, verwijdert de wattenprop, reinigt het slijpstuk tot aan kraan 1 met watten en droogt het af. Een nieuwe prop watten brengt men daarna in F. Men zet nu een tweede pipet B_1 met slijpstuk, dat in E past, op 't apparaat, dompelt het toestel weer zoover onder de olie, dat B_1 daarmede is bedekt, opent kraan 1 en tapt in B_1 een tweede monster van de verzadigde oplossing, geheel op de wijze, als voor B is beschreven.

Analyse der verzadigde oplossing.

8. De wijze, waarop men deze uitvoert, hangt natuurlijk af van den aard der onderzochte stof. In het geval, waarin (zooals bij Tl_2SO_4 in H_2O) door verdampen van het oplosmiddel en weging van het residu de samenstelling der oplossing kan worden bepaald, gaat men als volgt te werk:

Pipet B wordt met de verzadigde oplossing gewogen. Zij kan aan de glazen haken K_1K_2 aan een platinadraad in de balans worden opgehangen.

Men spoelt den inhoud in een glazen kolfje en verwijdert het oplosmiddel door overleiden van een verhitten, drogen luchtstroom, op de wijze als vroeger werd beschreven [1]). Hierbij worde opgemerkt, dat de metalen spiraal, door welke de lucht werd verwarmd, thans werd vervangen door een glazen verbrandingsbuis, gevuld met kopergaas. Die buis werd op een paar Teclu-branders met spleet verhit. Op deze wijze verkrijgt de doorstroomende lucht een hooge temperatuur en verloopt het verdampen van het oplosmiddel vrij snel. Daarna wordt het glazen kolfje met de vaste stof gewogen.

Alle wegingen werden op het luchtledig herleid. De gebruikte balans, gewichten enz. zijn reeds vroeger beschreven [1]).

Wij hebben nu, gelijk boven reeds werd meegedeeld, eenige bepalingen van Berkeley met behulp van het beschreven apparaat geverifieerd, en wel die bij 30°.0, 50°.0 en 60°.0 C.

9. Onderstaande tabel bevat de resultaten. Vergelijking van de

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **75**, 257 (1911), speciaal p. 276.

cijfers in kolom 5 en 6 leert, dat de waarden, door BERKELEY en door ons gevonden, inderdaad voldoende overeenstemmen. Ter berekening van de waarden van BERKELEY bij de opgegeven temperaturen hebben wij gebruik gemaakt van zijne uitkomsten bij 29°.80 (5.78), 44°.95 (7.74) en 60°.40 (9.88) en deze rechtlijnig geïnterpoteerd, hetgeen, in verband met den geringen temperatuurkoëfficiënt der oplosbaarheid zonder bezwaar kan geschieden.

Oplosbaarheid van Thallosulfaat.

Temperatuur	Schudtijd in uren	gew. der oplossing in grammen	gew. vaste stof in grammen	Oplosbaarheid gr. in 100 gr. verz. opl.	Oplosbaarheid volgens BERKELEY
30°.0	17	7.7720	0.4541	5.84	5.81
30°.0	17¼	7.8519	0.4577	5.82	5.81
49°.9	18	6.4323	0.5450	8.46	8.39
49°.9	18½	7.2490	0.6108	8.41	8.39
60°.0	10¾	5.9429	0.5821	9.79	9.83
60°.0	10¾	3.8018	0.3731	9.80	9.83

Utrecht, April 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium.*

Scheikunde. — A. L. TH. MOESVELD: „*Over de berekening van compressibiliteiten*".

(Aangeboden door de Heeren ERNST COHEN en H. R. KRUIJT)

In een volgende verhandeling zullen wij de resultaten mededeelen van een onderzoek over den invloed van druk op de reactiesnelheid in verschillende, waterig-alcoholische media. Tot de correcties, die in de waarde der direct gevonden snelheidsconstante moeten worden aangebracht, behoort ook de concentratievermeerdering als gevolg der compressie van het oplosmiddel. Aldus bleek het noodzakelijk de samendrukbaarheid van verschillende alcohol-watermengsels te bepalen, en aangezien in dit geval de compressibiliteit bekend moest zijn voor verschillende drukintervallen, hebben wij eerst gezocht naar een methode de gezochte grootheden langs den eenvoudigsten weg uit de desbetreffende metingen af te leiden.

Vooropgesteld moge worden, dat, wanneer het erom gaat, eene, bij den druk p gemeten reactiesnelheid te corrigeeren voor de concentratieverandering, die de reageerende stoffen hebben ondergaan tengevolge van de drukverhooging van 0 tot p atmosferen, wij den middelbaren compressibiliteitscoëfficiënt:

$$\beta_m = -\frac{1}{v_0}\frac{v_p - v_0}{p}$$

in rekening moeten brengen.

Dit is de volumeverandering, die, per eenheid van volume, intreedt, wanneer de druk van 0 tot p atmosferen wordt verhoogd; v_0 is het volume van de stof (vloeistof of oplossing) bij den druk 0 (1 atm.).

Behalve dezen coëfficiënt moeten wij nog onderscheiden den waren en den intermediairen compressibiliteitscoëfficiënt.

De ware compressibiliteit (β_w) heeft tot definitie:

$$\beta_w = -\frac{1}{v_0}\frac{dv}{dp}.$$

Eerst nadat men door onderzoekingen bij hoogen druk gevonden heeft, dat β een functie van den druk is, is de noodzakelijkheid ontstaan, onderscheid te maken tusschen deze verschillende compressibiliteiten.

Ten slotte moeten wij nog de intermediaire compressibiliteit

noemen, die geldt voor de volumeverandering, die intreedt, per eenheid van volume, wanneer men den druk van p_1 op p_2 brengt.

$$\beta_i = -\frac{1}{v_0}\frac{v_{p_1}-v_{p_2}}{p_1-p_2}.$$

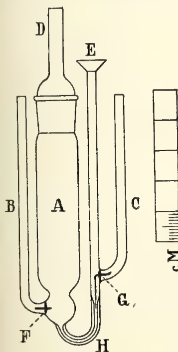
Deze definities zijn geheel in overeenstemming met die voor ware en middelbare soortelijke warmte en er bestaat dan ook een geheel overeenkomstige betrekking tusschen de correspondeerende grootheden [1]). Is nml. de ware compressibiliteit als functie voor den druk gegeven door:

$$\beta_w = \beta_0 + \alpha p + \gamma p^2,$$

dan is de middelbare gegeven door:

$$\beta_m = \beta_0 + \frac{\alpha}{2} p + \frac{\lambda}{3} p^2$$

Voor vergelijking der eigenschappen van verschillende stoffen speelt de ware compressibiliteit een belangrijke rol; wil men de volumeverandering kennen, wanneer een stof (oplossing) van 1 (0 atm.) op p atmosferen wordt gebracht, zooals dit bij snelheidsmetingen onder druk steeds noodig is om de correcties voor concentratieveranderingen aan te brengen, dan is de kennis der middelbare grootheid noodig. Bepaalt men compressibiliteiten experimenteel volgens de methode van TH. W. RICHARDS en STULL [2]), welke ook bij dit onderzoek werd toegepast, dan krijgt men in eersten aanleg intermediaire compressibiliteiten, die dan door doelmatige berekening kunnen worden herleid tot ware resp. middelbare compressibiliteiten.



Tig. 1.

Eerst moge hier zeer in 't kort het apparaat door RICHARDS en STULL gebruikt, echter met de door ERNST COHEN en DE BOER [3]) aangebrachte wijzigingen beschreven worden (fig. 1).

Het vat A van den piëzometer kan door een stop D worden gesloten. Aan den onderkant is er een capillair H aangesmolten, die in de trechterbuis E overgaat. F en G zijn Pt-draden, die in de buizen B en C zijn ingesmolten, welke met kwik kunnen worden gevuld en ten doel hebben de Pt-draden te isoleeren van het kwik, dat den piëzometer gedurende de bepalingen, in de compressiebom, omgeeft. De Pt-draad G eindigt in de as van de capillair met een fijne punt. Eerst vult men

[1]) Zie bv. SACKUR, Thermochemie und Thermodynamik. Berlin 1912, p. 14 v.v.
[2]) Publication N⁰. 7 en 76 of the CARNEGIE Institution of Washington.
[3]) Zeitschr. f. physik. Chemie 84. 41 (1913); zie ook ERNST COHEN und W. SCHUT, Piezochemie kondensierter Systeme. Leipzig 1919, p. 27.

den piëzometer met zuiver kwik en wel zóó, dat bij de temperatuur, bij welke men de compressibiliteit wenscht te bepalen, A geheel en de capillair H tot even boven de Pt-punt met kwik gevuld is.

Wordt nu de piëzometer in een compressiebom gebracht, in welke hij blootgesteld is aan een alzijdigen, gelijkmatigen druk, dan wordt door de volumevermindering van het kwik in A, het kwik in de capillair teruggedrongen, en men bepaalt nu den druk, die juist zoo groot is, dat de Pt punt van G het kwik niet meer raakt. Dit constateert men door F en G op te nemen in een stroomkring, zoodat het verbreken, resp. het maken, van het contact in H met een galvanometer, in den stroomkring opgenomen, kan worden geconstateerd. Na het aflaten van den druk en uitnemen van den piëzometer voegt men een gewogen hoeveelheid kwik, door het kanaal E, aan het kwik in den piëzometer toe, en bepaalt opnieuw in de compressiebom de waarde van den druk, bij welken het contact verbroken wordt. Dit herhaalt men tot men het geheele drukinterval heeft doorloopen, in hetwelk men de compressibiliteit wenscht te bestudeeren.

Daarna vult men den piëzometer met de te onderzoeken vloeistof (in A), terwijl zich in den bol onder A en in de capillair wederom kwik bevindt en bepaalt, geheel als bij de vulling met kwik alleen, voor een reeks toevoegingen van gewogen hoeveelheden kwik, de drukken, bij welke het contact werd verbroken resp. gesloten.

Ten einde nu uit deze waarnemingen de compressibiliteit te berekenen, gingen RICHARDS en STULL als volgt te werk:

Op groote schaal zette men voor de metingen, bij welke de piëzometer alleen met kwik gevuld was, de toegevoegde hoeveelheid kwik uit als ordinaat en den bijbehoorenden druk als abscis. Met behulp van de zoo verkregen kromme kon men dus aflezen, hoe groot de hoeveelheid kwik moest zijn om van een zekeren druk P_n op een anderen P_m te komen.

Is de piëzometer nu gedeeltelijk met een vloeistof gevuld, van welke wij het gewicht W noemen, de dichtheid D; is verder D_{Hg} het s.gew. van kwik bij de temperatuur van het experiment, β_{Hg} de compressibiliteit van kwik (als constant met den druk aangenomen), β, die van de vloeistof en W het gewicht van het kwik, noodig om, nadat bij een druk P_2 het contact juist was verbroken (hersteld), te komen op een overeenkomstigen druk P_1, ten slotte W_1 het overeenkomstige gewicht bij de vulling met kwik (uit bovengenoemde kromme afgelezen), geldig dus voor hetzelfde interval $P_2 — P_1$, dan stelt de uitdrukking:

$$\frac{W}{D}(P_1 - P_2)(\beta - \beta_{Hg})$$

voor het verschil tusschen de volumevermindering van de oplossing bij de compressie van P_2 op P_1 en die van een gelijk volume kwik.

Dit verschil wordt echter ook gegeven door:

$$\frac{W-W_1}{D_{Hg}}(1-P_1\,\beta_{Hg})$$

want dit is het volume van het verschil van de toegewogen hoeveelheden kwik, omgerekend op den einddruk P_1.

Door gelijkstelling van beide uitdrukkingen ontstaat, na transformatie,

$$\beta=\frac{(W-W_1)(1-P_1\,\beta_{Hg})\,D}{D_{Hg}\,W\,(P_1-P_2)}+\beta_{Hg}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Op deze wijze vindt men dus de waarde van de compressibiliteit, geldig in het interval P_1—P_2.

Wil men de compressibiliteit in een bepaald interval leeren kennen, dan zou men ook voor de proeven, bij welke de piëzometer met een oplossing is gevuld, grafisch de toegevoegde hoeveelheden kwik en de bijbehoorende drukken moeten uitzetten, en voor de gewenschte drukintervallen moeten aflezen welke kwik-toevoeging hierbij behoort. Deze grafische methode wordt nog bezwaarlijker, indien men, wat meest het geval zal zijn, wenscht te kennen de z.g. middelbare compressibiliteit, d. w. z. de compressibiliteit geldig voor het interval 0—P. Immers, dan moeten beide krommen geëxtrapoleerd worden naar de waarden voor $P=0$, en men moet dan de toe te voegen hoeveelheden aflezen van den druk 0 af gerekend tot P, en voor ieder interval 0—P afzonderlijk β_m berekenen. In verband met deze moeilijkheden hebben wij een anderen weg ingeslagen, die ons direct voert tot een uitdrukking, die de middelbare compressibiliteit geeft als functie van den druk, hetgeen wij aan een bepaald voorbeeld zullen demonstreeren, nml. aan de bepaling met absoluten aethylalcohol bij 25°.00 C.

Gewicht van den leegen piëzometer: 32.2397 gr., met kwik gevuld 208.0083 gr.

Bij 25° C. was de evenwichtsdruk, bij welken het contact werd verbroken en gesloten, 258 atm., de daaropvolgende waarden van den druk en de toegevoegde gewichten kwik waren:

contact 258	471	688	910	1120	1331	1538
gew. kwik	0.0595	0.0588	0.0589	0.0564	0.0554	0.0532

Teneinde de berekening te vereenvoudigen, werden hieruit berekend de toe te voegen gewichten kwik, noodig voor een aantal drukken, met gelijke trappen opklimmend en zoo nauw mogelijk aansluitend aan de gevonden waarden:

contact	258	473	688	903	1118	1333	1548
gew. kwik	0.0601	0.0582	0.0571	0.0577	0.0564	0.0553	

Wij nemen nu tijdelijk als beginwaarde van den druk de middelste waarde, 903 atmosferen, en als eenheid van druk het boven genomen interval van 215 atm. Wij kunnen dan 6 vergelijkingen opschrijven van de gedaante:

$$W_p - W_{903} = ap + bp^2$$

welke het toegevoegde gewicht, gerekend van het nulpunt af tot den beschouwden druk, geven als functie van den druk nml.

$$-0.1754 = -3a + 9b \qquad 0.0577 = a + b$$
$$-0.1153 = -2a + 4b \qquad 0.1141 = 2a + 4b$$
$$-0.0571 = -a + b \qquad 0.1694 = 3a + 9b$$

Dit stel vergelijkingen, opgelost met behulp van de methode der kleinste quadraten, geeft

$$W_p - W_{903} = 57.43\,p - 0.297\,p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

De hiermede berekende waarden der toegevoegde hoeveelheden kwik zijn:

	—	±	+	—	±	+	
ber.	0.0589	0.0583	0.0577	0.0571	0.0565	0.0559	gr.
gev.	0.0601	0.0582	0.0571	0.0577	0.0564	0.0553	gr.

Voeren wij daarna in verg. (1) in voor p de waarde $p - \frac{903}{215}$ ten einde het nulpunt van den druk weer op 0 atmosfeer te brengen, en brengen daarna de eenheid van druk weer van 215 tot 1 atmosfeer terug, dan ontstaat de vergelijking II:

$$W_p = W_0 + 0.0002787\,p - 0.006423\,10^{-6}\,p^2 \; . \quad . \quad . \quad (II)$$

welke dus aangeeft, hoeveel gram kwik toegevoegd moet worden, wanneer de geheel met kwik gevulde piëzometer van 0 tot p atmosferen wordt samengedrukt, om het contact weer te zien inspelen. Voor denzelfden piëzometer, gedeeltelijk met absoluten alcohol (6.9667 gr.) gevuld, is nu op dezelfde wijze gevonden:

contact	234	446	665	869	1075	1295	1505
gew. kwik	2.0059	1.6792	1.4819	1.2686	1.2040	1.0536	

Ook nu wordt door interpolatie de waarde der kwiktoevoegingen berekend voor een aantal, met gelijke verschillen opklimmende, drukken nml.

contact	234	446	658	870	1082	1294	1506
gew. kwik	2.0059	1.7016	1.4660	1.3028	1.1581	1.0635	

Met als nulpunt van druk 870 atm. en als eenheid 212 atm. krijgt men nu weer de volgende zes verg.: (thans was het niet mogelijk met een quadratische vergelijking te volstaan)

$$-1.4660 = -a + b - c \qquad 1.3028 = a + b + c$$
$$-3.1676 = -2a + 4b - 8c \qquad 2.4609 = 2a + 4b + 8c$$
$$-5.1735 = -3a + 9b - 27c \qquad 3.5244 = 3a + 9b + 17c$$

welker oplossing leidt tot de vergelijking:

$$W_p - W_{870} = 1.3741\,p - 0.090978\,p^2 + 0.0083917\,p^3 \quad . \quad (III)$$

Voor de toe te voegen gewichten vindt men hieruit:

ber. — 1.9884 — 1.7057 — 1.4735 + 1.2915 + 1.1599 + 1.0786
gev. — 2.0059 — 1.7016 — 1.4660 + 1.3028 + 1.1581 + 1.0635

Verg. *III* herleid op 0 atm. als punt van aanvang (door substitutie van $p = p - \frac{870}{212}$, en met als nieuwe eenheid 1 atm.) geeft

$$W_p = W_0 + 0.012004\,p - 4.3228\;10^{-6}\,p^2 + 8.807\;10^{-10}\,p^3. \quad (IV)$$

Substitueeren wij nu in de verg. (A) van RICHARDS voor w en w' de gevonden uitdrukkingen *II* en *IV*, die dan dus functies van p zijn, en stellen dan in verband met die uitdrukkingen $p_2 = 0$ en $P_1 = p_1$ dan wordt (A):

$$\beta_m = \frac{D}{D_{Hg}\,W}\,\frac{\{(0.012004p - 4.3228\;10^{-6}p^2 + 8.807\;10^{-10}p^3) - (0.000279p - 0.0064\;10^{-6}p^2)\}\{1 - 3.9\;10^{-6}p\}}{p} + \beta_{Hg}$$

waarin

$$D = 0\;78508 \quad , \quad D_{Hg} = 13.534 \quad \text{en} \quad W = 6.9667$$

of na herleiding:

$$\beta_m = 101.5 - 36.3\;10^{-9}\,p + 7.47\;10^{-12}\,p^2 \quad . \; . \; . \quad (V)$$

De met (I) berekende compr. zijn dus middelbare compressibiliteiten, geldig voor het interval $0 - p$.

Wenscht men de ware compressibiliteiten te kennen, geldig dus bij den druk p, dan worden deze direct uit V afgeleid:

$$\beta_w = 101.5 - 2 \times 36.3\;10^{-9}\,p + 3 \times 7.47\;10^{-12}\,p^2$$
$$\beta_w = 101.5 - 72.6\;10^{-9}\,p + 22.41\;10^{-12}\,p^2.$$

SAMENVATTING.

Een methode werd beschreven om direct uit de waarnemingen de vergelijking af te leiden, die de compressibiliteit (middelbare resp. ware) als functie van den druk weergeeft.

Utrecht, April 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

Scheikunde. — A. L. Th. Moesveld: *„De compressibiliteit van mengsels van water en aethylalcohol"*.

(Aangeboden door de Heeren Ernst Cohen en H. R. Kruijt).

Inleiding.

In verband met het in de volgende verhandeling beschreven onderzoek betreffende verzeepingssnelheid in alcoholisch-waterige media bij verschillende drukken, was de kennis van de compressibiliteit van deze media een vereischte. De in de literatuur aanwezige gegevens waren voor ons doel niet geschikt, aangezien de metingen òf betrekking hadden op de compressibiliteit bij 1 atmosfeer, òf zich over een veel te klein druktraject uitstrekten om hier toepassing te kunnen vinden, daar over een traject van 1500 atmosferen, over welke de snelheidsmetingen loopen, compressibiliteit een uitgesproken functie van den druk is. In ons geval moest bekend zijn de middelbare compressibiliteit; over de wijze, waarop deze uit de experimenten direct als functie van den druk kan worden berekend, moge naar de voorafgaande verhandeling worden verwezen (p. 446).

De gevolgde methode.

Deze werd reeds vroeger beschreven [1]). Wij hebben echter een enkele wijziging moeten aanbrengen: in de trechterbuis E, (fig. 1 der voorafgaande verhandeling) welke met water gevuld is, brachten wij te halver hoogte een watteprop aan. Deze houdt geringe verontreinigingen, afkomstig van de olie van de compressiebom, tegen, welke steeds aanleiding gaven tot het versmeren van het kwik in de capillair G, waardoor de druk, bij welken het contact gesloten of verbroken werd, niet meer nauwkeurig kon worden gereproduceerd.

De kleine oliedruppeltjes, die deze geringe verontreinigingen omhulden, werden door de watteprop volkomen tegengehouden en wij konden deze dan gemakkelijk verwijderen.

In verband met de geringe diepte van de gebruikte drukbom, namen wij een piëzometer, die iets korter, maar tevens van grooter diameter was dan degene, die bij vroegere onderzoekingen had

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **84**, 41 (1913).

dienst gedaan. Verder maakten wij de trechterbuis E wijder, zoodat zij de vrij groote hoeveelheden kwik kon opnemen, die voor deze, ten deele zeer samendrukbare oplossingen, noodig waren.

De gebruikte stoffen.

Het gebruikte kwik was, na voorafgaande reiniging met salpeterzuur, tweemaal in vacuo gedistilleerd in een toestel, zooals door HULETT [1]) beschreven. Voor de compressibiliteit [2]) namen wij de waarde 3.9×10^{-6} aan.

De oplossingen van alcohol en water bereidden wij uit 2 maal gedistilleerd water en aethylalcohol van ± 96 °/₀. Laatstgenoemden alcohol verkregen wij uit een handelspraeparaat door herhaalde distillatie over vaste natron.

Door inwegen maakten wij de verschillende oplossingen, welker concentraties wij controleerden door bepaling van het soortelijk gewicht bij 25°.00 C. en vergelijking van de gevonden waarden met de metingen van OSBORNE en MC.KELVY [3]).

Absolute alcohol werd bereid door herhaalde distillatie van den door ons gezuiverden alcohol over kalk. Wij vonden voor $d_{4^\circ}^{25.^\circ 00}$ in twee bepalingen 0.78508 en 0.78511, terwijl OSBORNE en MAC.KELVY 0.78506 opgeven.

De metingen.

Alle bepalingen werden in duplo verricht, waarbij gebruik gemaakt werd van twee verschillende piëzometers. Slechts bij zuiver water werd volstaan met één meting, aangezien deze meer ter controle geschiedde en deze compressibiliteit voldoende bekend was, terwijl absolute alcohol beide malen in denzelfden piëzometer werd gemeten. In dit verband moge er op gewezen worden, dat oorspronkelijk beide piëzometers verschillende uitkomsten gaven, terwijl de afwijkingen buiten de proeffouten lagen. Nawerking van het glas van een der piëzometers (betrekkelijk nieuw geblazen) bleek hiervan de oorzaak te zijn; bepalingen (met 31 °/₀ alcohol) hebben wij zoolang herhaald, tot op elkaar volgende metingen onderling en met die in den anderen piëzometer verricht, overeenstemden. Deze ervaringen doen het wenschelijk schijnen, dergelijke metingen steeds in twee apparaatjes uit te voeren, aangezien men anders groote kans loopt, vooral wanneer duplicaat bepalingen steeds op elkaar

1) Zeitschr. f. physik. Chemie **33**, 611 (1900).
2) BRIDGMAN, Proc. Amer. Acad. **47**, 347 (1911).
3) Bulletin Bureau of Standards, Washington 1911.

volgend worden verricht, systematische fouten te maken, die men niet gemakkelijk op het spoor komt.

Tabel I geeft de resultaten der compressibiliteitsbepalingen, met de piëzometers K en L verricht.

TABEL I.
Compressibiliteit van water-alcohol mengsels T = 25°.00 C.

Piëzo-meter	vulling gew. % alcohol	Middelbare compr. als functie van den druk	Middelbare compressibiliteit $\times 10^6$			
			bij 0 atm.	0—500	0–1000	0–1500
K	H_2O	$44.5 \; 10^{-6} - 4.92 \; 10^{-9}\,p$	44.5	42.0	39.6	37.1
K	9.98	$41.9 \; 10^{-6} - 4.527 \; 10^{-9}\,p$	41.9	39.6	37.4	35.1
L	9.98	$41.0 \; 10^{-6} - 3.910 \; 10^{-9}\,p$	41.0	39.1	37.1	35.1
K	19.86	$39.5 \; 10^{-6} - 3.822 \; 10^{-9}\,p$	39.5	37.6	35.7	33.8
L	19.86	$40.0 \; 10^{-6} - 4.011 \; 10^{-9}\,p$	40.0	38.0	36.0	34.0
K	31.05	$41.5 \; 10^{-6} - 4.49 \; 10^{-9}\,p$	41.5	39.3	37.1	34.8
K	31.05	$41.6 \; 10^{-6} - 4.55 \; 10^{-9}\,p$	41.6	39.3	37.1	34.8
K	31.05	$42\ 6 \; 10^{-6} - 5.10 \; 10^{-9}\,p$	42.6	40.0	37.5	35.0
L	31.05	$42.4 \; 10^{-6} - 5.145 \; 10^{-9}\,p$	42.4	39.8	37.3	34.7
L	31.05	$42.6 \; 10^{-6} - 5.132 \; 10^{-9}\,p$	42.6	40.0	37.5	34.9
K	42.50	$47.2 \; 10^{-6} - 6.310 \; 10^{-9}\,p$	47.2	44.0	40.9	37.7
K	42.50	$47.9 \; 10^{-6} - 6.614 \; 10^{-9}\,p$	47.9	44.6	41.3	38.0
L	42.50	$47.0 \; 10^{-6} - 6.211 \; 10^{-9}\,p$	47.0	43.9	40.8	37.7
K	56.30	$59.8 \; 10^{-6} - 15.45 \; 10^{-9}\,p + 2.873 \; 10^{-12}\,p^2$	59.8	52.8	47.3	43.1
L	56.30	$58.3 \; 10^{-6} - 13.29 \; 10^{-9}\,p + 2.038 \; 10^{-12}\,p^2$	58.3	52.2	47.1	43.0
K	70.16	$71.0 \; 10^{-6} - 20.94 \; 10^{-9}\,p + 4.421 \; 10^{-12}\,p^2$	71.0	61.4	53.9	48.7
L	70.16	$72.2 \; 10^{-6} - 24.20 \; 10^{-9}\,p + 6.270 \; 10^{-12}\,p^2$	72.2	61.7	54.3	50.0
K	84.94	$83.4 \; 10^{-6} - 26.91 \; 10^{-9}\,p + 5.37 \; 10^{-12}\,p^2$	83.4	71.2	61.9	55.1
L	84.94	$80.5 \; 10^{-6} - 23.23 \; 10^{-9}\,p + 3.84 \; 10^{-12}\,p^2$	80.5	70.8	61.1	54.4
K	100.0	$99.8 \; 10^{-6} - 34.13 \; 10^{-9}\,p + 6.59 \; 10^{-12}\,p^2$	99.8	84.4	72.3	63.4
K	100.0	$101.5 \; 10^{-6} - 36.33 \; 10^{-9}\,p + 7.47 \; 10^{-12}\,p^2$	101.5	85.2	72.7	63.8

Teneinde ook voor andere concentraties de compressibiliteiten te kunnen afleiden, zijn krommen berekend, die de compressibiliteit als functie van de concentratie voorstellen bij 0 atm. resp. voor 0—500, 0—1000 en 0—1500 atm. Daartoe zijn de gevonden, middelbare compressibiliteiten eerst herleid tot die, geldende voor afgeronde

concentraties, na het gemiddelde der gevonden waarden te hebben genomen, en daarna is voor ieder der 4 drukintervallen een kromme berekend met behulp van de methode der kleinste quadraten.

Uit den aard der zaak is de aansluiting bij de waarden, geldende voor 0 atmosferen het minst bevredigend; deze compressibiliteiten zijn geëxtrapoleerde waarden, daar bij de bepalingen metingen worden verricht tusschen ± 200 en ± 1500 atmosferen. Tabel II geeft de gevonden en berekende waarden bij 0, 0—500, 0—1000 en 0—1500 atmosferen.

TABEL II.

Middelbare compressibiliteit $\times 10^6$ bij 0, 0—500, 0—1000 en 0—1500 atmosferen.

conc.	0			0—500			0—1000			0—1500		
	gev.	ber.	ber. - gev. in %	gev.	ber.	ber. - gev. in %	gev.	ber.	ber. - gev. in %	gev.	ber.	ber. - gev. in %
0	44.5	44.5	0	42.3	42.2	0	39.5	39.4	0	37.1	37.1	0
10	41.5	40.8	−1.5	39.3	39.0	−0.7	37.2	37 0	−0.8	35.2	34.8	−1
20	39.7	40.1	+1.0	37.8	38.3	+1.3	35.9	36.4	+1.5	33.9	34.2	+0.8
30	41.8	42.2	+1.0	39.5	39.8	+0.7	37.1	37.4	+0.8	34.7	35.0	+0.9
40	45.8	46.6	+1.7	43.0	43.1	0	40.0	40.0	0	37 0	37.1	0
55	57.9	56.7	−2.0	51.7	50.9	−1.6	46.6	45.9	−1.5	42.5	41.7	−2.0
70	71.5	69.8	−2.4	61.6	61.0	−1.0	54.1	53.7	−0.8	49.3	48.6	−1.4
85	82.0	84.6	+3.2	71.0	72.5	+2.1	61.5	62.7	+2.0	54.8	55.9	+2.0
100	100.6	99.7	−0.9	84.8	84.2	−0.7	72.5	72.1	−0.6	63.6	63.2	−0.6

De vergelijkingen, die voor de berekening hebben dienst gedaan, zijn de volgende·

$$10^6 \beta^0_c = 44.5—0.5443\,c + 0.01754\,c^2—0.06585\ 10^{-3}\,c^3$$

$$10^6 \beta^{0-500}_c = 42.2—0.4514\,c + 0.01395\,c_2—0.05234\ 10^{-3}\,c^3$$

$$10^6 \beta^{0-1000}_c = 39.4—0.3457\,c + 0.01049\,c^2—0.03773\ 10^{-3}\,c^3$$

$$10^6 \beta^{0-1500}_c = 37.1—0.3253\,c + 0.00962\,c^2—0.03762\ 10^{-3}\,c^3$$

In al deze vergelijkingen is de concentratie uitgedrukt in gew. % ($\Sigma = 100$). Wil men de ware compressibiliteit afleiden, dan kunnen hiervoor de vergelijkingen uit Tabel I worden gebruikt; men behoeft dan slechts den coëfficiënt van p te verdubbelen[1]) en zoo noodig dien van p^2 te verdrievoudigen.

[1]) Zie de voorgaande verhandeling p. 447.

SAMENVATTING.

Voor een aantal mengsels van water en alcohol werden de middelbare compressibiliteiten bij 25°.00 C. tusschen 0 en 1500 atmosferen bepaald; de vergelijkingen werden gegeven, die deze compressibiliteiten als functie van den druk kunnen voorstellen. Evenzoo zijn vergelijkingen berekend, die voor de verschillende drukintervallen de middelbare compressibiliteit als functie van de concentratie voorstellen.

Utrecht, April 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium.*

Scheikunde. — A. L. Th. Moesveld: *„De invloed van druk op de reactiesnelheid in vloeistofmengsels."*

(Aangeboden door de Heeren Ernst Cohen en H. R. Kruijt).

Inleiding.

In onze vorige verhandeling over den invloed van druk op de reactiesnelheid [1]) werd er de aandacht op gevestigd, dat het aantal bestudeerde gevallen nog slechts zeer gering is en ons niet toestaat algemeene gevolgtrekkingen te maken. Bovendien is niets bekend over genoemden invloed, wanneer de reactie zich in een ander medium dan water afspeelt.

Bij *gewonen* druk is de invloed van het medium door velen bestudeerd [2]), waarbij gebleken is, dat deze zeer groot kan zijn; in gemengde media is verder de reactiesnelheid niet een eenvoudige functie van de samenstelling van het medium. Het leek ons daarom van belang na te gaan, welke rol druk speelt bij reacties, die verloopen in niet-waterige oplossingen en of ook een wijziging in het medium wellicht invloed heeft op het drukeffect.

Wij zullen in deze verhandeling een onderzoek beschrijven, waarin beide zoo juist genoemde factoren nader worden bestudeerd.

Keuze der reactie en van het medium.

Wij hebben wederom een reactie gekozen, die het mogelijk maakte het verloop er van ook onder druk te volgen, zonder dat het noodig was monsters te nemen. Dit is mogelijk, indien het geleidingsvermogen van het reactiemengsel met het voortschrijden der omzetting verandert, en men uit de gemeten waarden van dit geleidingsvermogen kan besluiten tot de daarmede correspondeerende concentraties. Daar het geleidingsvermogen van opgeloste stoffen in andere, zelf niet geleidende, media dan water, meestal zeer klein is, en sterk toeneemt, wanneer sporen water in het medium worden opgelost, hebben wij als medium oplossingen van alcohol in water gebruikt.

Om verschillende redenen hebben wij als reactie gekozen de

[1]) Deze Verslagen **31**, 195 (1922); Zeitschr. f. physik. Chemie **103**, 486 (1923).
[2]) Voor literatuur zie J. chem. Soc. **119**, 970 (1921).

esterverzeeping. Zooals op p. 459 nader wordt toegelicht, kan men in dit geval langs eenvoudigen weg scherp uit het geleidingsvermogen komen tot de kennis van de concentratie der reageerende stoffen. Verder is de esterverzeeping in zuiver water reeds onder druk bestudeerd, zoodat een vergelijking hier mogelijk wordt met een nauw verwante reactie. Tenslotte is ook juist voor de esterverzeeping het aantal bestudeerde gevallen het grootst, zoowel wat betreft den invloed van de constitutie van den ester, als ook dien van het medium en de temperatuur op de snelheid der reactie.

Wat nu de keus van den ester zelf betreft: ook hier moest met verschillende factoren rekening worden gehouden. Wenschelijk was het, dat de ester oplosbaar was in de voor meting geschikte concentratie (± 0.02 n.) in een medium, dat niet te sterk naar de zijde van zuiveren alcohol was verschoven. Dan is nml. de reactiesnelheid zeer gering en bovendien de weerstand der oplossingen groot, twee factoren, die storend kunnen zijn voor de practische uitvoering. Omgekeerd merkten wij bij de voorproeven, dat die esters, welke reeds in een laag procentig alcoholisch milieu tot een 0.02 n. oplossing konden gebracht worden, dikwijls zeer snel verzeepten. Een zeer geschikt voorbeeld van betrekkelijk langzame verzeeping dankten wij echter aan Dr. C. F. van Duin, dien wij hier tevens onzen dank betuigen voor de beschikbaarstelling van dezen ester en het correspondeerende vrije zuur: den o-methoxykaneelzuren aethylester en het methoxykaneelzuur. Deze ester is bij 25° C. gemakkelijk oplosbaar in ± 30 °/₀ alcohol in een sterkte van 0.02 n.

Het nauwkeurige, quantitatieve onderzoek is daarom verricht met dezen ester in 0.01 n. oplossing (na verdunning met loog) in oplossingen, die 31 resp. 42.5 gew. °/₀ alcohol bevatten. Bovendien zijn oriënteerende metingen verricht in andere gemengde media en met andere esters, waarop wij nader zullen terugkomen.

De gebruikte apparaten.

Hiervoor moge verwezen worden naar de reeds geciteerde verhandeling.

De gebruikte oplossingen.

De o-methoxykaneelzure ester, die uit alcohol was omgekristalliseerd, smp. 34° C. gecorr., werd zonder verdere zuivering gebruikt.

Van het o-methoxykaneelzuur werd ter analyse een oplossing

---

[1]) Deze Verslagen **31**, 195; Zeitschr. f. physik. Chemie **103**, 486 (1923).

bereid, die 0.0400 n. was; 25 cc. van deze oplossing neutraliseerden 25.01 cc. 0.0400 n. koolzuurvrije loog.

Den alcohol distilleerden wij tweemaal van NaOH af; daarna fractioneerden wij hem met behulp van een langen opzet. Wij vonden $d_{4^0}^{25^0} = 0.80120$, hetgeen correspondeert met 94.5 °/₀ alcohol. Door verdunning met de berekende hoeveelheid zuiver, twee maal gedistilleerd water bereidden wij hieruit alcohol van 66.27 °/₀, terwijl wij de concentratie door bepaling van het s.g. controleerden.

Het water werd bereid door distillatie van gedistilleerd water met behulp van een zilveren koeler, waarbij wij alleen de middelste fractie gebruikten, nadat dit water gedurende eenige dagen onder groote klokken, naast pijpjes NaOH, in groote Pyrex bekerglazen was bewaard. Hierbij bleek, dat deze methode, wanneer het water veel CO_2 bevat, zooals dit het geval is met de eerste fractie der distillatie, buitengewoon langzaam werkt. Daarentegen bevatten de middelste fracties, direct na het distilleeren slechts sporen CO_2, zoodat het verblijf in de klokken naast NaOH meer beschouwd moet worden als een veilige wijze van bewaren der oplossingen, dan als een noodzakelijk en afdoend procédé om CO_2-houdend water te verbeteren.

De natronloog (0.0200 n.) maakten wij door verdunnen van een sterke, koolzuurvrije loog, uit natrium bereid, die zich in een geperforeerde, nikkelen schaal in een atmosfeer van waterdamp onder een glazen klok bevond. De sterkte was bepaald ten opzichte van een oplossing van oxaalzuur, concentratie 0.02 n. De natronloog bewaarden wij in een groote (12 L.) Pyrex kolf, voorzien van natronkalkbuisje en hevel, den voorraad alcohol, de esteroplossing en de overige bij het onderzoek gebruikte vloeistoffen in uitgestoomde Jena-kolven.

Bepaling der concentratie tijdens de verzeeping.

Wij volgden de methode zooals deze in het geval van aethylacetaat toegepast is door Ernst Cohen en H. F. G. Kaiser [1]). Bij het begin der verzeeping is alleen NaOH en ester aanwezig, bij het einde Na-zout en alcohol, gedurende de verzeeping een veranderend mengsel van ester, alcohol, loog en zout. In verband met de groote verdunning der oplossing kan men den invloed van ester resp. alcohol op het geleidingsvermogen der aanwezige electrolyten buiten rekening laten en dus is op zeker tijdstip het gemeten geleidingsvermogen alleen afhankelijk van de hoeveelheid aanwezig NaOH en Na-zout. Men

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **89**, 338 (1915).

kan dus te voren de afhankelijkheid van het geleidingsvermogen van de aanwezige electrolyten vastleggen door dit geleidingsvermogen te meten van oplossingen van bekende sterkte van NaOH en Na-zout in hetzelfde medium, waarin men de reactiesnelheden wenscht te bepalen. Wij hebben dit gedaan door het geleidingsvermogen vast te stellen van oplossingen in 31 resp. 42.5 °/₀ alcohol van NaOH 0.01 n., Na-zout 0.01 n., en oplossingen, voor welke de verhouding der concentraties van bovengenoemde electrolyten was als 1 : 1, 3 : 1 en 1 : 3, terwijl steeds de som der concentraties 0.01 n. bedroeg. Deze punten van de kromme: geleidingsvermogen-concentratie komen dus overeen met begin en eind der verzeeping resp. met het tijdstip, waarop de reactie voor de helft, voor een kwart resp. voor driekwart is voortgeschreden. Deze waarden moesten dus behalve bij 1 atmosfeer, ook bij die drukken worden bepaald, bij welke wij ons voorgesteld hadden reactiesnelheden te meten i. c. 500, 1000 en 1500 atmosferen. Voor iederen druk werden dus 5 punten bepaald, die de kromme concentratie-geleidingsvermogen voor dezen druk vastlegden. Uit deze metingen kon men de kromme berekenen en daarna omgekeerd met behulp van die kromme de concentratie vinden, die correspondeerde met een bij dien druk gemeten geleidingsvermogen. Teneinde deze berekening, die zou neerkomen op het oplossen van een vierkantsvergelijking, te vermijden, berekenden wij de waarde van het geleidingsvermogen voor de concentraties $c = 1$ tot $c = 0$ met 0.1 afdalend en vonden later de juiste waarde van c door interpolatie tusschen de waarden van het geleidingsvermogen, die de gemeten waarde insloten.

Uitvoering van de verzeepingen en van de ijkingen der schalen.

Aangezien de alcohol-concentratie der oplossing bij de verzeeping zoo was gekozen, dat de ester juist er in kon oplossen, was het niet mogelijk natron- en esteroplossing beide te bereiden in 31°/₀ alcohol, aangezien dan vóór de menging de esterconcentratie dubbel zoo groot zou moeten zijn als voor 30°/₀ alcohol mogelijk is. De natronoplossing werd dus zonder alcohol bereid, de esteroplossing daarentegen in alcohol van zoodanige sterkte, dat na verdunning met gelijk *volume* water (NaOH oplossing), beide reageerende stoffen 0.01 n. waren in 31°/₀ alcohol. Daartoe moest de ester opgelost zijn in 66.27 °/₀ oplossing. Bij deze menging treedt dan tevens een kleine contractie op, die echter bij alle proeven, verricht in alcohol van 31 °/₀, dezelfde is en berekend kan worden uit de specifieke volumina van alcohol-water mengsels.

Nu is het volume vloeistof, dat uit een pipet vloeit, die geijkt is voor water en verdunde waterige oplossingen, niet gelijk aan het volume alcohol, dat uit dezelfde pipet loopt, zoodat in ons geval speciale pipetten zouden moeten worden geijkt voor iedere alcoholconcentratie. Het is daarom eenvoudiger de benoodigde hoeveelheden ester-oplossing te *wegen*. Het specifiek gewicht dezer ester-oplossing bepaalden wij door weging van de maatkolf, gevuld met de bedoelde oplossing.

Daar de temperatuur, bij welke onze proeven werden verricht, hooger was, dan bij de vroeger beschrevene[1]), waren speciale voorzorgen bij het vullen van de vaatjes, welke het reactiemengsel moesten opnemen, noodig. Mengt men nl. 0.02 n. NaOH-oplossing met een gelijk volume 66.27 % alcohol en vult men na roeren het vaatje, waarin het geleidingsvermogen bepaald wordt, met dit mengsel, dan treden bij herhaling der proef afwijkingen in den gemeten weerstand op tot ± 5 %, hetgeen een gevolg is van het opnemen van koolzuur uit de atmosfeer. Dit hebben wij als volgt kunnen vermijden: wij plaatsten het bekerglaasje (50 cc.), waarin de esteroplossing was afgewogen, na bedekking ervan met een horlogeglas, voorzien van een boring juist groot genoeg om een pipet te laten passeeren, in een exsiccator. Deze exsiccator was op den bodem en te halver hoogte gevuld met stukken natron, zoodat de atmosfeer in die ruimte, die slechts even geopend werd om het bekerglaasje op te nemen, geheel koolzuurvrij was. De natron-oplossing (0.02 n.) pipetteerde men daarna door het doorboorde horlogeglas in het bekerglaasje, roerde de oplossing goed om en liet het vaatje er in zakken tot het geheel onder de oplossing was gezonken (exsiccator gesloten). Daarna nam men met een pipet eenige cc. uit het bekerglaasje, spoelde hiermede de electroden af, en plaatste vervolgens de stop op het vaatje, waarna dit gesloten uit het bekerglaasje en uit den exsiccator werd getild. Nu plaatste men het vaatje in een glazen bakje met kwik en dit geheel in een dun, ijzeren mandje, dat in den thermostaat of onder aan de bomstop kon worden gehangen. Ook hier moesten voor het luchtvrij maken der oplossingen dezelfde voorzorgen in acht worden genomen, als vroeger[2]) door ons zijn beschreven.

Bij het ontwerpen der schalen van het geleidingsvermogen als functie van de concentratie vulden wij op dezelfde wijze het vaatje met de verschillende loog-zoutoplossingen. Na ruim 1 uur verblijf

---

[1]) Ernst Cohen en H. F. G. Kaiser, Zeitschr. für physik. Chemie **89**, 338 (1915).
[2]) Zeitschr. f. physik. Chemie **103**, 486 (1923), speciaal p. 494.

in de bom (bij 1 atmosfeer) was de weerstand der onderzochte oplossing constant geworden, waarna de druk op 500 atmosferen verhoogd werd. Wederom $1^1/_2$ uur later kon de druk verhoogd worden tot 1000 en ten slotte tot 1500 atmosferen, waarna wij de waarde bij 1 atmosfeer nog eens controleerden.

Het maken van de zoutoplossing geschiedde door neutralisatie met NaOH van de oplossing van het o-methoxykaneelzuur. Dit laatste is echter zoowel in water als in verdunde loog zeer moeilijk in oplossing te brengen, zoodat wij als volgt te werk moesten gaan. De berekende hoeveelheid zuur werd afgewogen in een Jena-kolf, aan welke wij daarna de juiste hoeveelheid $61\,^0/_0$ alcohol toevoegden. Na oplossen hierin van het zuur werd de berekende hoeveelheid natron-oplossing toegevoegd en ten slotte zooveel water als noodig geweest zou zijn om het zuur na oplossen op de juiste sterkte te brengen (aequivalent met de hoeveelheid NaOH-oplossing).

Het bleek nu, dat zoowel bij 1 als bij 1500 atmosfeer de constanten, afgeleid met behulp van de ontworpen schalen, een weinig toenamen met het voortschrijden der reactie. Echter is nog niet rekening gehouden met het feit, dat de vergelijking voor de bimoleculaire reactie alleen mag worden toegepast zonder meer, indien de OH′ conc. aequivalent is met de esterconcentratie. Dit is slechts dan waar, als de NaOH (0.01 n. in $31\,^0/_0$ alcohol) volledig gedissocieerd is. In water is dit voor die concentratie zeker niet het geval, zoodat wij ook hier met die mogelijkheid moeten rekening houden. Brengt men de normaliteit van de esteroplossing op 2×0.00975 (in plaats van 0.0200), hetgeen dus op hetzelfde neerkomt als de veronderstelling, dat de NaOH voor $97.5\,^0/_0$ gedissocieerd is, dan is van een gang in de constante niets meer te bespeuren. Wij hebben dus bij alle verzeepingen (in $31\,^0/_0$ alcohol!) de esternormaliteit vóór de menging gebracht op 0.0195 n.

Correcties.

Rekening moet er dus mede worden gehouden, dat de volgende correcties moeten worden aangebracht in de direct gemeten reactieconstanten, bij welke voor de normaliteiten van NaOH en ester 0.01 n. ná de menging is genomen:

a. Bij menging der oplossingen (NaOH in water, ester in $66\,^0/_0$ alcohol) treedt een kleine contractie op.

b. De ester- en de daarmede aequivalente OH′ conc. is 0.0195 n. vóór de menging.

c. Deze normaliteit geldt bij 15° C., terwijl de proeven zijn genomen bij 25° C.

d. De compressibiliteit der oplossingen doet bij de proeven onder druk de concentratie toenemen ten opzichte van de waarde bij 1 atmosfeer.

De drie eerstgenoemde correcties moeten bij alle proeven voor eenzelfde medium in dezelfde mate worden aangebracht, de laatste is afhankelijk van den druk, bij welke de verzeeping is uitgevoerd.

De krommen voor het geleidingsvermogen van Natron-natriumzout-oplossingen van 1—1500 *atm. voor* 31 °/₀ *alcohol als oplosmiddel.*

Zooals reeds (p. 460) werd medegedeeld, bepaalden wij 5 punten van deze krommen, en wel 0.01 n. loog, 0.01 n. zout en mengsels van beide in de verhoudingen 3 : 1, 1 : 1 en 1 : 3. De direct gemeten weerstanden herleidden wij tot geleidingsvermogens, evenwel zonder gebruik te maken van de weerstandscapaciteit van het vaatje, aangezien de absolute waarde van dit geleidingsvermogen niet van belang was. De resultaten van deze metingen vindt men in tabel I.

TABEL I.

Geleidingsvermogen (100000: w) van natron-Na-zoutoplossingen[1]) bij verschillende drukken in 31 °/₀ alcohol. T = 25°.00 C.

Concentratie der loog.

Druk in atm.	0.01 n		0.0075		0.005		0.0025		0.0	
	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.
1	201.25	201.40	164.05	163.83	127.78	127.59	92.15	92.69	59.36	59.12
500	201.49	201.67	163.41	163.15	126.32	126.10	89.94	90.52	56.68	56.42
1000	201.64	201.85	162.96	162.63	125.14	124.93	88.13	88.74	54.30	54.05
1500	201.71	201.91	162.44	162.12	124.09	123.86	86.53	87.13	52.18	51.93

Voor iederen druk berekenden wij een vergelijking, die het verband aangaf tusschen geleidingsvermogen en concentratie van de natron-oplossing, nl.:

$$\mu_1 = 59.12 + 131.61\,c + 10.67^4\,c^2$$
$$\mu_{500} = 56.42 + 133.45\,c + 11.79^4\,c^2$$
$$\mu_{1000} = 54.05 + 135.71\,c + 12.09\,c^2$$
$$\mu_{1500} = 51.93 + 137.75\,c + 12.23\,c^2$$

Met behulp van deze vergelijkingen konden nu een aantal waarden van het geleidingsvermogen worden berekend geldig voor c = 1

[1]) Som der concentraties van natron en natriumzout steeds 0.0100 n.

tot $c = 0$, met behulp van welke uit de gemeten weerstanden als functies van den tijd gedurende de verzeeping de concentraties konden worden afgeleid.

De verzeepingen.

Voor de methodiek der snelheidsmetingen onder druk moge verwezen worden naar Zeitschr. f. physik. Chemie 89, 338 (1915), terwijl voor de berekening der verzeeping het noodige is medegedeeld in eenige voorafgaande verhandelingen [1]). Ongeveer 1½ uur na het op druk brengen verrichtten wij de eerste meting; in het geval, dat de reactie (bij 1500 atm.) het snelst verliep, bedroeg dan de concentratie der natron ongeveer 65 % van de aanvangsconcentratie. Om het heele of halve uur werd een nieuwe aflezing verricht en dit (in verband met de berekening) een even aantal malen herhaald. De laatst gemeten concentratie bedroeg in den regel 30 à 40 % der aanvangsconcentratie.

A. Metingen in 31 % alcohol.

Teneinde de aansluiting te doen zien, geven wij hier uitvoeriger het getallenmateriaal van een der verzeepingen.

TABEL II.
Bepaling van de reactieconstante bij 1500 atm en 25°.00 C. in 31 % alcohol.

Tijd	Weerstand	$\frac{100000}{w}$	conc. × 10^3	$\frac{100}{\text{conc.}}$ gev.	$\frac{100}{\text{conc.}}$ ber.	ber.—gev. in ‰
10.45	654.56	152.77	6.899	14495	14465	— 2.0
11.15	697.79	143.31	6.283	15916	15903	— 0.8
11.45	738.80	135.35	5.761	17358	17342	— 0.9
12.15	776.19	128.83	5.330	18762	18770	+ 0.4
12.45	811.97	123.16	4.953	20190	20209	+ 1.0
1.15	845.82	118.23	4.622	21636	21647	+ 0.5
1.45	878.35	113.85	4.329	23100	23086	— 0.6
2.15	907.01	110.25	4.086	24474	24524	+ 2.0
2.45	936.46	106.79	3.851	25968	25963	— 0.2
3.15	962.36	103.91	3.654	27367	27401	+ 1.3
3.45	988.24	101.19	3.468	28835	28840	+ 0.2
4.15	1013.66	98.65	3.296	30339	30279	— 2.0
4.45	1034.86	96.63	3.157	31676	31717	+ 1.3

[1]) Deze Verslagen **31**, 276 (1922); Zeitschr. f. physik. Chemie **103**, 481 (1923).

20 Oct. '22 Verzeeping bij 1500 atm. T = 25°.00 C. 31°/₀ alcohol. Aanvangsconcentratie 0.01 n. loog en 0.00975 n. ester.

Van de direct gemeten weerstanden is steeds 0.35 Ω afgetrokken voor de toeleidingsdraden. De waarnemingen van 10.45 en 4.45 zijn niet voor de berekening gebruikt.

De cijfers der 6de kolom zijn berekend met behulp van de normaal vergelijkingen, afgeleid uit de cijfers der 5de kolom. Het verschil der opvolgende cijfers in eerstgenoemde kolom is gelijk aan k, in overeenstemming met de vergelijking

$$k = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n-1}} \right)$$

De constante (tijdseenheid = $^1/_2$ uur) is hier 14.38, of per uur 28.77, zonder eenige correctie, welke eerst later in rekening zal worden gebracht.

De resultaten der verschillende snelheidsmetingen zijn in tabel III vereenigd. Bij de andere drukken is geheel te werk gegaan, als bij 1500 atmosferen.

TABEL III.

Snelheidsmetingen bij verschillende drukken en 25°.00 C. in 31 °/₀ alcohol. Ongecorrigeerd.

Druk	k gev.		k gemidd. [1]	k ber.
1	11.67	11.53	11.59	11.59^5
500	16.03	16.04	16.04	16.02^5
1000	21.82	21.54	21.68	21.69^5
1500	28.77	28.42	28.60	28.59^5

De snelheidsconstanten, in de laatste kolom vermeld, zijn berekend met behulp van de vergelijking:

$$k_p = 11.59^6 + 3.814\, p + 0.6175\, p^2$$

(eenheid van druk hier 500 atm.).

Deze vergelijking toont zeer duidelijk de groote toeneming van den drukcoëfficiënt met den druk. Immers uit deze vergelijking volgt:

$$\frac{\partial k}{\partial p} = 3.814 + 1.235\, p$$

[1]) Bij k gemiddeld is tevens het eerste cijfer herleid op 0 atm.

zoodat de drukcoëfficiënt bij 0 atm. gelijk 3.814, bij 1500 atm. gelijk 7.52 is, dus bijna tweemaal zoo groot.

Om de correctie voor de volumeverandering tengevolge van de compressie der oplossing te kunnen aanbrengen, dienen wij de compressibiliteit van het gebruikte medium te kennen. We mogen zonder bezwaar de compressibiliteit van de oplossing gelijk stellen aan die van het medium, aangezien de oplossing zeer verdund is.

Voor de bepaling en berekening van deze compressibiliteiten worde verwezen naar de voorafgaande verhandelingen p. 452 en 446; hier moge het resultaat voor 31 °/₀ alcohol worden herhaald.

TABEL IV.

Middelbare compressibiliteit van 31 % alcohol bij 25°.00 C.

Druk in atm.	Midd. compr. $\times 10^6$
0	42.5
0—500	40.0
0—1000	37.6
0—1500	35.1

Deze compressibiliteiten gelden dus voor het drukinterval 0—500, resp. 0—1000 en 0—1500 atmosferen en behoeven dus slechts met den bijbehoorenden druk vermenigvuldigd te worden om de volumeverandering per eenheid van volume te geven. Het volume bij den druk $p (V')$ kan uit dat bij gewonen druk (V_0) gevonden worden met behulp van:

$$V' = V_0 (1 - \beta \Delta p)$$

terwijl de overeenkomstige concentraties aldus samenhangen:

$$c' = \frac{c}{1 - \beta \Delta p}$$

Door substitutie [1]) van deze betrekking in de vergelijking, die het verband geeft tusschen concentratie en reactieconstante, blijkt, dat:

$$k' = k (1 - \beta \Delta p).$$

Tabel V geeft een overzicht van deze gecorrigeerde reactieconstanten.

De berekende waarden van k' zijn afgeleid uit de vergelijking:

$$k' = 11.59^5 + 3.585 \, p + 0.527 \, p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

($p = 500$ atm. als eenheid).

[1]) k' stelt de reactieconstante voor nadat de correctie voor de compressie is aangebracht, k is de ongecorrigeerde reactieconstante.

TABEL V.
Snelheidsconstanten na correctie voor compressibiliteit.

Druk	k gev.	$\beta \Delta p$	k'	k' ber.
0	11.59	—	11.59	11.59^5
500	16.04	20 10^{-3}	15.72	15.70
1000	21.68	37.6 10^{-3}	20.86	20.87^5
1500	28.60	52.6 10^{-3}	27.10	27.09^5

Ten slotte kunnen nu nog eenige correcties worden aangebracht, die echter voor alle drukken dezelfde (geringe) waarden en slechts beteekenis hebben voor de absolute grootte der constante nl. voor niet volkomen dissociatie van de natron, voor de contractie bij het mengen van de ester-oplossing (66 °/₀ alcohol) en de natron, en voor de concentratieverandering als gevolg van het verschil van de temperaturen, voor welke de normaliteiten gelden (15° C.) en bij welke de metingen zijn verricht (25° C.).

De dissociatiegraad, afgeleid uit de aequivalentie van ester en natron kan op ± 97.5 °/₀ worden gesteld; terwijl berekening leert dat 100 cc. 66.27 °/₀ alcohol en 100 cc. water na mengen bij 15° C. een volume innemen van 196.8 cc., bij 25° C. van 198.1 cc. De eerste correctie geeft dus een verkleining voor de concentratie van 2.5 °/₀, de beide andere een vergrooting van 1 °/₀, te zamen een verkleining van 1.5 °/₀. De reactieconstanten worden dus alle 1.5 °/₀ grooter, zoodat de vergelijking (1) ten slotte wordt:

$$k'' = 11.76 + 3.639\,p + 0.535\,p^2$$

B. Metingen in 42.5 °/₀ alcohol.

Deze zelfde verzeepingen zijn nu ook verricht in een waterig-alcoholisch milieu van andere concentratie nml. 42.5 °/₀, teneinde na te gaan of een geringe wijziging van het medium ook invloed oefent op de waarde van den drukcoëfficiënt. Dit bleek inderdaad het geval te zijn.

De ester-oplossing maakten wij nu in 94.5 °/₀ alcohol, zoodat na mengen met een gelijk volume water, alcohol van 42.5 °/₀ ontstond.

In tegenstelling met de ervaringen, opgedaan met 31 °/₀ alcohol, bleek hier niet sprake te zijn van een gang, wanneer gelijke volumina 0.02 n. ester- en loogoplossing werden gemengd. Hier is dus niet wijziging gebracht in de sterkte van de esteroplossing. Het ontwerpen der schalen geschiedde geheel op dezelfde wijze als bij 31 °/₀ alcohol.

Het resultaat vindt men in Tabel VI:

TABEL VI.
Geleidingsvermogen (100000: w) van natron-Na-zoutoplossingen bij verschillende drukken in 42.5 % alcohol. T = 25°.00 C.
Concentratie der loog.

Druk	0.01 n		0.0075		0.005		0.0025		0.0	
	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.	gev.	ber.
1	195.96	160.33	132.00	131.22	103.50	103.55	76.58	77.30	52.85	52.48
500	157.00	157.34	128.62	127.95	100.09	100.02	72.75	73.56	48.98	48.56
1000	153 71	154.12	125.57	124.74	96.81	96.79	69.41	70.26	45.56	45.15
1500	151.01	151.38	122.65	121.92	93.90	93.90	66.61	67.33	42.57	42.21

Voor iederen druk is uit de vijf waarnemingen met behulp van de methode der kleinste quadraten een vergelijking afgeleid, die het verband aangeeft tusschen concentratie en geleidingsvermogen.

Zoo is gevonden bij:

$$1 \text{ atm.}: \mu_1 = 52.48 + 96.39\,c + 11.46\,c^2$$
$$500 \text{ atm.}: \mu_{500} = 48.56 + 97.08\,c + 11.70^3\,c^2$$
$$1000 \text{ atm.}: \mu_{1000} = 45.15 + 97.59\,c + 11.38\,c^2$$
$$1500 \text{ atm.}: \mu_{1500} = 42.21 + 97.60\,c + 11.56^6\,c^2.$$

Met behulp van deze vergelijkingen werden voor c = 0 tot c = 1 met opklimming voor 0.1 de bijbehoorende waarden van het geleidingsvermogen berekend, zoodat de bij de eigenlijke snelheidsmetingen gevonden waarden van het geleidingsvermogen tot concentraties konden worden herleid door interpolatie.

Wat de snelheidsmetingen zelf betreft, moet opgemerkt worden, dat wij in dit aan alcohol rijker medium meer moeite ondervonden om goede overeenstemming te verkrijgen; speciaal bij 1 atmosfeer hebben wij veel last gehad van het vrijkomen van opgeloste lucht bij het mengen van de 0.02 n. natronloog met een alcoholische esteroplossing. Dit kon tenslotte onschadelijk gemaakt worden door het vaatje eerst geruimen tijd omgekeerd te laten staan, zoodat zich daarna tijdens de proef niet weer een luchtbel kon vormen boven de electroden, hetgeen de oorzaak was van de capaciteitsverandering, die op hare beurt het meten van een foutieven weerstand na zich sleepte.

Tabel VII geeft de resultaten der snelheidsmetingen bij verschillende drukken.

TABEL VII.
Snelheidsmetingen bij verschillende drukken en 25°.00 C. in 42.5 % alcohol.

Druk	k gev.				k gem.	k ber.
1	6.64	6.64	6.70		6.65[5]	6.62
500	8.91	8.88	8.93		8.91	8.99
1000	11 89	11.95	11.87		11.90[5]	11.82
1500	15.00	15.26	15.04	15.06	15 09	15.12

De berekende snelheidsconstanten volgen uit de, met behulp van de methode der kleinste quadraten uit de gevonden constanten berekende, vergelijking:

$$k = 6.62^{5} + 2.137\,p + 0.23\,p^2$$

(p als eenheid 500 atm.).

In tegenstelling met hetgeen bij 31 % alcohol gevonden is, zien wij hier een veel minder sterke stijging van den drukcoëfficiënt met den druk:

$$\frac{dk}{dp} = 2.137 + 0.46\,p.$$

Aan onze voorafgaande verhandeling ontleenen wij weer de compressibiliteit van 42.5 % alcohol als functie van den druk, teneinde de correctie voor de concentratievergrooting te kunnen aanbrengen.

TABEL VIII.
Middelbare compressibiliteit van 42.5 % alcohol bij 25°.00 C.

Druk	Midd. compr. $\times 10^6$
0	46.2
0–500	44.3
0–1000	41.0
0–1500	37.9

Tabel IX geeft een overzicht van de gecorrigeerde snelheidsconstanten.

TABEL IX.
Snelheidsconstanten na correctie voor compressibiliteit.

Druk	k gev.	$\beta\ \Delta p$	k′	k′ ber.
0	6.65		6.65	6.62[5]
500	8.91	22 10^{-3}	8.71	8.79
1000	11.91	41.0 10^{-3}	11.42	11.34
1500	15.09	56.8 10^{-3}	14.23	14.26

De waarden in de laatste kolom zijn berekend met behulp van de vergelijking:

$$k' = 6.62^5 + 1.982\,p + 0.187^5\,p^2.$$

Wat de verdere correcties betreft: wanneer 100 cc. alcohol van 94.5 °/₀ gemengd worden met 100 cc. water, dan ontstaan 192.9 cc. eveneens bij 15° C. gemeten, welke bij 25° C. een volume van 194.4 cc. innemen. In dit geval was het niet noodig de concentratie van den ester te verminderen om aequivalentie tusschen dezen en de OH′-concentratie te verkrijgen, zoodat die correctie vervalt. De concentraties zijn dus in werkelijkheid iets grooter dan bij de berekening is verondersteld en de reactieconstanten in dezelfde verhouding kleiner (194.4 : 200).

Ten slotte is dus de definitieve vergelijking van de snelheidsconstante als functie van den druk

$$k'' = 6.44 + 1.927\,p + 0.182^3\,p^2.$$

Vergelijken wij nu de beide vergelijkingen, die voor 31 resp. 42.5 gew. °/₀ de verzeepingssnelheden als functie van den druk voorstellen, nml.:

$$k''_{31\%} = 11.76 + 3.639\,p + 0.535\,p^2$$
$$k''_{42.5\%} = 6.44 + 1.927\,p + 0.182^3\,p^2$$

met elkaar, dan blijkt dat:

bij 1 atm. de reactie in 31 °/₀ alcohol 1.83 maal zoo snel verloopt als in 42.5 °/₀ alcohol;

bij 1500 atm. de reactie in 31 °/₀ alcohol 2.34 maal zoo snel verloopt als bij 1 atm. in dat medium;

bij 1500 atm. de reactie in 42.5 °/₀ alcohol 2.15 maal zoo snel verloopt als bij 1 atm. in dat medium;

dus bij 1500 atm. de reactie in 31 °/₀ alcohol 1.99 maal zoo snel verloopt als in 42 °/₀ alcohol bij denzelfden druk.

Over een groot traject genomen, is dus de drukcoëfficiënt van de reactiesnelheid (0—1500 atm.) in 31 °/₀ alcohol ongeveer 10 °/₀ grooter dan in 42.5 °/₀ alcohol. Men krijgt echter nog een anderen kijk op deze verandering, indien men den drukcoëfficiënt niet over een traject, maar bij een bepaalden druk vergelijkt.

Immers, p. 465 is er reeds op gewezen, dat voor 31 °/₀ alcohol de drukcoëfficiënt bij 1500 atm. bijna 2 maal zoo groot is als bij 1 atm. De vergelijking voor 42.5 °/₀ alcohol doet ons direct zien, dat hier deze groote toeneming niet aanwezig is.

Teneinde gemakkelijker de procentueele veranderingen der reactiesnelheden met den druk in beide media te kunnen vergelijken, ver-

menigvuldigen wij de tweede vergelijking met 11.76 : 6.44 zoodat de waarden bij nul atm. gelijk worden.

Dan is dus:

$$k_{31\%} = 11.76 + 3.639\, p + 0.535\, p^2$$

$$k_{42.5\%} = 11.76 + 3.519\, p + 0.333 p^2.$$

De geringe afwijking in de coëfficiënten van p wijst er op, dat de relatieve verandering van den drukcoëffiënt in beide media bij nul atm. slechts ± 3 % verschilt; bij 1500 atm. bedraagt deze daarentegen ± 22 %, dank zij het groote verschil in de coëfficiënten van p^2.

Het is ongetwijfeld zeer opmerkelijk, dat in tegenstelling met de verandering van andere grootheden met den druk (geleidingsvermogen, compressibiliteit), waar het tweede differentiaalquotiënt negatief wordt gevonden, (de invloed van druk dus minder wordt naarmate de druk stijgt), hier een zoo groote vermeerdering van dien invloed wordt ondervonden.

SAMENVATTING.

De reactiesnelheid tusschen natron en o-methoxykaneelzure aethylester, (beide 0.01 n.) werd gemeten in 31 % en in 42.5 % alcohol als functie van den druk bij 25° C. Door druk wordt in beide media de snelheid zeer aanzienlijk vergroot: de reactieconstante is nml. bij 1500 atm. 2.34 resp. 2.15 maal zoo groot als bij 1 atm. In 't bijzonder in 31 % alcohol is er een groote toeneming van den drukcoëfficiënt met den druk.

Utrecht, April 1923. VAN 'T HOFF *Laboratorium.*

Wiskunde. — M. J. BELINFANTE: „*Over machtreeksen van den vorm*: $x^{p_0} - x^{p_1} + x^{p_2} - x^{p_3} + \dots$"

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

Inleiding.

Een bekend theorema van FROBENIUS leert, dat als Σa_n sommeerbaar is van de eerste orde, $\left(\text{d.w.z. } \lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = s,\right.$ $\left.\text{waarin } s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n\right)$ $\lim. \sum_1^\infty a_n x^n = s$, indien x langs reëele waarden van beneden tot 1 nadert (hetgeen we aanduiden door $x \rightarrow 1$). [1])

Onder dezelfde voorwaarden geldt: [2])

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_1^\infty a_n x^{p_n} = s$$

mits $p_1 < p_2 < \dots$ geheele getallen zijn, die voldoen aan:

$$\nu (p_\nu - p_{\nu-1}) < p_\nu \, . \, k \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Een dergelijke voorwaarde als (1) is noodzakelijk, zooals blijkt uit het volgende voorbeeld, waarin aan onze voorwaarde niet voldaan is, en $\Sigma a_n x^{p_n}$ geen limiet heeft voor $x \rightarrow 1$.

Stel $p_\nu = 2^\nu$ en $a_n = (-1)^{n+1}$, dan zal:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots s_n}{n} = \tfrac{1}{2}$$

terwijl $\sum_1^\infty a_n x^{p_n} = x - x^2 + x^4 - x^8 + \dots$ voor $x \rightarrow 1$ schommelt tusschen grenzen, die ter weerszijden van het interval (0,498—0,502) gelegen zijn. [3])

We vragen ons nu af: wat is het verband tusschen de exponentenreeks $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ en het al of niet bestaan van

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^{p_0} - x^{p_1} + x^{p_2} - \dots)$$

[1]) BROMWICH, Theory of infinite series, p. 312.

[2]) BROMWICH, op. cit., p. 388.

[3]) BROMWICH, op. cit., p. 498 voorbeeld 30.

HARDY heeft verschillende bijzondere exponent-reeksen onderzocht [1]) met behulp van bijzondere methoden, die niet kunnen worden toegepast op andere exponent-reeksen, b.v. op de reeks van FIBONACCI

$$1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Het eenige algemeene resultaat, dat HARDY bereikte is het niet-bestaan van een limiet indien:

$$p_{\nu+1} > k \,.\, \nu \,.\, p_\nu \,.\, \log . p_\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

doch uit het boven geciteerde voorbeeld van HARDY, alwaar $p_\nu = 2$, volgt dat een limiet afwezig kan zijn, zonder dat aan de voorwaarde (2) voldaan is.

In dit artikel zal een ruimere voorwaarde voor het niet-bestaan van een limiet gegeven worden (§ 2), met behulp van een theorema van LITTLEWOOD, dat in § 1 besproken wordt.

§ 1.

LITTLEWOOD bewees het volgende theorema: [2])

Theorema 1. *Indien* $|n a_n| < k$, *en* $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_1^\infty a_n x^n = s$, *dan convergeert* $\sum\limits_1^\infty a_n$ *tot* s.

Voor ons doel hebben we de volgende uitbreiding noodig, welke eveneens door LITTLEWOOD geformuleerd is: [3])

Theorema 2. *Indien de middelwaarden van de* $(k-1)^{ste}$ *orde van* Σa_n *begrensd zijn, en* $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_1^\infty a_n x^n = s$, *dan is* Σa_n *sommeerbaar van de* k^{de} *orde.* [4])

LITTLEWOOD merkte op dat theorema 2 op soortgelijke wijze bewezen wordt als theorema 1. Daar dit laatste nog al lang en moeilijk is, is de opmerking, dat theorema 2 een onmiddellijk gevolg is van theorema 1 misschien niet van belang ontbloot.

Gebruiken we de notatie van het artikel *„Over een generalisatie van* TAUBER'S *theorema betreffende machtreeksen"* [5]), dan gelden de

---

[1]) Quarterly Journal, vol. 38, p. 269, 1907.

[2]) Proceedings of the London Mathematical Society Ser. 2, Vol. 9, p. 434—448, 1911.

[3]) Zie Proc. of the Lond. Math. Soc., l.c., p. 448.

[4]) Voor de definities van de middelwaarden van CESARO-HÖLDER, zie BROMWICH, op. cit., § 122, 123 en LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, § 5.

[5]) Verslagen van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Deel XXXII p. 292.

volgende betrekkingen tusschen de zoogenaamde middelwaarden van de orde k en de functies φ_k:

$$\varphi_k(x) = \sum_1^\infty [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \, . \, x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\varphi_0(x) = \sum_1^\infty a_n \, x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\varphi_k(x) + (1-x) \, . \, \varphi'_k(x) = \varphi_{k-1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$n \, . \, [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] = A_n^{(k-1)} - A_{n-1}^{(k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Met behulp van (2) hebben we in genoemd artikel bewezen[1]) dat uit $\lim_{x \to 1} \, . \, \sum_1^\infty a_n x^n = s$ volgt:

$$\lim_{x \to 1} \varphi_k(x) = s.$$

Indien nu bovendien geldt:

$$| \, n \, . \, [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \, | < c,$$

dan zal volgens theorema 1 de reeks $\sum_1^\infty [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}]$ tot s convergeeren, d. w. z.:

$$\lim_{n=\infty} A_n^{(k)} = s$$

of: Σa_n is sommeerbaar van de k^{de} orde.

Daar

$$A_n^{(k)} = \frac{A_1^{(k-1)} + A_2^{(k-1)} + \ldots + A_n^{(k-1)}}{n}$$

volgt uit $|A_i^{(k-1)}| < c$, dat ook $|A_i^{(k)}| < c$ en dus met behulp van (3):

$$| \, n \, [A_n^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}] \, | < 2c.$$

Hieruit blijkt dat Σa_n van de k^{de} orde sommeerbaar is, indien voldaan is aan:

$$| \, A_i^{(k-1)} \, | < c \quad \text{en} \quad \lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n \, x^n = s.$$

We gebruiken in § 2 het bijzondere geval dat $k = 1$. Alsdan luidt theorema 2 als volgt:

Theorema 3: *Indien* $\lim_{x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n = s$, *en* $|s_n| < c$, *dan geldt* $\lim_{n=\infty} \sigma_n = s$, *waarbij* $\sigma_n = \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$.

---

[1]) l.c. p. 295.

§ 2.

We bewijzen nu het volgende theorema:

Theorema 4. *Indien* $1 < k_1 \leq \frac{r_{n+1}}{r_n} \leq k_2$, en $k_1 > 1 + \frac{k_2^2 - 1}{2k_2}$, *dan zal* $f(x) = x^{r_0} - x^{r_1} + x^{r_2} - \ldots$ *voor* $x \to 1$ *niet tot een limiet naderen* [1].

Bewijs: We laten zien dat de coefficientenreeks van $f(x)$, welke bestaat uit de termen 1, $(r_1 - r_0 - 1)$ nullen, -1, $(r_2 - r_1 - 1)$ nullen, 1, enz. . . , *niet* sommeerbaar is van de eerste orde, dus dat σ_n *geen* limiet heeft als $n \to \infty$. Het is dan uitgesloten, dat $f(x)$ tot een limiet zou naderen als $x \to 1$, want hieruit zou volgens theorema 3 volgen dat σ_n voor $n = \infty$ dezelfde limiet had [2]).

We toonen aan dat σ_n voor $n = \infty$ geen limiet heeft, door twee positieve getallen γ en m te berekenen met de eigenschap:

$$\sigma_{r_{2p+1}} - \sigma_{r_{2p}} > \gamma \quad \text{als} \quad p > m$$

We hebben n.l.:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \frac{n\,a_1 + (n-1)\,a_2 + \ldots + [n - (n-1)]\,a_n}{n}$$

$$\sigma_{r_{2p}} = \frac{r_{2p} - [r_{2p} - r_1 + 1] + [r_{2p} - r_2 + 1] - \ldots + [r_{2p} - r_{2p} + 1]}{r_{2p}}$$

$$= 1 + \frac{r_1 - r_2 + r_3 - \ldots - r_{2p}}{r_{2p}} = 1 - \frac{r_{2p} - r_{2p-1} + r_{2p-2} - \ldots - r_1}{r_{2p}}$$

Hieruit volgt met behulp van $1 < k_1 \leq \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} \leq k_2$, dus $r_{\nu+1} \geq r_\nu k_1$ en $r_{\nu+1} - r_\nu \geq (k_1 - 1)\, r_\nu$:

$$\sigma_{2p} \leq 1 - \frac{(k_1 - 1)\, r_{2p-1} + (k_1 - 1)\, r_{2p-3} + \ldots + (k_1 - 1)\, r_1}{r_{2p}}$$

$$\leq 1 - \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{r_{2p-1} + r_{2p-3} + \ldots + r_1}{r_{2p-1}}$$

$$\leq 1 - \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \left[1 + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_4^2} + \ldots + \frac{1}{k_2^{2p-2}}\right]$$

$$\leq 1 - \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k_2^{2p}}}{1 - \frac{1}{k_2^2}}$$

---

[1]) Hierbij is $r_0 = 1$ ondersteld.

[2]) Aan de conditie $|s_n| < c$ is door de hier beschouwde reeksen steeds voldaan, daar s_n 1 of 0 is.

$$\sigma_{r_{2p+1}} = \frac{r_{2p+1} - [r_{2p+1} - r_1 + 1] + [r_{2p+1} - r_2 + 1] - \ldots - [r_{2p+1} - (r_{2p+1} - 1)]}{r_{2p+1}}$$

$$= \frac{-1 + r_1 - r_2 + r_3 - \ldots + r_{2p+1}}{r_{2p+1}} = \frac{r_{2p+1} - r_{2p} + r_{2p-1} - \ldots + r_1 - 1}{r_{2p+1}}$$

$$\sigma_{r_{2p+1}} \geq \frac{(k_1 - 1)\, r_{2p} + (k_1 - 1)\, r_{2p-2} + \ldots + (k_1 - 1)\, r_2 + k_1 - 1}{r_{2p+1}}$$

$$\geq \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{r_{2p} + r_{2p-2} + \ldots + r_2 + 1}{r_{2p}}$$

$$\geq \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \left[1 + \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_2^4} + \ldots + \frac{1}{k_2^{2p}}\right]$$

$$\geq \frac{k - 1}{k_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k_2^{2p+2}}}{1 - \frac{1}{k_2^2}}$$

$$\sigma_{r_{2p+1}} - \sigma_{r_{2p}} \geq \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k_2^{2p+2}}}{1 - \frac{1}{k_2^2}} - 1 + \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k_2^{2p}}}{1 - \frac{1}{k_2^2}}$$

$$\geq \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{k_2^2}} - 1 - \frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{1}{k_2^{2p}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{k_2^2}}{1 - \frac{1}{k_2^2}}$$

Stel nu $\frac{k_1 - 1}{k_2} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{k_2^2}} - 1 = c$, dan volgt uit $k_1 > 1 + \frac{k_2^2 - 1}{2k_2}$ dat $c > 0$. We hebben dan:

$$\sigma_{r_{2p+1}} - \sigma_{r_{2p}} \geq c - \frac{\frac{c+1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k_2^2}\right)}{k_2^{2p}}.$$

Daar $k_2 > 1$, is de limiet van de tweede term voor $p \to \infty$ nul, en dus is bij elk getal γ dat voldoet aan $0 < \gamma < c$ een getal m te bepalen, zoodat:

$$\sigma_{r_{2p+1}} - \sigma_{r_{2p}} > \gamma > 0 \quad \text{voor} \quad p > m.$$

Opmerking 1.

Het is natuurlijk voldoende dat de betrekking $1 < k_1 \leq \frac{r_n+1}{r_n} \leq k_2$ pas geldt voor $n >$ een eindig getal g, daar de toevoeging van een eindig aantal termen het al of niet bestaan van een limiet niet beïnvloedt.

Zoo heeft de functie $x - x^2 + x^3 - x^5 + x^8 - x^{13} + \ldots$ voor $x \to 1$ geen limiet, daar voor $n > 5$:

$$1\frac{3}{5} \leq \frac{r_{n+1}}{r_n} \leq 1\frac{2}{3} \quad \text{en} \quad 1\frac{3}{5} > 1 + \frac{\left(1\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{2 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)}.$$

Opmerking 2.

Strikt genomen hebben we in § 1 theorema 2 slechts bewezen voor het geval dat de HÖLDER-middelwaarden begrensd zijn. Nu volgt uit het bestaan van een „Höldersom van de k^{de}-orde" het bestaan van een „Cesarósom van de k^{de} orde", en vice-versa [1]); als we dus bewijzen dat de middelwaarden van CESARÓ begrensd zijn, indien de middelwaarden van HÖLDER van dezelfde orde begrensd zijn, dan is theorema 2 bewezen voor beide categorieën middelwaarden.

Nu geldt (zie LANDAU l.c.):

$$H_n^{(k)} = T_2\, T_3 \ldots T_k\, (C_n^{(k)}) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

waarin $H_n^{(k)}$ de n^{de} middelwaarde van HÖLDER en $C_n^{(k)}$ de n^{de} middelwaarde van CESARÓ voorstelt, en

$$T_p\,(x_n) = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1}{p} \cdot x_n \quad \ldots \quad (2)$$

Uit (2) leiden we gemakkelijk af dat als $|x_i| < c$ voor iedere i, ook $|T_k(x_i)| < c$ voor iedere i. Is dus $|C_n^{(k)}| < c$, dan volgt hieruit met behulp van (1) dat ook $|H_n^{(k)}| < c$.

---

[1]) Stelling van KNOPP-SCHNEE. Zie LANDAU, l.c.

Wiskunde. — JAN DE VRIES: „*Een afbeelding van een tetraedralen complex op de puntenruimte*".

1. Zij gegeven een bundel van quadratische oppervlakken, die een ruimtekromme ϱ^4 tot basis heeft. De poolvlakken van een punt P t.o.v. die oppervlakken gaan door een rechte p, die de *poollijn* van P zal genoemd worden. Door P gaan twee bisecanten van ϱ^4; de rechte p verbindt de punten dier bisecanten, welke door ϱ^4 van P harmonisch worden gescheiden. De poollijn wordt onbepaald als men P in den top van een der vier tot den bundel behoorende kegels plaatst; elke rechte van het vlak $\omega_k \equiv O_l\, O_m\, O_n$ kan dan als poollijn worden beschouwd.

De stralencomplex T der poollijnen p wordt afgebeeld op de puntenruimte $\{P\}$. De ribbe $O_k\, O_l$ wordt afgebeeld in elk punt der overstaande ribbe $O_m\, O_n$. Zal een rechte r tot T behooren, dan moeten haar poollijnen r' en r'' t.o.v. de oppervlakken α^2 en β^2 van den bundel elkaar snijden. Als de rechte r een waaier doorloopt, beschrijven r' en r'' twee projectieve waaiers; de waaier (r) bevat dus twee stralen, waarvoor r' en r'' elkaar snijden. De complex T is dus *quadratisch* [1]) en heeft vier hoofdpunten O_k en vier hoofdvlakken ω_k; hij is derhalve *tetraedraal*.

Een punt P van ϱ^4 is het beeld van de rechte p, die ϱ^4 in P aanraakt. Het raaklijnenregelvlak van ϱ^4 wordt dus afgebeeld in de punten van ϱ^4.

2. Als P een rechte r doorloopt, beschrijven de poolvlakken van P t.o.v. α^2 en β^2 twee projectieve bundels om de poollijnen r' en r''. De poollijn p beschrijft dus een *quadratische regelschaar* $(p)^2$; de toegevoegde regelschaar bestaat uit de poollijnen van r t.o.v. de door ϱ^4 gelegde quadratische oppervlakken. De snijpunten van r met de hoofdvlakken ω_k zijn de beelden van vier stralen p, die door de hoofdpunten O_k gaan. Blijkbaar bevat T ∞^4 regelscharen $(p)^2$.

Is r een straal van T, dan snijden r' en r'' elkaar, zoodat de projectieve bundels van poolvlakken een quadratische kegel voort-

---

[1]) Is de bundel bepaald door $\sum_4 a_k x_k^2 = 0$ en $\sum_4 b_k x_k^2 = 0$, dan hebben de poolvlakken van het punt y tot coördinaten $a_k y_k$ en $b_k y_k$. De coördinaten van p zijn dan $p_{12} = (a_3 b_4 - a_4 b_3)\, y_3 y_4$ enz. Stelt men $a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3 = c_{13,24}$, dan wordt T voorgesteld door $c_{12,34}\, p_{12}\, p_{34} + c_{23,14}\, p_{23}\, p_{14} + c_{31,24}\, p_{31}\, p_{24} = 0$.

brengen, die het punt $r'r''$ tot top heeft. Hieruit volgt, dat de *complexkegels* van T worden afgebeeld door *puntenreeksen* (P), die op *complexstralen* zijn gelegen.

3. De stralen van T, die in een vlak φ liggen (dus de *complexkegelsnede* φ^2 omhullen) worden afgebeeld door de punten P van een ruimtekromme, welke door de hoofdpunten O_k gaat. Immers de snijlijn der vlakken φ en ω_k is raaklijn van φ^2 en wordt afgebeeld in O_k. Daar ω_k slechts de beeldpunten O_l, O_m, O_n kan bevatten, is het beeld van het raaklijnenstelsel van φ^2 een *kubische ruimtekromme* φ^3 beschreven om het viervlak $O_1 O_2 O_3 O_4$.

4. De complex T snijdt een *lineairen complex* A in een *congruentie* (2,2), die singuliere punten in O_k, singuliere vlakken in ω_k heeft. Immers O_k is de top van een waaier, die tot de beide complexen, dus tot (2,2) behoort. De poollijnen p' en p'' der stralen van dien waaier t.o.v. α^2 en β^2 vormen twee projectieve, in ω_k gelegen, waaiers, en deze brengen een om $O_l O_m O_n$ beschreven kegelsnede voort. Het *beeld* der *congruentie* (2,2) is dus een *quadratisch oppervlak* Ω^2 beschreven om $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Daar A in het algemeen geen der ribben $O_k O_l$ bevat, zal ook Ω^2 i. h. a. geen dier ribben bevatten [1]).

De ∞^5 oppervlakken Ω^2 zijn de beelden van ∞^5 in T begrepen congruenties (2,2). Hiertoe behooren ∞^4 *axiale* (2,2), welke door de ∞^4 *axiale lineaire complexen* worden bepaald.

5. De stralen van T, welke tot twee complexen A_1 en A_2 behooren, vormen een regelschaar $(p)^4$ van den vierden graad; deze behoort natuurlijk tevens tot alle complexen A van den door A_1 en A_2 bepaalden bundel, dus in het bijzonder tot de beide axiale complexen van dien bundel. Hun assen zijn richtlijnen van $(p)^4$, en wel dubbele richtlijnen, want de complexkegel van een op een dier assen gelegen punt wordt door de andere as tweemaal gesneden.

De *regelschaar* $(p)^4$ wordt afgebeeld door de *ruimtekromme* σ^4, welke de beide oppervlakken Ω^2 gemeen hebben, die de beelden zijn van de door A_1 en A_2 bepaalde congruenties.

---

[1]) Wordt Λ door $\sum_6 d_{kl} p_{kl} = 0$ bepaald, dan heeft Ω^2 tot vergelijking

$$\sum_6 d_{kl} c_{mn} y_m y_n = 0.$$

Omgekeerd is het oppervlak $\sum_6 f_{kl} y_k y_l = 0$ het beeld der (2,2), welke door den complex $\sum_6 \frac{f_{kl}}{c_{kl}} p_{mn} = 0$ wordt bepaald.

Wanneer de assen r_1 en r_2 van twee axiale complexen elkaar snijden ontaardt de congruentie (2,2) welke die complexen met T gemeen hebben, in het samenstel van de complexstralen p door het punt $R \equiv r_1 r_2$ en van de complexstralen in het vlak $\varrho \equiv r_1 r_2$. In verband hiermee snijden de door $r_1 r_2$ aangewezen beeldoppervlakken Ω^2 elkaar thans in de ruimtekromme ϱ^3, die de in ϱ gelegen complexstralen afbeeldt, en in de poollijn r van R (beeld van den complexkegel van R); blijkbaar is r een der bisecanten van ϱ^3.

Is ϱ^3 een willekeurige om $O_1 O_2 O_3 O_4$ beschreven *kubische ruimtekromme*, dan kan men ∞^2 oppervlakken Ω^2 door ϱ^3 leggen, die dan, twee aan twee genomen, nog een bisecante van ϱ^3 gemeen hebben, dus blijkbaar twee axiale complexen vertegenwoordigen, waarvan de assen elkaar snijden, zoodat de overeenkomstige (2,2) weer uiteenvalt in een *complexkegel* en een *complexkegelsnede*; de laatste wordt door ϱ^3 afgebeeld.

6. Een *kegelsnede* $(P)^2$ heeft vier punten gemeen met het oppervlak Ω^2, dat bij een axialen complex A behoort, is dus het beeld van een *rationale regelschaar* $(p)^4$. Elke in het vlak van $(P)^2$ gelegen straal s van T bevat twee punten van $(P)^2$; het beeld S van s draagt dus twee stralen van $(p)^4$. De kromme $(S)^3$, die de stralen s afbeeldt, is dus de *dubbelkromme* van $(p)^4$.

Wanneer $(P)^2$ door O_1 gaat, zal zij het beeld zijn van een *kubische regelschaar* $(p)^3$, waarvan de *dubbele richtlijn* door O_1 gaat; immers de snijpunten van $(P)^4$ met ω_1 zijn de beelden van twee stralen p door O_1.

Gaat $(P)^2$ door O_1 en door O_2, dan is zij de afbeelding van een *quadratische regelschaar* $(p)^2$. Omgekeerd heeft een regelschaar $(p)^2$ twee stralen gemeen met een axialen complex; haar beeld snijdt het overeenkomstige oppervlak Ω^2 dus, buiten O_k, in twee punten. Dit beeld is dus òf een *rechte* (§ 2) of een *kegelsnede* door twee hoofdpunten O.

7. De punten P van een vlak φ beelden de stralen van een congruentie $[p]$ af. De poolvlakken α en β van P t.o.v. twee quadratische oppervlakken α^2 en β^2 van den gegeven bundel vormen twee projectieve vlakkenschoven om de polen van φ. Hun doorgangen op een vlak ψ vormen twee projectieve stralenvelden, dus bevat ψ drie stralen $p \equiv \alpha\beta$.

De vlakken α door een punt Q vormen een bundel; van den overeenkomstigen bundel (β) gaat één vlak door Q, dus draagt Q één straal p.

Het *puntenveld* $[P]$ is dus de afbeelding van een *congruentie* (1,3). Deze bestaat uit de koorden van een *kubische ruimtekromme* σ^3, welke door de punten O gaat; want de puntenreeks (P) in ω_k is het beeld van de ribben p van een quadratischen kegel, die O_k tot top heeft.

8. Als de *kubische kromme* $(P)^3$ door *drie hoofdpunten* gaat, is zij het beeld van een *kubisch regelvlak* $(p)^3$. Immers, een willekeurig oppervlak Φ^2 dat een axialen complex afbeeldt, snijdt $(P)^3$ nog in drie punten: op de as van dien complex rusten dus drie rechten der regelschaar. Door $(P)^3$ kan één bundel (Φ^2) gelegd worden; immers men kan ∞^1 Φ^2 door vier willekeurige punten van $(P)^3$ laten gaan, die dan ieder zeven punten van $(P)^3$ bevatten. De overeenkomstige complexen A vormen ook een bundel; de assen der beide tot dien bundel behoorende axiale complexen snijden alle stralen der regelschaar, zijn dus de *richtlijnen* van het *kubisch regelvlak* $(p)^3$.

Gaat $(P)^3$ door *twee hoofdpunten*, dan is zij het beeld van een *regelschaar* van den *vierden graad*. Er kan nu één Φ^2 door $(P)^3$ worden gelegd: de regelschaar behoort tot de congruentie (2,2) welke de overeenkomstige complex A met T gemeen heeft; daar zij *rationaal* moet zijn, heeft zij een *kubische dubbelkromme*.

9. Een *oppervlak* $[P]^n$ is het beeld van een *congruentie* met *stergraad* n, want zijn snijpunten met een straal t van T zijn de beelden van n stralen door den top van den door t afgebeelden complexkegel. De *veldgraad* der congruentie is i.h.a. $3n$, want elk snijpunt van $[P]^n$ met de kubische kromme φ^3, welke de in een vlak φ gelegen stralen t afbeeldt, is het beeld van een in φ gelegen straal der congruentie. Gaat $[P]^n$ s_k maal door O_k, dan is de veldgraad blijkbaar $3n - \sum\limits_4 s_k$.

Een *ruimtekromme* $(P)^n$ is het beeld van een *regelschaar* van den graad $2n$, want het beeldoppervlak $[P]^2$ van een axialen complex snijdt $(P)^n$ in $2n$ punten, die de beelden zijn van evenzoovele stralen t, welke de as van den complex snijden.

10. Wanneer de basis van een bundel quadratische oppervlakken uit een kubische kromme ϱ^3 en een van haar koorden bestaat, vormen de poollijnen van de punten der ruimte een quadratischen complex, die op dezelfde wijs wordt afgebeeld als de tetraedrale complex.

Wij kunnen dien bundel steeds voorstellen door

$$\alpha(x_2^2 - x_1 x_3) + \beta(x_3^2 - x_2 x_4) = 0.$$

De poolvlakken van het punt y t.o.v. de kegels $\alpha = 0$ en $\beta = 0$ hebben tot coördinaten $y_3, -2y_2, y_1, 0$ en $0, y_4, -2y_3, y_2$. De poollijn van y wordt dus voorgesteld door

$$\frac{\pi_{12}}{y_3 y_4} = \frac{\pi_{23}}{4y_2 y_3 - y_1 y_4} = \frac{\pi_{31}}{2y_3^2} = \frac{\pi_{14}}{y_2 y_3} = \frac{\pi_{24}}{-2y_2^2} = \frac{\pi_{34}}{y_1 y_2}.$$

Dus is

$$4p_{23}^2 = p_{13} p_{24}.$$

Deze complex heeft O_1 en O_4 tot hoofdpunten, ω_2 en ω_3 tot hoofdvlakken.

De complexkegel van x raakt in O_1 aan $O_1 O_3$, in O_4 aan $O_4 O_2$. De poollijn van y ligt in het vlak ξ, wanneer aan

$$\xi_1(2y_2^2 x_2 - y_1 y_2 x_3) + \xi_2 y_2 y_3 x_2 + \xi_3 y_2 y_3 x_3 + \xi_4(2y_3^2 x_3 - y_3 y_4 x_2) = 0$$

door alle waarden van x_2 en x_3 wordt voldaan. Hieruit volgt, dat de in ξ gelegen complexstralen worden afgebeeld door de punten der kubische kromme, welke door de kegels

$$2\xi_1 y_2^2 + \xi_2 y_2 y_3 = \xi_4 y_3 y_4 \quad , \quad 2\xi_4 y_3^2 + \xi_3 y_2 y_3 = \xi_1 y_1 y_2$$

is bepaald. (De koorde $O_1 O_4$ behoort niet tot het beeld).

De congruentie (2,2) welke de complex gemeen heeft met den axialen complex met richtlijn $a_x = 0$, $b_x = 0$, heeft tot beeld het quadratisch oppervlak, waarvan de verg. is

$$(a_1 b_2) y_1 y_2 + [4(a_1 b_4) + (a_2 b_3)] y_2 y_3 - (a_1 b_4) y_1 y_4 + (a_3 b_4) y_3 y_4 +$$
$$+ 2(a_1 b_3) y_2^2 + 2(a_2 b_4) y_3^2 = 0,$$

waar $(a_k b_l) = a_k b_l - a_l b_k$ is.

Physiologie. — R. BRINKMAN en A. VON SZENT GYÖRGYI: „*Onderzoekingen over de chemische oorzaken der normale en pathologische haemolyse*".

(Aangeboden door de Heeren H. J. HAMBURGER en E. D. WIERSMA).

III. *Experimenteele anaemie tengevolge van linoleenzuur-injectie.*

In de vorige mededeeling dezer reeks werd er op gewezen, dat de hoogere vetzuren in het bloed in het algemeen als Ca-verbindingen voorkomen en als zoodanig hun sterke werking op de oppervlaktespanning hebben verloren. Tevens werd toen echter aangetoond, dat de Ca-zeepen der sterk onverzadigde vetzuren, in casu van het linoleenzuur, hun capillair-activiteit hebben behouden en dat wij daarom van dit vetzuur een veel grootere werking op de haemolyse in vivo konden verwachten.

Het bleek nu inderdaad, dat het linoleenzuur een sterk werkend intravitaal haemolyticum was en dat in het bloed eigenlijk geen directe bescherming tegen de werking van dit zuur voorkomt. Zooals reeds lang bekend is, kan de injectie der verzadigde hoogere vetzuren of van oliezuur geen duidelijke intravitale haemolyse veroorzaken, waarschijnlijk door de boven beschreven Ca-binding. Met het linoleenzuur is het geheel anders gesteld, zooals blijkt uit de volgende experimenten.

Intraveneuse injectie. Een konijn van 3620 gr. krijgt 250 mgr. linoleenzuur, geëmulgeerd in 10 cc. isotonische phosphaatoplossing, in de oorvene geïnjiceerd. 10 minuten daarna is de oppervlaktespanning van het bloed, welke anders zeer constant 54,5—55,5 dynes per cM. is, gedaald op 50 dynes en is het serum zeer lichtrood gekleurd. Vervolgt men nu verder de oppervlaktespanning, dan blijkt, dat deze niet weer tot de normale waarde kan stijgen, maar steeds om ongeveer 50 dynes schommelt. De haemoglobinaemie neemt meer en meer toe; na 20 minuten verschijnt een sterke haemoglobinurie en maakt het konijn een zeer suffen en zieken indruk. Een uur na de injectie sterft het dier onder verschijnselen van uiterste anaemie en dyspnoe.

Wij konden op deze wijze in meerdere proeven vaststellen, dat

een konijn door intraveneuse inspuiting van ongeveer 100 mgr. linoleenzuur, per K. G. lichaamsgewicht, onder verschijnselen van zeer sterke haemolyse te gronde gaat. Geeft men kleinere hoeveelheden linoleenzuur intraveneus, dan sterft het konijn niet zoo spoedig, doch ontstaat een chronische haemolyse met sterke anaemie, urobilnurie, etc. Men heeft bij deze wijze van linoleenzuur-toevoer echter steeds de kans, dat een iets te groote dosis tot een direct doodelijke intravitale haemolyse leidt.

Een ernstige chronisch haemolytische anaemie wordt verkregen door de subcutane of beter de *intramusculaire injectie* van linoleenzuur; in dat geval schijnt het grootste deel van het ingespoten vetzuur geïnactiveerd te worden en ontwikkelt zich het volgende ziektebeeld.

Konijn van 3450 gr. in goeden voedingstoestand. Aantal roode bloedlichaampjes 5.400.000. Haemoglobine 60 (Sahli). Vorm der bloedlichaampjes in plasma zuiver biconcaaf; zeer weinig anisocytose; geen polychromatophilie; geen normoblasten. Serum kleurloos, bevat geen bilrubine; Urobiline of urobilinogeen in urine negatief. De oppervlaktespanning van het bloed is 55.4 dyne bij 19°.

Het konijn krijgt elken dag 200 mgr. linoleenzuur intramusculair. Na de eerste inspuiting daalde de oppervlaktespanning van het bloed op 52—53 dynes en bleef zoo gedurende het verdere verloop der proef. 2—3 dagen na het begin der behandeling begint een vrij intensieve urobilinurie, welke gedurende den duur der inspuitingen niet weer verdwijnt. Het bloedbeeld begint vanaf den derden dag een steeds sterker wordende anisocytose en polychromatophilie te vertoonen, terwijl het aantal onregelmatig gevormde cellen en „Stechäpfel" toeneemt. Na 5 dagen was het aantal bloedlichaampjes gedaald op 2.500.000; daarna trad de eerste regeneratie op met talrijke normoblasten en zeer sterke anisocytose en polychromatophilie. Het aantal bloedlichaampjes was toen 3.700.000; het haemoglobinegehalte 55. De index was dus duidelijk verhoogd en deze verhooging blijft gedurende het tijdperk der injecties steeds sterk uitgesproken.

Na 12 dagen was het aantal bloedlichaampjes weer op 2.900.000 gedaald (haemoglobin 45) en trad de tweede sterke regeneratie op.

Het roode bloedbeeld vertoonde nu de typische afwijkingen zooals ze bij zeer duidelijke pernicieuse anaemie gevonden worden, vooral de macrocytose, poikilocytose, sterk vervormde bloedlichaampjes, polychromatophile megalocyten, en normoblasten, waren opvallend. Bilirubinaemie konden wij bij het konijn alleen bij het intensieve acute haemolyse vaststellen; bij de meer chronisch haemolytische

anaemieën treedt dit verschijnsel niet op, hoewel de urobilirubinurie steeds belangrijk is.

Het konijn vermagert onder de behandeling sterk en maakt een zieken indruk. Staakt men de injecties in het begin, dan schijnt genezing te kunnen optreden. Zet men de behandeling voort, dan blijft het typische perniciosa-beeld bestaan.

Het is dus niet twijfelachtig, dat de intramusculaire injectie van linoleenzuur in korten tijd een chronische haemolytische anaemie veroorzaakt, welker roode bloedbeeld alle kenmerken der pernicieuse anaemie vertoont. Het witte bloedbeeld hebben wij nog niet onderzocht. Een nauwkeuriger onderzoek dezer linoleenzuur-anaemie zullen wij nog moeten uitvoeren, maar het staat wel vast, dat het linoleenzuur een intravitaal haemolyticum van sterke werking is. Zooals in de vorige mededeelingen werd afgeleid, moeten wij deze werking in vivo toeschrijven aan het feit, dat de Ca-zeepen der meervoudig onverzadigde vetzuren kapillair-actief en sterk haemolytisch zijn, in tegenstelling met de Ca-zeepen van palmitinezuur en oliezuur.

Daar nu het linoleenzuur een vetzuur is, dat een belangrijk percentage der phosphatied-vetzuren uitmaakt, en het wel zeker is, dat het vroeger door ons gebruikte lecithine-handelspraeparaat vrij groote hoeveelheden van dit zuur bevatte, is het zeer waarschijnlijk, dat de vroeger door een onzer beschreven haemolytische anaemie door lecithine-injectie eveneens op linoleenzuur-werking berustte.

Het linoleenzuur is een in de biochemie der vet- en phosphatiedstofwisseling voorkomende stof en het zou zeer goed mogelijk zijn, dat juist dit zuur ook in het normale bloed circuleerde. Wij konden inderdaad reeds door specifieke extractie aantoonen, dat onder de 0.6—0.7 mgr. vetzuren, welke in 1 cc. normaal menschelijk bloed voorkomen, een kleine fractie aanwezig is, welke uit de sterker onverzadigde vetzuren bestaat. Vetzuren met 2 dubbele bindingen (linolzuur) kunnen in de vetzuur-fractie tot nu toe niet aangetoond worden, maar wel de zuren met drie en vier dubbele bindingen, waaronder ook het linoleenzuur behoort.

Het bleek ook, dat alle andere vetzuren van het bloed door serum geïnactiveerd worden in capillair-actief en haemolytisch opzicht, maar dat deze geringe fractie der drie of viervoudig onverzadigde vetzuren ook door serum niet geheel geremd wordt, zoodat wij aan het normaal voorkomende linoleenzuur een groote beteekenis als physiologisch haemolyticum moeten toeschrijven. Wij zouden nu verder in de eerste plaats willen onderzoeken, hoe het met het voorkomen van deze stof bij de ernstige haemolytische anaemieën gesteld is.

SAMENVATTING.

Intramusculaire injectie van 200 mgr. linoleenzuur per dag veroorzaakt bij het konijn in korten tijd een chronisch haemolytische anaemie, waarvan het bloedbeeld groote overeenkomst met dat bij pernicieuze anaemie vertoont.

Intraveneuze injectie van ± 100 mgr. linoleenzuur per K. G. lichaamsgewicht heeft bij het konijn een doodelijke haemolyse tengevolge.

Physiologisch Laboratorium der Rijks-Universiteit te Groningen.

April 1923.

Natuurkunde. — W. H. Julius en M. Minnaert: „*Het verband tusschen de verbreeding en den onderlingen invloed van dispersielijnen in het spectrum van den zonnerand*".

Inleiding.

Uitgaande van de hypothese dat de duisterheid van Fraunhoferlijnen in hoofdzaak op anomale dispersie berust, is men in staat vele eigenaardigheden van het zonnespectrum qualitatief te verklaren. Hierdoor opent zich de mogelijkheid om een theoretisch verband te leggen — dat men daarna quantitatief moet kunnen toetsen — tusschen een aantal verschijnselen, wier samenhang men uit het oogpunt der ongewijzigde klassieke absorptietheorie van Kirchhoff minder gemakkelijk doorziet. Tot deze verschijnselen rekenen wij: de algemeene, maar zeer ongelijke, roodverschuiving der zonnelijnen; de rand-centrum-verschuivingen en hare afhankelijkheid van lijnsterkte en golflengte; de verbreeding en de intensiteitsverandering der lijnen als men den zonnerand nadert; de schijnbare onderlinge afstooting van naburige Fraunhoferlijnen, die in 't algemeen grooter is aan den rand dan in 't centrum; den stelselmatig gebogen vorm der lijnen van 't vlekspectrum bij radiaal geplaatste spleet; de geleidelijke toeneming van den afstand der componenten van de calciumlijnen H_2 en K_2 bij nadering tot den zonnerand; en verschillende meer plaatselijke bijzonderheden.

Wij hebben getracht den samenhang tusschen een paar van de genoemde verschijnselen, zooals de dispersietheorie dien doet zien, in wiskundigen vorm te brengen, om dan te onderzoeken of deze quantitatieve betrekkingen vereenigbaar zijn met de uitkomsten der metingen aan zonnelijnen.

Het ligt in den aard der zaak dat de *grootte* van den invloed, dien anomale dispersie in de zonnegassen op het uiterlijk der Fraunhoferlijnen heeft, niet *direct* berekend kan worden zoolang men de lichtbrekende en verstrooiende eigenschappen der zon niet in bijzonderheden kent. Trouwens, een dergelijke onzekerheid bestaat evenzeer ten opzichte van waarden, die men opgeeft voor temperaturen, drukkingen, radiale snelheden, sterkten van krachtvelden of van dissociatietoestanden in de zon, in zooverre deze afgeleid zijn uit spectraalverschijnselen; want zulke opgaven berusten steeds op de

onzekere onderstelling dat de beschouwde spectraalverschijnselen inderdaad geheel aan de genoemde oorzaken zijn toe te schrijven. Men heeft natuurlijk het recht, die onderstelling te beproeven — mits men haar hypothetisch karakter steeds in 't oog houdt.

Zoo mogen wij ook gerust onderstellen dat Fraunhoferlijnen in hoofdzaak „dispersielijnen" zijn; het komt er dan op aan te onderzoeken of de gevolgtrekkingen uit die hypothese een bevredigende theorie opleveren waardoor *vele* waarnemingsresultaten worden omvat.

In deze mededeeling bepalen wij er ons toe aan te toonen, dat de dispersietheorie van 't zonnespectrum een quantitatief verband legt tusschen twee schijnbaar van elkander onafhankelijke groepen van verschijnselen, namelijk de zeer algemeen geconstateerde *verbreeding* der Fraunhoferlijnen aan den rand der zonneschijf, en de versterking die de *wederzijdsche invloed* van naburige lijnen daar vertoont. Dit verband is onafhankelijk van den vorm der lichtverzwakkingswetten; het stelt ons in staat een bovenste grens aan te geven voor het bedrag van den te verwachten wederzijdschen invloed, en levert zoo wederom een criterium voor de doelmatigheid onzer grondhypothese.

De te verwachten invloed zal blijken inderdaad een zoodanige grootte te hebben, dat de waargenomen onderlinge invloed er door kan worden verklaard.

De dispersielijnen, waarin volgens onze hypothese de uiterst smalle echte absorptielijnen van het zonnespectrum gehuld zijn, danken haar ontstaan aan twee lichtverzwakkende processen: onregelmatige breking en moleculaire verstrooiing. Want al is licht van *elke* golflengte aan breking en verstrooiing onderhevig op zijn langen weg door selectief absorbeerende gassen, die verzwakkingsoorzaken werken in sterkere mate voor lichtsoorten uit de allernaaste omgeving der absorptielijnen. Daar de twee processen het licht verzwakken volgens verschillende wetten, zullen wij ze afzonderlijk behandelen.

I. Over lichtverzwakking in uitgestrekte gasmassa's.

§ 1. *Lichtspreiding door onregelmatige straalkromming in een gasmengsel.*

Bevindt zich in een gegeven ruimte een mengsel van gassen die, als zij elk afzonderlijk deze ruimte vulden, de absolute brekingsindices $n_1, n_2 \ldots . n_i \ldots .$ zouden toonen, dan geldt volgens proeven van Biot en Arago (door latere waarnemingen bevestigd) de wet, dat 't brekend vermogen van 't mengsel gelijk is aan de som der brekende vermogens van de bestanddeelen:

$$n - 1 = \Sigma\,(n_i - 1).$$

Hierbij is een voorwaarde dat de gassen niet op elkander inwerken. Wij zullen aannemen dat deze wet met groote benadering geldig blijft in golflengtegebieden waar een der bestanddeelen anomale dispersie vertoont, al zijn zeer nauwkeurige directe metingen daaromtrent niet gedaan.

Is de gasmassa zeer uitgestrekt en ongelijkmatig van optische dichtheid, met gradienten in alle mogelijke richtingen, dan werkt zij uitspreidend op een lichtbundel. Volgens ORNSTEIN en ZERNICKE [1]) wordt de mate van deze soort van verstrooiing bepaald door het „gemiddelde spreidingskwadraat per lengte-eenheid" $\frac{\alpha^2}{l}$; bij een bepaalden, korten lichtweg behoort een α die afhangt van het gemiddelde bedrag der onregelmatige dichtheidsgradienten en evenredig is met $n-1$ van het mengsel. De lichtverzwakking zal dus een functie zijn van

$$(n-1)^2 = [\Sigma (n_i - 1)]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en wel tegelijk met deze grootheid toenemen en afnemen. Een kenmerkend onderscheid tusschen de verstrooiing door onregelmatige breking en de moleculaire verstrooiing is, dat bij laatstgenoemde een groot deel van iederen lichtbundel ongehinderd doorgaat en een klein deel zich naar alle zijden verspreidt, terwijl bij de brekingsverstrooiing elke beschouwde bundel zelf voortdurend pluimvormig breeder wordt.

§ 2. *Lichtverstrooiing door de moleculen van een gasmengsel.*

Wanneer een lichtbundel van intensiteit I_0 een weg z heeft afgelegd door een middenstof waarin N verstrooiende deeltjes per cm^3 voorkomen, is zijn sterkte verminderd tot $I = I_0 e^{-hz}$, waarin de verstrooiingscoëfficient h volgens RAYLEIGH de waarde heeft

$$h = \frac{32 \pi^3 (\nu - 1)^2}{3 N \lambda^4}.$$

Hierin is ν uitdrukkelijk gedefinieerd als de brekingsindex van het door de verstrooiende deeltjes gewijzigde medium ten opzichte van het ongewijzigde medium [2]). Noemen wij den absoluten index van het laatste n, dien van 't gewijzigde medium n', dan wordt

$$h = \frac{32 \pi^3 \left(\frac{n'}{n} - 1\right)^2}{3 N \lambda^4} = \frac{32 \pi^3 (n' - n)^2}{3 N \lambda^4 n^2} = \frac{32 \pi^3 (n' - n)^2}{3 N \lambda^4}$$

omdat we voor ijle gassen $n^2 = 1$ mogen stellen.

[1]) ORNSTEIN en ZERNICKE, Versl. Kon. Akad. v. W. Amst. **25**, 1478 (1917).

[2]) RAYLEIGH, Phil. Mag. **47**, 375, 1899. — Scientific Papers IV, 400.

Wij zullen aannemen dat deze uitdrukking voor den verstrooiingscoëfficient geldig blijft in golflengtegebieden waar de verstrooiende deeltjes anomale dispersie teweeg brengen. Vooral in *die* gebieden zal dan h aanmerkelijke waarden kunnen bereiken.

Denken wij ons thans een mengsel, bestaande uit $N_1, N_2, \ldots N_i, \ldots$ verstrooiende deeltjes van de soorten $1, 2, \ldots i, \ldots$ Voor elke soort stelt het mengsel der *andere* soorten het „ongewijzigde medium" voor, terwijl het „gewijzigde medium" voor alle gevallen hetzelfde, volledige, mengsel is. Wij hebben dus te maken met één waarde n' en met vele waarden $n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots n_{(i)}, \ldots$ van n, waarbij $n_{(i)}$ de absolute brekingsindex is van 't mengsel waarin 't bestanddeel i ontbreekt.

De verstrooiingscoëfficient h van 't volledige mengsel zal de som zijn van de verstrooiingscoëfficienten, die aan de bestanddeelen, elk in hun omgeving, toekomen:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots h_i + \ldots = \frac{32\,\pi^3}{3\,\lambda^4} \Sigma \frac{(n' - n_{(i)})^2}{N_i}$$

Maar deze uitdrukking kan vereenvoudigd worden, want volgens de zooeven genoemde wet van Biot en Arago moet

$$n' - 1 = (n_{(i)} - 1) + (n_i - 1)$$

zijn, als n_i den absoluten brekingsindex voorstelt, dien 't gas i toonen zou indien het alléén in de gegeven ruimte aanwezig was.

Derhalve is $n' - n_{(i)} = n_i - 1$, en

$$h = \Sigma\, h_i = \frac{32\,\pi^3}{3\,\lambda^4} \Sigma \frac{(n_i - 1)^2}{N_i}.$$

Een lichtbundel, die door een dergelijk gasmengsel een langen weg heeft afgelegd, zal bij het uittreden een verzwakking hebben ondergaan welke een zekere functie is van h, voldoende aan de voorwaarde dat zij tegelijk met h toeneemt en afneemt. — In spectraalgebieden zóó klein, dat men daar λ^4 wel als constant mag beschouwen, is dus thans

$$\Sigma \frac{(n_i - 1)^2}{N_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

de bepalende grootheid. (Men vergelijke deze uitdrukking (2) met de daaraan beantwoordende (1) welke voor de brekingsverstrooiing geldt).

§ 3. *Anomale breking en anomale verstrooiing bij de vorming van dispersielijnen.*

Het intensiteitsverloop in de dispersielijnen wordt blijkens 't bovenstaande bepaald door twee verzwakkingswetten, die wel is waar van plaatselijke omstandigheden afhangen (namelijk van afmetingen en vorm der lichtbron en toestand der middenstof) en in zooverre

onbekend zijn, doch van welke men weet dat ze met de *golflengte* veranderen zullen overeenkomstig het verloop van de uitdrukkingen (1) en (2). Wij behandelen eerst het aandeel dat de breking, vervolgens het aandeel dat de verstrooiing in de vorming van dispersielijnen heeft.

A. Denkbeeldige zuivere brekingslijnen.

Men denke zich een selectief absorbeerend gasmengsel met onregelmatige dichtheidsgradienten, doordrongen door een bundel wit licht, en bepale de aandacht tot een deel van het spectrum, waarin slechts één eigen frequentie van dat medium, dus één ideaal-scherpe absorptielijn voorkomt.

In het beschouwde kleine golflengtegebied zou, indien de lijn er niet was, het mengsel het slechts langzaam met λ verloopend brekend vermogen n_0-1 bezitten. Daarbij voegt zich het anomaal verloopend brekend vermogen n_1-1 van het bestanddeel, dat de absorptielijn geeft, zoodat het resulteerend brekend vermogen is:

$$n-1=(n_0-1)+(n_1-1).$$

Nu behoudt de term (n_0-1) in 't algemeen voor alle golflengten in 't gebied hetzelfde teeken (meestal 't positieve), terwijl (n_1-1) aan den violetten kant van de lijn negatief, aan den rooden kant positief is. Licht aan den violetten kant eener lijn zullen wij V-licht, aan den rooden kant R-licht noemen. Alle brekingseffecten zijn dus in een gasmengsel gemiddeld grooter voor R-licht dan voor V-licht, want zij worden bepaald door $(n-1)^2$ of door de *absolute* waarden van $n-1$, d.i. door $|(n_0-1)+(n_1-1)|$.

Fig. 1*a* toont het verloop van n_0-1 en n_1-1 ieder afzonderlijk; Fig. 2*a* geeft $n-1=(n_0-1+(n_1-1)$; in Fig. 3*a* is voorgesteld het verloop van $|n-1|=|(n_0-1)+(n_1-1)|$, waarvan de lichtverdeeling in onze „brekingslijn" afhangt.

Men ziet dat de scherpe absorptielijn gehuld zal zijn in een *asymmetrische* brekingslijn, wier „zwaartepunt" naar rood verschoven is indien n_0-1 het positieve teeken heeft.

De algemeene roodverschuiving der Fraunhoferlijnen, die toeneemt naar den zonnerand, kan met deze beschouwing in verband worden gebracht.

Thans willen wij ons voorstellen dat in 't beschouwde spectraalgebied *twee* naburige scherpe absorptielijnen gelegen zijn; dan is:

$$n-1=(n_0-1)+(n_1-1)+(n_2-1),$$

waarin wederom n_0-1 nagenoeg constant wordt gedacht, maar de andere twee termen sterk veranderlijk met λ. In het gebied tusschen

de beide lijnen hebben $(n_1—1)$ en $(n_2—1)$ tegengesteld teeken (zie Fig. 1,*b*, waar de drie termen afzonderlijk zijn voorgesteld). De resul-

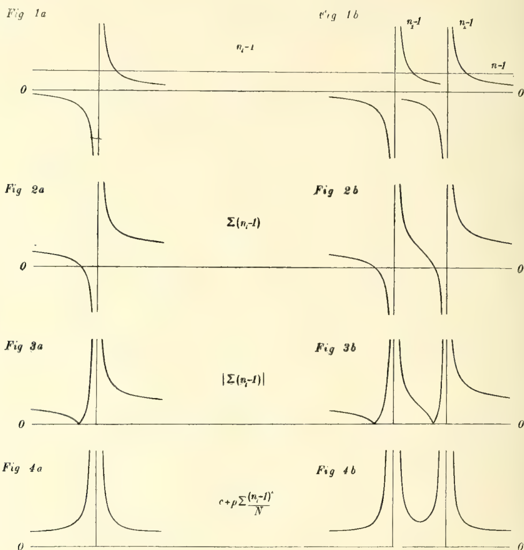


Fig. 1*a*—4*b*.

teerende kromme $n—1 = f(\lambda)$ toont daar een buigpunt (Fig. 2,*b*), en omdat $(n_1—1)$ en $(n_2—1)$ er tegengesteld teeken hebben, is de modulus $|(n_0—1)+(n_1—1)+(n_2—1)|$ in het linkerdeel van dat gebied kleiner dan $|(n_0—1)+(n_1—1)|$, in het rechterdeel kleiner dan $|(n_0—1)+(n_2—1)|$ (zie Fig. 3,*b*), zoodat aan de twee naar elkaar toegekeerde kanten der brekingslijnen de lichtverzwakking geringer is dan ze zijn zou indien de lijnen alleen stonden. De „zwaartepunten" van twee naburige brekingslijnen liggen dus op iets grooteren afstand van elkander dan de absorptielijnen die er de kernen van uitmaken: er is een schijnbare afstooting.

In Fig. 3 ziet men bovendien dat aan den violetten kant van elke lijn een punt gevonden wordt waar $n—1=0$ is. (Was $n_0—1$ negatief, dan zou zulk een punt aan den rooden kant van de lijn liggen). Licht van de daaraan beantwoordende golflengte zou niet door onregelmatige breking verzwakt worden, en dus in het spectrum zichtbaar moeten zijn met eene intensiteit, grooter dan de gemiddelde

intensiteit van lijnvrije gebieden. JEWELL schijnt in het zonnespectrum een dergelijk verschijnsel werkelijk te hebben waargenomen [1]). Dat intusschen zulke helderder plaatsen in 't zonnespectrum weinig in 't oog springen, kan ons niet verwonderen, omdat in de verschillende lagen der zon de mengverhouding der gassen ongelijk moet zijn, zoodat de waarden van λ, voor welke $n-1=0$ is, niet op den ganschen weg van de lichtbundels dezelfde zullen blijven. Bovendien berusten de Fraunhoferlijnen gedeeltelijk op anomale moleculaire verstrooiing, en daarbij zijn, zooals we aanstonds zullen zien, geen helderder plaatsen in 't spectrum te verwachten (althans niet op de centrale deelen der zonneschijf). Beide omstandigheden doen de lichtsterkere plaatsen bij de brekingslijnen vervagen.

B. Denkbeeldige zuivere verstrooiingslijnen.

Is ons gasmengsel zóó gelijkmatig van dichtheid, dat lichtstralen het rechtlijnig doordringen, dan zullen de ware absorptielijnen *toch* in dispersielijnen gehuld zijn, omdat voor lichtsoorten uit de naaste omgeving der eigen-frequenties de moleculaire verstrooiing grootere waarden heeft. Immers letten we op het verloop met λ van den verstrooiïngscoëfficient

$$h = \Sigma\, h_i = \frac{32\,\pi^3}{3\,\lambda^4}\,\Sigma\,\frac{(n_i-1)^2}{N_i}$$

in een klein spectraalgebied, waarbinnen slechts één enkele absorptielijn van 't bestanddeel j gelegen is. Daar kunnen we alle termen van de som op één na als constant beschouwen, en dus schrijven:

$$h = C + \frac{32\,\pi^3}{3\lambda^4}\cdot\frac{(n_j-1)^2}{N_j}.$$

Deze grootheid nu varieert met λ op de wijze als voorgesteld in Fig. 4,*a*; het verloop is symmetrisch ten opzichte van de absorptielijn mits de dispersiekromme, waartoe deze lijn aanleiding geeft, den normalen vorm bezit en wij de verandering van λ^4 binnen het kleine gebied verwaarloozen mogen. Dat ook de lichtverdeeling in de verstrooiingslijn dan symmetrisch moet zijn, kunnen wij beweren zonder de verzwakkingswet [2]) in bijzonderheden te kennen.

In tegenstelling met wat bij de brekingslijnen gebeurde, wordt hier het symmetrische verloop der anomale lichtverzwakking *niet* gestoord door de bijvoeging der in het beschouwde gebied constante, homale verzwakking. (Het eerste geval hing namelijk samen met

[1]) JEWELL, Astroph. Journ. III, 99, 1896; zie ook ABBOT, The Sun; p. 115, waar tevens analoge waarnemingen van EVERSHED worden genoemd.

[2]) Aangaande de wet der lichtverzwakking door moleculaire verstrooiing in de zon is een uitvoerige studie geleverd door J. SPIJKERBOER, Proefschrift. Utrecht 1917; Arch. néerl. III A, 5, p. 1—115, 1918.

het kwadraat eener som, het tweede met de som der kwadraten van een reeks, overigens nauw verwante, grootheden).

Tot de algemeene roodverschuiving der zonnelijnen kan derhalve de moleculaire verstrooiing of diffusie niet bijdragen [1]).

Onderstellen wij nu weer het geval dat in het beschouwde kleine spectraalgebied *twee* absorptielijnen gelegen zijn, dan wordt de verstrooiingscoeëfficient daar voorgesteld door

$$h = C + p\left[\frac{(n_j-1)^2}{N_j} + \frac{(n_k-1)^2}{N_k}\right],$$

want de factor $\frac{32\pi^3}{3\lambda^4}$ mag in 't kleine gebied door de constante p worden vervangen. Fig. 4*b* toont 't verloop van h met de golflengte. Wederom zal daaraan een verzwakkingskromme beantwoorden wier ordinaten met h rijzen en dalen. Wij zien dat in het gebied tusschen de absorptielijnen hun beider invloeden op de verstrooiing elkaar meer versterken dan buiten de lijnen, zoodat de zwaartepunten der twee diffusielijnen iets dichter bij elkander liggen dan de absorptielijnen (schijnbare aantrekking).

Vatten wij de genoemde qualitatieve uitkomsten samen met 't oog op hare toepassing in de spectroscopie der hemellichamen, dan is dus gebleken:

1. De algemeene maar zeer ongelijke roodverschuiving der Fraunhoferlijnen kan men verklaren met behulp van de eigenschappen van brekingslijnen, doch niet met die van diffusielijnen. Hetzelfde geldt voor de rand-centrum verplaatsingen.

2. De wederzijdsche invloed van naburige Fraunhoferlijnen, die gemiddeld toeneemt van het centrum naar den rand der zonneschijf, kan met de beide verstrooiingseffecten samenhangen; maar de onregelmatige breking levert schijnbare afstooting, de moleculaire lichtdiffusie schijnbare aantrekking.

II. Lijnbreedte en wederzijdsche invloed bij dispersielijnen en bij Fraunhoferlijnen.

In dit hoofdstuk zal worden berekend, hoe de wederzijdsche invloed van dispersielijnen samenhangt met hare breedte, en hoe men dus ook — in de onderstelling dat Fraunhoferlijnen in hoofdzaak dispersielijnen zijn — uit gegevens aangaande verbreeding der lijnen in het spectrum van den zonnerand kan afleiden, welke vermeerdering van den wederzijdschen invloed daar te verwachten is.

Wij kunnen dan onderzoeken of deze theoretische uitkomsten

[1]) Hierop is het eerst onze aandacht gevestigd in een gesprek met Einstein.

vereenigbaar zijn met hetgeen de waarnemingen bij het vergelijken van rand- en centrumspectra tot nu toe hebben geleerd.

Wederom behandelen wij afzonderlijk het aandeel dat de onregelmatige breking en het aandeel dat de moleculaire verstrooiing hebben kan in de vorming der Faunhoferlijnen.

§ 1. *Brekingslijnen in het spectrum van het centrum der zonneschijf.*

Het verloop der lichtsterkte in een brekingslijn wordt bepaald door de waarde van $|n-1| = f(\lambda)$. De meest nauwkeurige metingen over den vorm dezer functie hebben wij te danken aan ROSCHDESTWENSKY [1]). Voor de omgeving der beide natriumlijnen vond hij dat de formule van SELLMEIER:

$$n-1 = \frac{a_1\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_1^2} + \frac{a_2\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_2^2} + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met groote benadering de waarnemingen weergeeft. Wij zullen haar op de door ons te beschouwen gevallen toepasselijk achten.

Is de onderlinge afstand der twee lijnen niet te klein en bepaalt men de aandacht tot de omgeving van éene lijn, dan kunnen de laatste twee termen vereenigd worden tot een nagenoeg constant brekend vermogen (n_0-1), terwijl men bovendien $\lambda + \lambda_1 = 2\lambda$ stellen mag. Zoo vereenvoudigt zich de uitdrukking (als men nog $\frac{a_1}{2}$ door k vervangt) tot

$$n-1 = \frac{k}{\lambda-\lambda_1} + (n_0-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

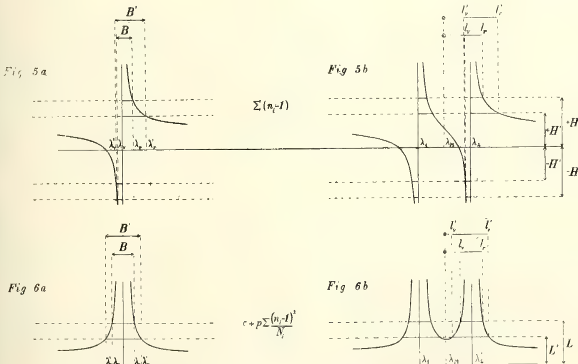


Fig. 5a—6b.

[1]) ROSCHDESTWENSKY, Anomale Dispersion im Natriumdampf. Ann. d. Phys. **39**, 307, 1912.

Nu is de lichtsterkte in eenig punt afhankelijk van de *absolute* waarde $|n-1|$. Men kan aan de twee kanten van de absorptielijn steeds waarden van λ aanwijzen waar $n-1 = \pm H$ is (zie Fig. 5). Die plaatsen van het spectrum zullen wij de „H-grenzen" van de dispersielijn, haar afstand de „H-breedte" der lijn noemen, en deze laatste aanduiden door de letter B. Dit is dus de breedte die een waarnemer aan de lijn zou toekennen indien hij hare grenzen (bij schatting) localiseerde bij de met H overeenkomende betrekkelijke lichtsterkte (Onder „betrekkelijke lichtsterkte" zullen we verstaan de verhouding tusschen de lichtsterkte in een gekozen punt der dispersielijn en die in het omringende continue spectrum).

Stel dat voor onze lijn de H-grenzen gelegen zijn bij λ_R en λ_V dan volgt uit vergel. (2):

$$\lambda_R - \lambda_1 = \frac{k}{H-(n_0-1)} \quad \text{en} \quad \lambda_V - \lambda_1 = -\frac{k}{H+(n_0-1)}, \quad . \quad . \quad (3)$$

$$B = \lambda_R - \lambda_V = \frac{2Hk}{H^2-(n_0-1)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

of, als we omgekeerd H in B uitdrukken,

$$H = \frac{k}{B} + \sqrt{\frac{k^2}{B^2} + (n_0-1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De negatieve waarde van den wortelvorm kunnen we buiten beschouwing laten.

Thans overgaande tot 't geval van twee naburige, even sterke lijnen, zullen we de plaatsen in het spectrum liever aanduiden door de grootheid (Fig. 5^b)

$$l = \lambda - \lambda_M$$

waarbij λ_M voorstelt de golflengte van het midden tusschen de twee absorptielijnen, zoodat dit middenpunt ons nulpunt wordt in de schaal der l-waarden. Is nu de afstand der lijnen $= 2A$, dan is in de nieuwe notatie voor de lijn aan den rooden kant $l_2 = A$, voor de lijn aan den violetten kant $l_1 = -A$, en we krijgen naar analogie van (2) de betrekking:

$$n-1 = \frac{k}{l-A} + \frac{k}{l+A} + (n_0-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Voor elke der beide lijnen zijn weer twee „H-grenzen" aan te wijzen die men vindt door (6) gelijk te stellen aan $\pm H$, waarbij H vastgelegd is door de betrekking (5).

Beschouwen wij de lijn die het meest naar 't rood gelegen is. Hare twee H-grenzen zijn nu bepaald door l_R en l_V, voor welke grootheden uit (6) onmiddellijk is af te leiden, al naar gelang men het $+$ of het $-$ teeken voor H laat gelden:

$$l_R \text{ of } l_V = \frac{k}{\pm H - (n_0 - 1)} + \sqrt{\frac{k^2}{[\pm H - (n_0 - 1)]^2} + A^2} = S_R + T_R \text{ of } S_V + T_V. \quad (7)$$

Op analoge wijze blijkt, dat de lijn die 't meest naar violet gelegen is tot H-grenzen heeft

$$l_R \text{ of } l_V = S_R - T_R \text{ of } S_V - T_V \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7a)$$

§ 2. *Brekingslijnen in het spectrum van den rand der zonneschijf.* De algemeene verbreeding der Fraunhoferlijnen aan den zonnerand beduidt, in den gedachtengang der dispersietheorie, dat een kleinere waarde $\pm H'$ van $n-1$ daar reeds voldoende is om dezelfde betrekkelijke lichtverzwakking te geven, welke in het centrum gegeven wordt door de waarde $\pm H$. De H'-breedte, die de lijn aan den zonnerand vertoont, noemen wij B' (zie wederom Fig. 5); dan geldt, als tegenhanger van (5), de betrekking:

$$H' = \frac{k}{B'} + \sqrt{\frac{k^2}{B'^2} + (n_0 - 1)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

en voor 't geval van *twee* randlijnen, als tegenhangers van (7) en (7*a*):

$$l'_R \text{ of } l'_V = \frac{k}{\pm H' - (n_0 - 1)} + \sqrt{\frac{k^2}{[\pm H' - (n_0 - 1)]^2} + A^2} = S'_R + T'_R \text{ of } S'_V + T'_V \quad (9)$$

$$l'_R \text{ of } l'_V = S'_R - T'_R \text{ of } S'_V - T'_V \quad . \; . \; . \; . \quad (9a)$$

§ 3. *Denkbaarheid eener algemeene oplossing van ons probleem.* Door de formules (5), (7), (8) en (9) is de vraag naar den samenhang tusschen de lijnverbreeding en de vergrooting van den wederzijdschen invloed aan den zonnerand in beginsel beantwoord. Zoodra toch de verdeeling der betrekkelijke lichtsterkte gegeven was voor een vrijstaande brekingslijn van het centrumtype en voor de overeenkomstige randlijn, zou men nu de kromme der lichtverdeeling kunnen berekenen voor een stel van twee naburige gelijke lijnen en nagaan hoe de asymmetrie daarin toeneemt bij overgang van het zonnecentrum naar den rand. Men zou namelijk achtereenvolgens aan B en B' de waarden geven welke passen bij betrekkelijke lichtsterkten van 90%, 80%, 70% enz., en telkens uit (7) en (9) berekenen waar de overeenkomstige plaatsen liggen bij het doublet [1]).

[1]) Wanneer rand- en centrumlijnen op éénzelfde plaat gefotografeerd zijn, en de centrumspectra zoodanig verzwakt dat de lichtsterkte van lijnvrije gebieden dezelfde is als voor het randspectrum, dan kan men zelfs met behulp van onze formules de krommen van het doorlatingsvermogen der enkele lijnen rechtstreeks gebruiken om te berekenen hoe het doorlatingsvermogen in doubletten verloopt welke op dezelfde plaats staan. Men behoeft daartoe de zwartingen niet om te rekenen in ware lichtsterkten.

Maar tot nu toe zijn de intensiteitskrommen niet voldoende bekend; de waarnemers van zonnespectra geven ons de „visueele lijnbreedten" en de golflengten der „zwaartepunten" van de lijnen, grootheden dus die sterk van subjectieve opvattingen afhankelijk zijn.

Toch kunnen wij uit zulke waarnemingen wel eenige niet onbelangrijke besluiten trekken.

§ 4. *Beperking tot hetgeen uit reeds bestaande gegevens kan worden besloten.*

Door FABRY en BUISSON werd bij lijnen waarvan de breedte 0,07 tot 0,16 Å bedroeg, als verbreeding aan den zonnerand gemiddeld 0,01 Å gevonden [1]). Hoewel men niet weet hoe groot de betrekkelijke lichtsterkte was op de plaatsen waar hunne interferentiemethode de „grenzen" der lijn deed schatten, was daardoor toch voor elke lijn een bepaalde breedte gedefinieerd. (Er is aanleiding om te onderstellen dat bij visueele breedtebepaling de betrekkelijke lichtsterkte aan de lijngrens ongeveer 0,8 bedraagt [2])).

Terwijl nu onder den invloed eener naburige lijn deze grenzen asymmetrisch verschuiven, blijven de middelste deelen der dispersielijn met hun grootere duisterheid haast onveranderd op hun plaats. Het middenpunt tusschen de grenzen van BUISSON en FABRY, of van visueel geschatte grenzen, zal dus alle asymmetrische vervormingen van de dispersielijn door zijn ligging sterker weerspiegelen dan het „zwaartepunt" waardoor de waarnemer de plaats der lijn bepaalt. Wanneer wij derhalve de verplaatsingen van dat *middenpunt* berekenen, zijn we zeker *een bovenste grens* te vinden voor de verplaatsingen die men als meetresultaat volgens de dispersietheorie verwachten mag.

§ 5. *Het verschil in wederzijdschen invloed van brekingslijnen aan den rand en in het centrum der schijf.*

Nu is de ligging van het middenpunt M_H der H-grenzen van de aan den rooden kant gelegen verschoven dispersielijn gegeven door

$l_M = {}^1/_2\,(l_R + l_V) = {}^1/_2\,(S_R + S_V + T_R + T_V)$ voor het centr.-spectrum,

en (10)

$l'_M = {}^1/_2\,(l'_R + l_V) = {}^1/_2\,(S'_R + S'_V + T'_R + T'_V)$ voor het rand-spectrum,

zoodat de verplaatsing van dat middenpunt bij overgang van het centrum naar den rand bedraagt:

$$l'_M - l_M = {}^1/_2\,(S'_R + S'_V - S_R - S_V + T'_R + T'_V - T_R - T_V)\,. \quad (11)$$

[1]) FABRY en BUISSON, C. R. **148**, 1741, (1909); Astroph. Journ. **31**, 97, (1910).

[2]) Deze schatting berust op extrapolatie van eene empirische formule door welke wij bij een vroeger onderzoek de visueel geschatte grenzen van heldere lijnen op de fotografische plaat hebben kunnen voorstellen. Zie den feestbundel, gewijd aan H. KAYSER, die binnen kort verschijnen zal in de Ann. d. Physik, 1923.

In deze uitdrukking vindt men vereenigd al de verschillende systematische λ-veranderingen der Fraunhoferlijnen, welke de dispersietheorie als gevolg van ongeordende straalkrommingen doet verwachten. De eerste twee termen geven de algemeene verplaatsing lichtboog-zonnerand; de derde en vierde de algemeene verplaatsing lichtboog-zonnecentrum [1]); de vijfde en zesde toonen de schijnbare afstooting van naburige lijnen in 't randspectrum; de zevende en achtste de schijnbare afstooting in 't centrum-spectrum.

Wij willen hier in 't bijzonder letten op het *verschil* in schijnbare afstooting bij overgang van het rand- naar het centrum-spectrum, omdat aangaande dit verschijnsel uitvoerige gegevens, aan zonnewaarnemingen ontleend, beschikbaar zijn [2]).

Het bedoelde verschil wordt voor elke doubletcomponente voorgesteld door

$$\tfrac{1}{2}\left(T'_R + T'_V - T_R - T_V\right)$$

welke uitdrukking, door daarin te substitueeren de waarden, bepaald door (9), (8), (7) en (5), overgaat in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{B}{2}\Bigg\{ & \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{B}{B'}+\sqrt{\frac{B^2}{B'^2}+\frac{(n_0-1)^2B^2}{k^2}}-\frac{(n_0-1)B}{k}\right]^2}+\frac{A^2}{B^2}}\;+ \\
&+\sqrt{\frac{1}{\left[\frac{B}{B'}+\sqrt{\frac{B^2}{B'^2}+\frac{(n_0-1)^2B^2}{k^2}}+\frac{(n_0-1)B}{k}\right]^2}+\frac{A^2}{B^2}}\;- \\
&-\sqrt{\frac{1}{\left[1+\sqrt{1+\frac{(n_0-1)^2B^2}{k^2}}-\frac{(n_0-1)B}{k}\right]^2}+\frac{A^2}{B^2}}\;- \\
&-\sqrt{\frac{1}{\left[1+\sqrt{1+\frac{(n_0-1)^2B^2}{k^2}}+\frac{(n_0-1)B}{k}\right]^2}+\frac{A^2}{B^2}}\Bigg\}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Om de getalwaarde dezer grootheid te kunnen schatten, steunen we op het waarnemingsresultaat van Fabry en Buisson volgens hetwelk de lijnverbreeding aan den rand gemiddeld 0,010 Å bedroeg bij lijnen van breedten tusschen 0,07 en 0,16 Å (gemiddeld 0,11 Å). Van de lijnen voor welke in het waarnemingsmateriaal van Mount

[1]) Hierbij zijn natuurlijk buiten beschouwing gelaten alle mogelijke verplaatsingen der kernlijnen of eigenlijke absorptielijnen voor zoover die veroorzaakt mochten zijn door snelheden in de gezichtslijn, druk of krachtvelden. Zulke verplaatsingen moet men zich op de door ons beschrevene gesuperponeerd denken.

[2]) Men zie dienaangaande: W. H. Julius, Mutual Influence etc., Astroph. Journ. **54**, 92, 1921, en W. H. Julius en M. Minnaert, Ann. d. Phys. Kayser-Festheft, 1923.

Wilson en Kodaikanal over rand-centrum verschuivingen de wederzijdsche invloed onderzocht is [1]), was de gemiddelde breedte 0,09 Å. Wij hebben daarom de berekening uitgevoerd voor het geval dat $B = 0{,}100$ Å, $B' - B = 0{,}010$ Å wordt aangenomen en achtereenvolgens $\frac{(n_0 - 1)B}{k} = \pm\infty$, ± 4, ± 1, en 0 wordt gesteld; de uitkomsten zijn dan als ordinaten uitgezet tegen abscissen $\frac{2A}{B}$ (die dus de lijnafstanden geven, uitgedrukt in de lijnbreedte). Zoo verkregen we de nietgestippelde krommen van Fig. 7 (blz. 503). Zij duiden aan hoeveel duizendste deelen van een Å bij een brekingslijn het middenpunt M'_H der Buisson-grenzen van een randlijn meer verplaatst wordt dan het middenpunt M_H der grenzen van de overeenkomstige centrumlijn, tengevolge van de aanwezigheid eener even sterke buurlijn, als deze gelegen is op een afstand gelijk aan 3, 2, 1 maal de geschatte lijnbreedte. Men ziet dat de afstooting reeds op tamelijk grooten afstand merkbaar is en langzaam toeneemt tot hoogstens 0,004 Å. De waarde van n_0 heeft blijkbaar slechts geringen invloed op het resultaat.

Daar B' weinig van B verschilt kan men de wortelvormen van (12) in snel convergeerende reeksen ontwikkelen en zich zoo ervan overtuigen dat de schijnbare afstooting in eerste benadering evenredig is met de absolute waarde der randverbreeding, d. i. met $B' - B$, zoodat onze krommen ook gelden voor lijnen van andere dan de gekozen breedte, mits de randverbreeding de door Fabry en Buisson aangegeven grootte heeft. Zij zijn dus toepasselijk op lijnen van hetzelfde gemiddelde type als die waarbij de onderlinge invloed vroeger is geconstateerd.

§ 6. *Verstrooiingslijnen in het spectrum van het centrum der zonneschijf.*

Het verloop der lichtsterkte in een zuivere verstrooiingslijn (dus bij afwezigheid van ongeordende gradienten van optische dichtheid) zal afhankelijk zijn van de wijze waarop de verstrooiingscoëfficient (zie blz. 493)

$$h = C + \frac{32\pi^3}{3\lambda^4} \cdot \frac{(n_j - 1)^2}{N_j}$$

met λ verandert in het kleine beschouwde spectraalgebied. En omdat wij daar zelfs de veranderingen van λ^4 verwaarloozen mogen, wordt het verloop geheel beheerscht door den aard van

[1]) W. H. Julius, Astroph. Journ. **54**, 92, (1921); W. H. Julius en M. Minnaert, Ann. d. Phys. Kayser-Festheft, 1923.

$$\frac{(n_j-1)^2}{N_j}=[f(\lambda)]^2$$

welke functie blijkbaar symmetrisch is t.o.v. de plaats der eigenfrequentie. Ter weerszijde van de laatste is wederom een plaats aan te wijzen waar (na weglating van 't onderscheidingsteeken j) $\frac{(n-1)^2}{N}$ gelijk is aan een zekere, maar willekeurig gekozen, waarde L^2; door deze plaatsen mogen de „L-grenzen" der verstrooiingslijn, en door haar afstand de „L-breedte" gedefinieerd zijn (zie Fig. 6, blz. 495).

Voeren wij nu weder de dispersieformule (2) van blz. 495 in, dan moet aanstonds worden opgemerkt dat, volgens de beteekenis die op blz. 490 aan n_i (dus ook aan n_j) is toegekend, thans $n_o=1$ is, zoodat, indien de eigenfrequentie bij λ_1 ligt,

$$n-1=\frac{k}{\lambda-\lambda_1} \qquad (13)$$

De beide L-grenzen worden derhalve gevonden bij de golflengten λ_R en λ_V die bepaald zijn door

$$\lambda_R-\lambda_1=\frac{k}{L\sqrt{N}} \quad \text{en} \quad \lambda_V-\lambda_1=-\frac{k}{L\sqrt{N}}, \qquad (14)$$

zoodat de L-breedte der verstrooiingslijn is

$$B=\lambda_R-\lambda_V=\frac{2k}{L\sqrt{N}},$$

waaruit volgt:

$$L=\frac{2\,k}{B\sqrt{N}} \qquad (15)$$

Hebben we *twee* naburige kernlijnen van gelijke sterkte (dus gelijke waarde van $\frac{k^2}{N}$) op onderlingen afstand $2A$, en duiden we evenals op blz. 496 alle plaatsen in het spectrum wederom aan door grootheden

$$l=\lambda-\lambda_M \qquad (16)$$

waarbij λ_M de golflengte is van het midden tusschen de twee kernen, dan is de lijn aan den violetten kant bepaald door $l_1=-A$, die aan den rooden kant door $l_2=A$. Thans zal de lichtsterkte, volgens de vergelijking $h=\Sigma\, h_i$ van blz. 493 en in aanmerking genomen de kleinheid van 't beschouwde spectraalgebied, afhangen van het verloop der grootheid $\frac{(n_1-1)^2}{N_1}+\frac{(n_2-1)^2}{N_2}$ als functie van λ of van l.

In verband met (13) en (16) is

$$\frac{(n_1-1)^2}{N_1}+\frac{(n_2-1)^2}{N_2}=\frac{k_1^2}{N_1(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{k_2^2}{N_2(\lambda-\lambda_2)^2}=\frac{k_1^2}{N_1(l+A)^2}+\frac{k_2^2}{N_2(l-A)^2} \quad (17)$$

De L-grenzen van elke der doubletcomponenten zijn te vinden door (17) gelijk te stellen aan L^2 of wel, volgens de betrekking (15), aan $\frac{4k^2}{B^2N}$. Beschouwen wij in 't bijzonder de aan den rooden kant gelegen componente; hare L-grenzen liggen bij $l = l_R$ en $l = l_V$, welke waarden uit (17) op te lossen zijn. Er komt dan, al naar gelang men het $+$ of het $-$ teeken laat gelden,

$$l_R \text{ of } l_V = \frac{B}{2}\sqrt{1 + \frac{4A^2}{B^2} \pm \sqrt{16\frac{A^2}{B^2} + 1}} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Dezelfde wortelvorm, maar met 't negatieve teeken, geeft l_V en l_R voor de andere componente van het doublet.

§ 7. *Verstrooiingslijnen in het spectrum van den rand der zonneschijf.* Aan den zonnerand zal een kleinere waarde L'^2 van $(n-1)^2$ voldoende zijn om dezelfde mate van lichtverzwakking teweeg te brengen, die L^2 in 't centrum gaf. De „L'-grenzen" bepalen een breedte B' volgens de aan (15) analoge betrekking $L' = \frac{2k}{B'}$, en voor een der componenten van een doublet met kernafstand $2A$ vinden we dus aan den zonnerand:

$$l'_R \text{ of } l'_V = \frac{B'}{2}\sqrt{1 + \frac{4A^2}{B'^2} \pm \sqrt{16\frac{A^2}{B'^2} + 1}} \quad . \quad . \quad (19)$$

§ 8. *Het verschil in wederzijdschen invloed van verstrooiingslijnen aan den rand en in het centrum.*

Evenals we bij de brekingslijnen gedaan hebben, kunnen we nu ook bij de verstrooiingslijnen een bovenste grens zoeken voor de schijnbare verplaatsingen die de componenten van een lijnenpaar elkander doen ondergaan. Wij beschouwen daartoe het middenpunt M_L tusschen de L-grenzen, van hetwelk de abscis bedraagt

$$l_M = {}^1/_2\,(l_R + l_V)$$

en zouden slechts behoeven uit te rekenen hoeveel die van A verschilt. Maar het is ons vooral te doen om het *verschil* tusschen de schijnbare verplaatsingen van een doubletcomponente in het randspectrum en van dezelfde lijn in 't centrum-spectrum, dus om de grootheid

$$l_{M'} - l_M = {}^1/_2\,(l'_R + l'_V - l_R - l_V).$$

Daarvoor vinden we, na substitutie van (18) en (19),

$$l_{M'} - l_M = \frac{B}{4} \left\{ \sqrt{\frac{B'^2}{B^2} + 4\frac{A^2}{B^2} + \frac{B'}{B}\sqrt{16\frac{A^2}{B^2} + \frac{B'^2}{B^2}}} + \sqrt{\frac{B'^2}{B^2} + 4\frac{A^2}{B^2} - \frac{B'}{B}\sqrt{16\frac{A^2}{B^2} + \frac{B'^2}{B^2}}} - \sqrt{1 + 4\frac{A^2}{B^2} + \sqrt{16\frac{A^2}{B^2} + 1}} - \sqrt{1 + 4\frac{A^2}{B^2} - \sqrt{16\frac{A^2}{B^2} + 1}} \right\} \quad (20)$$

De getalwaarde van deze uitdrukking is nu berekend voor vier verschillende lijnbreedten, namelijk $B = 0{,}050$, $0{,}070$, $0{,}100$ en $0{,}200$ Å, en voor enkele geschikt gekozen waarden van $\frac{2A}{B}$ (als abscissen). Steeds is $B' - B = 0{,}010$ Å ondersteld.

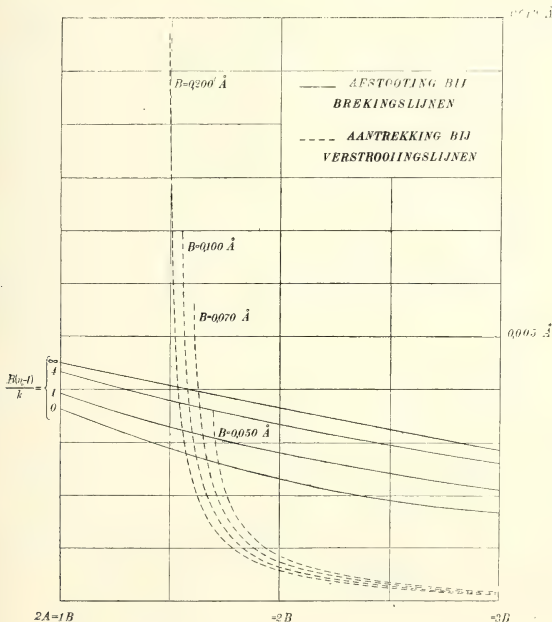


Fig. 7.

De gestippelde krommen in Fig. 7 toonen de uitkomst. Men moet zich al de ordinaten negatief denken, omdat in dit geval een schijnbare aantrekking van de twee componenten blijkt te bestaan. Men ziet hoe het effect beneden 0,001 Å blijft zoolang de afstand der lijnen meer dan tweemaal de lijnbreedte bedraagt. Bij dichtere nadering worden de lijnen snel sterk asymmetrisch; voor afstanden kleiner dan ongeveer 1,5 lijnbreedte is de tweede term van (20) imaginair, zoodat de formule onbruikbaar wordt.

§ 9. *Vergelijking dezer uitkomsten met hetgeen voor Fraunhoferlijnen gevonden is.*

Wij hebben in het voorafgaande ter vereenvoudiging ondersteld, dat de breedte der kernlijnen te verwaarloozen was; maar natuurlijk zijn er redenen om bij Fraunhoferlijnen eene eindige breedte van het ware absorptiegebied waarschijnlijk te achten. Bij de zeer sterke lijnen van het zonnespectrum (die wij trouwens buiten beschouwing hebben gelaten) zou, met het oog daarop, een beter benaderde gedaante van de dispersiekromme als uitgangspunt van de berekeningen hebben moeten dienen. Nog om een andere réden eischen sterke lijnen — waarvan vele aan den zonnerand hunne „vleugels" verliezen — eene afzonderlijke behandeling, namelijk omdat daarvoor naarmate men den rand nadert, in hoogere mate dan voor zwakke lijnen, rekening gehouden moet worden met de bolvormigheid van de lichtbron als men de gevolgen van diffusie en vooral van ongeordende straalkromming bestudeert. Zulke overwegingen wijzen erop dat men, bij verdere ontwikkeling van de theorie, voor verschillende lijnen uiteenloopende verhoudingen en omstandigheden in rekening zal hebben te brengen, in 't bijzonder zeer nabij den rand, waar het spectrum van FRAUNHOFER geleidelijk overgaat in het chromosfeerspectrum.

De fijn-gedetailleerde structuur die bij gunstige waarnemingsomstandigheden zichtbaar is in de chromosfeer wijst erop, dat althans in een niveau dat slechts weinig buiten den schijnbaren zonnerand ligt, de gasmassa (ook in dikke laag) als zeer doorschijnend moet worden beschouwd, zelfs voor stralen die tot 't gebied der Fraunhoferlijnen behooren. Daaruit volgt dat aldaar de moleculaire verstrooiing het medium niet zeer „mistig" doet schijnen, m. a. w. dat de anomale onregelmatige lichtbreking er een grootere rol speelt in de lichtverdeeling dan de anomale moleculaire verstrooiing.

Vermoedelijk zal dus wel bij de meeste Fraunhoferlijnen, ook bij de zwakkere, de duisterheid voor een grooter deel van breking dan

van moleculaire diffusie afhankelijk zijn — al blijft het mogelijk dat de verhouding ongelijk is voor verschillende lijnen.

Dit alles moeten wij in aanmerking nemen bij het vergelijken van onze theoretische uitkomsten met de waarnemingsresultaten. Fig. 7 toont bovenste grenzen voor den wederzijdschen invloed van *zuivere* brekings- en diffusielijnen. Bij Fraunhoferlijnen zijn de processen gemengd en werken tegengesteld op 't effect; maar vermoedelijk wint het de breking.

Wij mogen dus bijv. in gevallen dat de lijnafstand tusschen 1,5 en 3 maal de lijnbreedte bedraagt verwachten, dat de wederzijdsche afstooting der dispersielijnen aan den rand zeker niet meer dan 0,002 Å de afstooting in 't centrum overtreft.

Nu is volgens de bovengenoemde waarnemingen van Mount Wilson en Kodaikanal de grootte van het hier bedoelde effect te stellen op gemiddeld $0{,}0017^{5}$ Å, terwijl daarbij de gemiddelde afstand der doubletcomponenten 1,7 maal de lijnbreedte bedroeg [1]).

In de aangehaalde elders gepubliceerde mededeeling hebben wij aangetoond dat schijnbare afstootingen van twee gelijke symmetrische lijnen, berustend op systematische (photographische of psychologische) meetfouten, eerst in aanmerking komen wanneer de afstand der lijnen kleiner is dan ongeveer 1,5 maal de lijnbreedte, en dat slechts een klein gedeelte van de waargenomen afstootingen door deze fouten kan worden verklaard.

De theoretische verwachting is dus met de resultaten van het tot nu toe bekende waarnemingsmateriaal niet in strijd; maar verder kan onze conclusie dan ook voor 't oogenblik niet reiken omdat de grootheden waarover het onderzoek loopt aan de grens liggen van de tegenwoordige meet-precisie.

---

[1]) Men vergelijke ons artikel „Kritisches zu Deutungen des Sonnenspektrums", in de Ann. d. Phys., Kayser-Festheft, Bd. 71, S. 50, 1923.

Bij de rondvraag deelt de Heer P. VAN ROMBURGH mede, dat hij over de voordracht van candidaten, die ditmaal in aanmerking zouden kunnen komen voor het Nederlandsche „Fellowship" van het „Ramsay Memorial Fund", overleg heeft gepleegd met den Heer H. KAMERLINGH ONNES. Het gevolg hiervan is geweest, dat bereids eene oproeping is gedaan van gegadigden, die zich voor uitzending wenschen aan te melden.

Voor de boekerij worden de volgende boekgeschenken aangeboden:

1°. door den Heer J. W. MOLL, namens de publicatie-commissie, een ex. van C. A. J. A. OUDEMANS' „*Enumeratio systematica fungorum*", Vol. IV;

2°. namens de „Académie de Médecine" te Parijs een ex. van „*Centième anniversaire de la mort de Jenner*".

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 26 MEI 1923.

DEEL XXXII.

N°. 5.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

In verband met de notulen deelt de Voorzitter mede, dat ook de Heer P. ZEEMAN de Pasteur-herdenking te Parijs zal bijwonen en mitsdien met de Heeren EYKMAN en JAEGER de Akademie bij die gelegenheid zal vertegenwoordigen.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 18 Mei j.l. No. 2539 Afd. K. W. met de mededeeling dat de benoeming der nieuwe leden geacht kan worden door de Koningin te zijn bekrachtigd.

Nadat de nieuwe leden door de Heeren C. WINKLER en G. VAN RIJNBERK zijn binnengeleid, richt de Voorzitter zich allereerst tot den Heer J. VAN DER HOEVE. Hij prijst dit lid als een breed aangelegd geneeskundige, wiens wetenschappelijke onderzoekingen tot schitterende resultaten hebben geleid.

Vervolgens zich richtend tot den Heer A. A. NIJLAND releveert de Voorzitter de wetenschappelijke verdiensten van dit nieuwe lid op het gebied der astronomie en het groote aandeel, dat deze had in de Nederlandsche zoneclips-expedities.

Zich wendend tot den Heer L. RUTTEN zegt de Voorzitter dat deze voor ons geen vreemde is. Als correspondent der Akademie heeft hij herhaaldelijk belangwekkende mededeelingen gedaan over zijne onderzoekingen op geologisch gebied zoowel in Nederland als in onze Koloniën. Zijn exploratiewerk in Nederlandsch-Indië is door ons steeds met groote belangstelling gevolgd. Ook de wijze waarop de Heer RUTTEN het secretariaat der I. C. O.-Commissie waarneemt, wordt door ons zeer gewaardeerd.

De Heer J. VERSLUIJS — aldus de Voorzitter — heeft eveneens op den aardbol rondgezworven. Een tijdlang scheen het alsof hij buiten onze grenzen een blijvenden werkkring had gevonden. Het verheugt ons echter dat hij weer een der onzen is geworden en dat in de eerste plaats Nederland de vruchten van zijn arbeid zal mogen plukken.

De Voorzitter spreekt den wensch uit dat de nieuwe leden trouwe bezoekers der vergaderingen zullen zijn en de resultaten hunner onderzoekingen hier zullen kenbaar maken.

2°. Missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 9 Mei j.l. N°. 2441, Afd. K. W. met verzoek om

inlichtingen over den Intern. Catalogus van natuurwet. literatuur in verband met de berekening van het subsidie der Akademie voor het jaar 1924.

Den Minister is bereids in overweging gegeven voor den Internationalen Catalogus geen bepaald bedrag uit te trekken doch dezen post pro memorie te vermelden.

3°. Missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 14 Mei j.l. No. 2478 Afd. K. W. met verzoek advies te mogen ontvangen over de vraag, welke geleerde in aanmerking zou kunnen komen om den Minister te vertegenwoordigen ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan der Nederlandsche Orthopaedische Vereeniging. Spoedshalve heeft het Bestuur deze zaak afgedaan en en Prof. Dr. J. Rotgans is bereid gevonden als zoodanig op te treden. Den Minister is bij schrijven van 14 Mei j.l. N°. 52 hiervan kennis gegeven.

4°. Schrijven van het „Bureau de la Commission permanente des Congrès Internationaux" dd. 14 Mei j.l. met de mededeeling dat op 5 Mei 1923 te Amsterdam is opgericht de Geneeskundige Raad voor Nederland, die een onderdeel zal vormen van den „Conseil de recherches". Tot voorzitter van dezen Raad is benoemd Prof. H. Burger en tot secretaris Dr. N. Voorhoeve, beiden te Amsterdam. De Voorzitter deelt mede, dat de oprichting van dezen Raad het gevolg is van de vergadering der W. I. S.-Commissie, waarin de Heer Burger zitting heeft.

5°. Een uitnoodiging van het Bestuur van het Koninklijk Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap tot bijwoning der buitengewone ledenvergadering ter herdenking van het 50-jarig bestaan van het Genootschap. De Voorzitter deelt mede dat aan deze uitnoodiging door hem en den Secretaris gevolg zal worden gegeven.

Aan de uitnoodiging van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap tot bijwoning der herdenking van het 150-jarig bestaan, zal door den Voorzitter worden voldaan.

De Heer H. J. Hamburger spreekt over „*Een nieuwe vorm van samenwerking tusschen organen*" (zie blz. 536).

Daarna doet de Heer Eug. Dubois eene mededeeling over „*De voornaamste onderscheidene eigenschappen van den schedel en de hersenen van Pithecanthropus erectus*", waarvan het manuscript niet ontvangen is.

Psychologie. — F. F. HAZELHOFF en HELEEN WIERSMA. *„Subjectieve rhythmiseering".*

(Aangeboden door de Heeren E. D. WIERSMA en H. J. HAMBURGER).

Rhythmische waarnemingen, correspondeerende met een rhythmisch gebeuren in de buitenwereld, worden dagelijks in tallooze variaties veroorzaakt, door de velerlei zich rhythmisch afspelende physische en physiologische processen (wisseling van dag en nacht, zomer en winter, hartslag, ademhaling, muziek, enz.).

Onze waarnemingen zijn echter dikwijls geen getrouwe weergave van de werkelijkheid rondom ons, de vele „zinsbegoochelingen" kunnen wij hiervoor als bewijs aanvoeren. Hiertoe zouden wij ook willen rekenen het eigenaardige verschijnsel, dat wij een reeks van volkomen gelijke en regelmatig elkaar opvolgende prikkels rhythmisch waarnemen kunnen, een verschijnsel, onder den naam „subjectieve Rhythmiseering" beschreven.

Het ligt in onze bedoeling, dit verschijnsel van de subjectieve Rhythmiseering nader van een psychologisch oogpunt uit te beschouwen.

Speciaal BOLTON (1) en MEUMANN (2) wezen er op dat regelmatige reeksen van gehoorsprikkels, d. w. z. gehoorsprikkels, die quantitatief en qualitatief volkomen aan elkaar gelijk zijn en telkens met dezelfde pauzen op elkaar volgen, rhythmisch kunnen worden waargenomen, althans, wanneer de snelheid van opeenvolging binnen bepaalde grenzen ligt. KOFFKA (3) toonde hetzelfde aan voor gezichtsprikkels, die aan dezelfde voorwaarden voldoen.

Dit rhythmisch waarnemen van regelmatige prikkels blijft echter niet beperkt tot gezichts- en gehoorsgewaarwordingen, ook op het gebied van het gevoel doet zich deze rhythmiseering voor. Met een eenvoudige proef konden we dit gemakkelijk aantoonen.

Proef: Aan een met gelijkmatige snelheid ronddraaienden as is een wijzertje aangebracht, dat telkens bij iedere omwenteling de rustig liggende hand van den pp. even aanraakt. De hand krijgt telkens volkomen hetzelfde tikje met volkomen gelijk tijdinterval (de snelheid van ronddraaien is willekeurig te regelen). De geheele proefopstelling is door een scherm voor de oogen van den proefpersoon verborgen; evenmin kan hij zien, dat zijn hand door het wijzertje wordt aangeraakt. Door antiphonen in de ooren is elke gehoorsgewaarwording buitengesloten, zoodat de pp. geheel op gevoelsgewaarwordingen is aangewezen.

Wanneer wij de snelheid van ronddraaien gunstig maken (bijv. 1 à 2 omwen-

telingen per sec.), dan treedt gewoonlijk al heel spoedig subjectieve rhythmiseering op; de pp. neemt telkens de 2e of telkens de 3e aanraking sterker waar, geheel op dezelfde wijze, als dit voor gehoors- en gezichtsprikkels het geval is. Ook de neiging om bij langzame tempi eerder een 2-takt, bij snellere een 3- of een 4-takt waar te nemen, is duidelijk.

Na eenige oefening kan de pp. willekeurig elk oogenblik een ander rhythme, stijgend of dalend, voelen. Zeer groot is de invloed van suggestie van buiten af, maar gewoonlijk geeft een proefpersoon bij een bepaalde snelheid, waarin de prikkels elkaar opvolgen, aan een bepaald rhythme de voorkeur, meestal aan een dalenden 2-takt (— ⌣) of aan een dalenden 3-takt (— ⌣ ⌣). Maar ook andere, meer gecompliceerde takten kunnen zich voordoen.

Deze proef, hoe eenvoudig ook, schijnt ons toch van groote beteekenis voor de verklaring van het wezen van de „subjectieve Rhythmiseering". Immers, ze toont aan, dat dit niet een verschijnsel is, dat tot gehoors- en gezichts-gewaarwordingen beperkt blijft. Ze geeft aanleiding tot de veronderstelling, dat prikkels op alle zintuiggebieden, wanneer ze aan de bekende voorwaarden voldoen, rhythmisch kunnen worden waargenomen.

Vragen we ons eerst af, wat eigenlijk die subjectieve rhythmiseering beteekent. Regelmatig periodiek terugkeerende „Betonungsunterschiede", „Innerliche Zusammenfassung" tot groepen (MEUMANN (2)), en andere veel gebruikte termen zijn alleen omschrijvingen, van wat er in ons omgaat, geven echter geen verklaring voor het ontstaan. Ook de voorstellingen van rhythmische bewegingen als dansen, draven van een paard e.a., welke dikwijls bij de subjectieve rhythmiseering associatief worden opgewekt (KOFFKA (3)), kunnen, daar ze slechts bijkomstig zijn, niet ter verklaring dienen.

De zelfwaarneming en de juiste weergave, van wat er in ons omgaat, zal ons hier den weg moeten wijzen. Wij namen hiervoor de volgende proeven; de pp. waren behalve wijzelf, 3 medische studenten.

Proef: De proefpersoon wordt onderworpen aan een regelmatige reeks van gehoorsprikkels (gehoorsprikkels, omdat deze wel het gemakkelijkst worden gerhythmiseerd), die elkaar met een bepaalde snelheid opvolgen, ongeveer 1 tot 2 prikkels per secunde, vlugger of langzamer, naarmate de proefpersoon er het duidelijkst een bepaald rhythme in hoort. Hij heeft de opdracht te letten op wat hij hoort, en nauwkeurig weer te geven, wat hij waarneemt door met de tikjes, die hij hoort, zachtjes mee te tikken. Dit meetikken doet hij met een koperen staafje op een koperen onderlaag. Zoodra het staafje de onderlaag aanraakt, wordt een electrische stroom, die een electromagneetje aantrekt, gesloten. Wanneer het staafje weer opgetild wordt, is de stroom verbroken, de electromagneet keert in zijn oorspronkelijken stand terug. Aan den electromagneet is een met inkt bevochtigd wijzertje aangebracht, dat de op- en neergaande beweging van den magneet nauwkeurig op een ronddraaiende kimograaf opschrijft. In de verkregen curve is

het oogenblik af te lezen, waarop de stroom wordt gesloten (neergaande beweging van het wijzertje) en de tijd, gedurende welken de stroom gesloten blijft. Het oogenblik, waarop de stroom wordt gesloten, beteekent het moment, waarop de pp. het tikje geeft, d. w. z. het oogenblik weergeeft, waarop hij den gehoorsprikkel waarneemt; de tijd gedurende welken de stroom gesloten blijft, is de weergave van den duur van de gehoorsgewaarwording. Het is natuurlijk niet te verwachten, dat de weergave absoluut juist zal zijn, maar toch kunnen er met zekerheid belangrijke conclusies uit worden getrokken, zooals uit onderstaande korte gedeelten van eenige curven reeds kan blijken. Overigens vermelden wij slechts het resulaat van de uitmetingen.

De middelste curve vertoont de weergave van de gehoorswaarneming van den proefpersoon, de bovenste is de geregistreerde prikkel zelf. Deze prikkel bestond uit een reeks tikjes, veroorzaakt door een valhamertje. Het oogenblik, waarop het geheel regelmatig op en neergaande valhamertje zijn onderlaag treft en daardoor den geluidsprikkel veroorzaakt, is gemakkelijk op dezelfde wijze electrisch te registreeren als de tikjes, die de proefpersoon maakt. De onderste curve geeft den tijd in $^1/_{25}$ seconden aan.

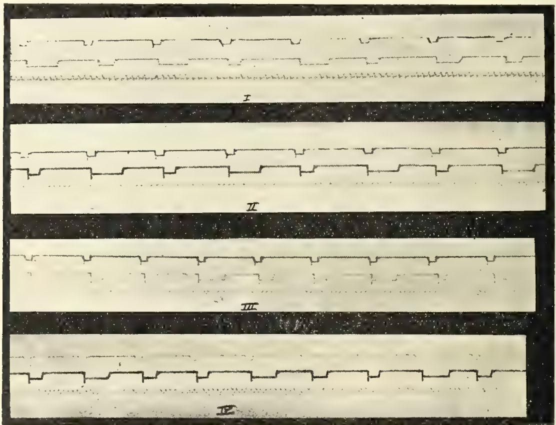


Fig. 1.

I. Dalende tweetakt –́ ⏑
II. Stijgende tweetakt ⏑ –́
III. Dalende drietakt –́ ⏑ ⏑
IV. Drietakt, middelste geaccentueerd ⏑ –́ ⏑

Wij hebben den tijd uitgemeten, die telkens verloopt tusschen de oogenblikken, waarop de proefpersoon het optreden van zijn gehoorswaarneming weergeeft.

De resultaten der uitmetingen geven wij in nevenstaande tabellen weer:

I. Dalende tweetakt (´— ⏑).

Pp.	Aantal uitgemeten tweetakten.	Tijd, in $^{1}/_{25}$ sec. tusschen: begin niet geaccentueerden en geaccentueerden prikkel.	begin geaccentueerden en niet geaccentueerden prikkel.	Gemiddeld is de geaccentueerde prikkel sneller waargenomen dan de niet geaccentueerde in sec.:
B.	20	221	241	0,020
H.	20	249	264	0,015
Ho.	20	272	287	0,015
R.	25	284	292	0,007
W.	10	167	174	0,014

II. Stijgende tweetakt (⏑ ´—).

Pp.	Aantal uitgemeten tweetakten.	Tijd, in $^{1}/_{25}$ sec. tusschen: begin geaccentueerden en niet geaccentueerden prikkel.	begin niet geaccentueerden en geaccentueerden prikkel.	Gemiddeld is de geaccentueerde prikkel sneller waargenomen dan de niet geaccentueerde in sec.:
B.	25	330	315	0,012
Ho.	40	577	537	0,020
R.	40	470	444	0,013
W.	40	554	516	0,019

III. Dalende drietakt (´— ⏑ ⏑).

Pp.	Aantal uitgemeten drietakten.	Tijd, in $^{1}/_{25}$ sec. tusschen:			Gemiddeld is de geaccentueerde prikkel sneller waargenomen dan de	
		begin 2en niet geaccentueerden en geaccentueerden prikkel.	begin geaccentueerden en 1en niet geaccentueerden prikkel.	begin 1en en 2en niet geaccentueerden prikkel.	1e niet geaccentueerde in sec.	2e niet geaccentueerde in sec.
B.	30	355	416	413	0,028	0,052
H.	10	141	168	145	0,068	0,044
Ho.	10	99	114	113	0,040	0,036
W.	20	267	272	271	0,004	0,006

IV. Drietakt. Middelste geaccentueerd (⌣ ´ ⌣).

Pp.	Aantal uitgemeten drietakten.	Tijd, in $^1/_{25}$ sec. tusschen:			Gemiddeld is de geaccentueerde prikkel sneller waargenomen dan de	
		begin 2en niet geaccentueerden en 1en niet geaccentueerden prikkel.	begin 1en niet geaccentueerden en geaccentueerden prikkel	begin geaccentueerden en 2en niet geaccentueerden prikkel.	1e niet geaccentueerde in sec.	2e niet geaccentueerde in sec.
B.	40	488	469	505	**0,017**	**0,018**
H.	30	372	348	390	**0,029**	**0,027**
W.	40	460	450	494	**0,018**	**0,026**

In al deze gevallen, waarin de „subjectieve rhythmiseering" gemakkelijk optrad en de pp. zoo nauwkeurig mogelijk zijn waarnemingen weergaf, blijkt duidelijk:

1o. dat de proefpersoon den subjectief geaccentueerden prikkel eerder (sneller) waarneemt, dan den niet subjectief geaccentueerden.

2o. dat de waarneming van den subjectief geaccentueerden prikkel langer duurt. Dit laatste is uit de curven onmiddellijk af te lezen, zoodat nadere uitmetingen hieromtrent ons overbodig schenen.

Dat de waarneming van den subjectief geaccentueerden prikkel ook intensiever is, is in de bovenstaande curven niet uitgedrukt; doordat de uitslag van het electromagneetje telkens even groot is. Dat dit echter het geval is, leert ons de zelfwaarneming. Door een andere wijze van registreeren, nml. door den pp. op een luchtpelotte te laten meetikken, is ook dit duidelijk aan te toonen, zooals uit onderstaande curve is te lezen. Bij deze curven komen door de traagheid van het schrijvende wijzertje de kleine tijdsverschillen minder nauwkeurig tot uiting; daarom hebben we voor het uitmeten van den tijd alleen de electrisch geregistreerde curven gebruikt.

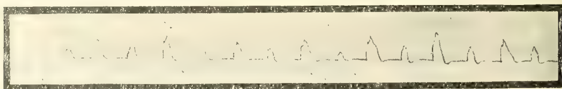


Fig. 2.

Dalende tweetakt ´ ⌣

Wanneer we de resultaten van onze curven samenvatten, waarin de weergave van de waarnemingen is uitgedrukt, dan komen we tot de volgende conclusies:

1. De subjectief geaccentueerde prikkel wordt sneller waargenomen.
2. „ „ „ „ „ intensiever „
3. „ „ „ „ „ langer „

Deze drie kenmerken zijn psychologisch goed begrijpelijk en wij kunnen ze verklaren door aan te nemen, dat op den éénen prikkel telkens meer dan op den anderen de aandacht was gericht. Wij weten immers, dat onze waarnemingen sneller tot stand komen, intensiever zijn en bovendien langer nawerken, naarmate de opmerkzaamheid er meer op is geconcentreerd.

Dit is, naar wij meenen, het wezen van de „subjectieve rhythmiseering": zij bestaat hierin: *dat op den éénen prikkel meer dan op den anderen de opmerkzaamheid wordt gericht.*

Enkele punten vragen nog nadere opheldering. In de eerste plaats, de z. g. *„Innerliche Zusammenfassung"*, het samenvatten van de indrukken tot groepen, die gewoonlijk met den subjectief geaccentueerden prikkel aanvangen. Dit is tevens een tijdelijke samenvatting, nml. zóó, dat de onderdeelen van de groep sneller op elkaar schijnen te volgen, terwijl telkens tusschen twee groepen een langere pauze ligt (Meumann (2)). Ons lijkt deze samenvatting alleen van secundairen aard en het gevolg van het feit, dat de subjectief geaccentueerde prikkel langer nawerkt. Hierdoor is de pauze tusschen het einde van den geaccentueerden en het begin van den niet geaccentueerden prikkel korter dan omgekeerd. Zoo is het ook duidelijk, dat men bijna altijd rhythmiseert in den zin van een dalend rhythme, de kortere pauze komt dan in de groep, of liever door de korte pauze schijnt het ons, of de twee prikkels waartusschen zij ligt, bij elkaar hooren; omgekeerd veroorzaakt de lange pauze de scheiding tusschen twee groepen. Een andere vraag, die zich voordoet, betreft de *oorzaak van de subjectieve rhythmiseering*: waaròm richten wij de opmerkzaamheid op den eenen prikkel meer dan op den anderen en waarom is deze wisseling regelmatig?

Ons vermogen, indrukken uit de buitenwereld op te nemen, is beperkt. Van een groot aantal prikkels, welke gelijktijdig op ons inwerken, kunnen wij slechts een deel waarnemen. Enkele bereiken een hoogen bewustzijnsgraad, andere worden op den achtergrond gedrongen. Als de prikkels zwak zijn en slechts korten tijd inwerken, behoeft de quantiteit niet groot te zijn om selectie te doen plaats vinden.

Proef: twee, drie of meer volkomen aan elkaar gelijke streepjes of punten worden gedurende zeer korten tijd getoond. Wanneer de streepjes of punten niet zeer duidelijk zijn, en de tijd van expositie kort genoeg, nemen we slechts enkele goed waar, de andere schijnen ons veel zwakker, of we zien ze in het geheel niet.

Wij zijn niet in staat onze opmerkzaamheid in zóó korten tijd over meerdere zwakke prikkels te verdeelen, en alle even duidelijk waar te nemen. Wanneer nu dergelijke zwakke prikkels snel achter elkaar gegeven worden, is hetzelfde te verwachten; ook wanneer zij met korte pauzen op elkaar volgen, kunnen wij ze niet alle waarnemen en moet selectie plaats vinden. Bij het experimenteeren bemerkten wij ook, dat juist reeksen van zwakke en vage prikkels het beste subjectief gerhythmiseerd worden.

Waarom is nu deze *accentueering regelmatig?*

Een periodiek terugkeerende prikkel wordt gemakkelijk waargenomen; wij zijn van te voren op zijn komst ingesteld, wij weten immers, wanneer hij komt. Wanneer wij nu uit een reeks prikkels b. v. den eersten en den derden duidelijk waarnemen, dan zijn wij op den vijfden, zevenden enz. beter ingesteld. Willekeurig kunnen wij deze instelling ieder oogenblik wisselen, kunnen wij in plaats van een 2-takt een 3-takt waarnemen, of een dalend rhythme in een stijgend veranderen.

Uit het voorafgaande zijn meerdere bekende eigenaardigheden van de subjectieve rhythmiseering te verklaren:

Hoe sneller de prikkels op elkaar volgen, hoe grooter de groepen worden, waarin ze worden samengevat. Wij trachten zooveel mogelijk prikkels goed waar te nemen, hoe langzamer het tempo is, hoe meer wij duidelijk kunnen waarnemen. Een 2-takt wordt, wanneer de snelheid van opvolging toeneemt, tot een 3-takt een 3-takt tot een 4-takt enz.

Dat de snelheid van het tempo binnen bepaalde grenzen moet liggen, is ook begrijpelijk. Wanneer de pauzen tusschen de prikkels te groot zijn, kan op iederen prikkel afzonderlijk de geheele opmerkzaamheid gericht worden, de waarneming van iederen prikkel bereikt haar maximale intensiteit, zoodat er zich dan geen rhythmiseering voordoet. Wanneer de prikkels elkaar te snel opvolgen, kunnen wij geen enkele meer afzonderlijk waarnemen, zij vervloeien tot een vaag geheel.

Ook is het nu duidelijk, dat een *gevoel van ontspanning* (lustgevoel) optreedt, wanneer we een reeks prikkels, die we gedwongen zijn te volgen, rhythmisch gaan waarnemen, daar dan veel minder van de opmerkzaamheid wordt gevergd.

Bij het experimenteeren kan men bemerken, dat de pp. steeds gemakkelijker een reeks prikkels rhythmisch gaat waarnemen. Ten slotte kan hij dikwijls van een bepaald rhythme niet meer afkomen, het is als het ware tot een obsessie geworden.

Zoo is het ook met bepaalde reeksen van regelmatige prikkels,

die in het dagelijksch leven telkens op ons inwerken, zooals bijv. het tikken van de klok, waarin ieder een rhythme pleegt te hooren, zonder daaraan te kunnen ontkomen.

KORTE SAMENVATTING.

Het rhythmisch waarnemen van een reeks volkomen gelijke en elkaar regelmatig opvolgende prikkels wordt veroorzaakt door den verschillenden graad van opmerkzaamheid, die op de verschillende prikkels wordt gericht.

Deze verdeeling van de opmerkzaamheid is een noodzakelijk gevolg van het feit, dat wij van een groote hoeveelheid prikkels die op ons inwerken, slechts een beperkt aantal kunnen waarnemen, (engte van het bewustzijn).

De verdeeling van de opmerkzaamheid is oorspronkelijk willekeurig, kan op den duur dwangmatig worden.

De primaire kenmerken van de subjectieve rhythmiseering zijn gelegen in het feit, dat de ééne prikkel sneller, intensiever en langduriger waargenomen wordt dan de andere. Als gevolg hiervan is te beschouwen het samenvatten tot groepen.

Niet alleen gezichts- en gehoorsprikkels, maar ook gevoelsprikkels, die aan bepaalde voorwaarden voldoen, kunnen subjectief worden gerhythmiseerd.

LITERATUUR.

1. BOLTON, THADDEUS L., Rhythm. Amer. Journ. of Psychology, Vol. VI. No. 2, 1894.

2. MEUMANN, ERNST. Untersuchungen zur Psychol. und Aesthetik des Rhythmus. Phil. Stud. 10. 1894.

3. KOFFKA, KURT. Experimental Untersuchungen zur Lehre vom Rhythmus. Zeitschr. f. Psychol. und Physiol. der Sinnesorgane. 1. Abt. Ztschr. f. Psychol. Bd. 52, 1909.

4. FOREL, O. L. Le Rythme. Etude psychologique. Journ. f. Psychol. und Neurol. Bd. 26 H. 2 1920.

5. BÜCHER, KARL. Arbeit und Rhythmus. Leipzig 1899.

6. WERNER, HEINZ. Rhythmik, eine Mehrwertige Gestaltenverkettung. Ztschr. f. Psychol. Bd. LXXXII 1919.

Wiskunde. — J. C. KLUYVER: „*Over de constante van* EULER".

Voor de berekening van de waarde der constante C van EULER gebruikt men de sommatie-formule of eenig andere asymptotische reeks, en ten minste één term in de ontwikkeling is altijd een transcendente grootheid. Het zou verkieslijker zijn, om C voor te stellen door een convergente uitdrukking, die alleen meetbare termen bevat, omdat wellicht een zoodanige voorstelling van het getal C eens de middelen zal opleveren, om zijne onmeetbaarheid vast te stellen. Tot nu toe is de reeks van VACCA [1])

$$C = 1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) +$$
$$+ 3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots - \frac{1}{15}\right) + 4\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{17} + \ldots - \frac{1}{31}\right) + \ldots$$

de eenige uitkomst in de gewenschte richting, en als een tweede wil ik daaraan toevoegen het bewijs, dat $C - \frac{1}{2}$ ontwikkeld kan worden in een convergente kettingbreuk

$$\frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \frac{1|}{|a_4} + \ldots,$$

waarin de noemers a_k doorloopend positief en meetbaar zijn.

De rekening van STIELTJES [2]) voor de omzetting van een integraal in een kettingbreuk volgende, beschouw ik de integraal

$$J(z) = \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot f(u) = \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{u}} - 1},$$

waarbij ik onderstel $z > 0$. Als men de integrand ontwikkelt naar machten van $\frac{1}{z}$, geeft termsgewijze integratie de divergente reeks

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} \ldots\ldots + (-1)^h \frac{c_h}{z^{h+1}} + \ldots\ldots,$$

wier coëfficiënten c_h bepaald zijn door de vergelijking

[1]) Q. J. Math, London, vol. XLI, p. 363.

[2]) Recherches sur les fractions continues. Oeuvres complètes, II, p. 402.

$$c_h = \int_0^\infty u^h f(u)\, du = \frac{2}{(2\pi)^{h+1}} \int_0^\infty \frac{v^{2h+1}}{e^v - 1}\, dv = \frac{B_{h+1}}{2h+2}.$$

Derhalve c_h, rechtstreeks afgeleid uit het getal B_{h+1} van BERNOULLI, is een positief en meetbaar getal.

Ten einde de waarde van de integraal $J(z)$ te bepalen, schrijf ik

$$J(z) = \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \left\{ e^{-2\pi\sqrt{u}} + e^{-4\pi\sqrt{u}} + e^{-6\pi\sqrt{u}} + \ldots + e^{-2m\pi\sqrt{u}} \right\} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot \frac{e^{-2m\pi\sqrt{u}}}{e^{2\pi\sqrt{u}} - 1},$$

en in de restintegraal substitueerende $u = v^2$, vindt men

$$\int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot \frac{e^{-2m\pi\sqrt{u}}}{e^{2\pi\sqrt{u}} - 1} = 2\int_0^\infty \frac{dv}{v^2+z} \cdot \frac{ve^{-2\pi v}}{e^{2\pi v} - 1} < \frac{1}{2\pi^2 mz}.$$

Daarom heeft men

$$J(z) = \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-2\pi k\sqrt{u}} = \int_0^\infty du\, e^{-2\pi\sqrt{u}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{u + k^2 z},$$

en door te stellen $u = \dfrac{zv^2}{4\pi^2}$, verkrijgt men

$$J(z) = \int_0^\infty e^{-v\sqrt{z}}\, dv \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2v}{v^2 + 4k^2\pi^2} = \int_0^\infty e^{-v\sqrt{z}}\, dv \left\{ \frac{e^v}{e^v - 1} - \frac{1}{v} - \frac{1}{2} \right\} =$$

$$= -\int_0^\infty dv \left\{ \frac{e^{-v}}{v} - \frac{e^{v(1-\sqrt{z})}}{e^v - 1} \right\} + \int_0^\infty \frac{e^{-v} - e^{-v\sqrt{z}}}{v}\, dv \quad \frac{1}{2\sqrt{z}} =$$

$$= -\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\sqrt{z}) + \log(\sqrt{z}) - \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

een uitkomst, waaruit men dadelijk afleidt $J(1) = C - \frac{1}{2}$.

Nu kan volgens de theorie van STIELTJES de integraal $J(z)$ formeel worden omgezet in een kettingbreuk

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + \frac{1|}{|a_4} + \frac{1|}{|a_5 z} + \ldots,$$

wier noemers a_k afhangen van de coëfficiënten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ van de

divergente reeks. De algemeene methode volgende, moet men beschouwen de determinanten

$$\lambda_{2n} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \dots\dots c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 \dots\dots c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & c_5 \dots\dots c_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} \dots c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \lambda_{2n-1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \dots\dots c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 \dots\dots c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 \dots\dots c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} \dots c_{2n-2} \end{vmatrix},$$

en men zal dan hebben

$$a_1 = \frac{1}{c_0}, \quad a_2 = \frac{c_0^2}{c_1}, \dots, a_k = \frac{\lambda_{k-1}^2}{\lambda_k \, \lambda_{k-2}}.$$

Deze algemeene formules leeren weinig omtrent de getallenwaarden van de noemers a_k, bedenkende evenwel, dat $c_h = \dfrac{B_{h+1}}{2_{h+2}}$ is, is het in te zien, dat zij meetbaar zijn en alleen afhangen van de getallen van Bernoulli. Buitendien zijn zij positief, want beschouwende den determinant

$$D = \begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \dots c_{p+m} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & c_{p+3} & \dots c_{p+m+1} \\ c_{p+2} & c_{p+3} & c_{p+4} & \dots c_{p+m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p+m} & c_{p+m+1} & c_{p+m+2} & \dots c_{p+2m} \end{vmatrix},$$

met willekeurige aanwijzers p en n, heeft men

$$D = \frac{1}{(m+1)!} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(u_1)\, f(u_2) \dots f(u_{m+1}) du_1 du_2 \dots du_{m+1} u_1^p u_2^p \dots u_{m+1}^p \begin{vmatrix} 1 u_1 & u_1^2 \dots u_1^m \\ 1 u_2 & u_2^2 \dots u_2^m \\ 1 u_3 & u_3^2 \dots u_3^m \\ \cdot & \cdot \\ 1 u_{m+1} & u_{m+1}^2 \dots u_{m+1}^m \end{vmatrix}$$

Derhalve D en in het bijzonder elke determinant λ_k is positief, zoodat ook dezelfde gevolgtrekking geldt voor a_k. Rechtstreeksche berekening geeft voor de allereerste noemers a_k tamelijk onregelmatige getallenwaarden. Men zal vinden

$$a_1 = 12, \, a_2 = \frac{5}{6}, \, a_3 = \frac{252}{79}, \, a_4 = \frac{79^2}{60 \,.\, 241}, \, a_5 = \frac{241^2 \,.\, 11 \,.\, 12}{79 \,.\, 52489},$$

maar deze uitkomsten geven geen aanwijzing omtrent de mogelijke

convergentie der kettingbreuk. Ten einde deze convergentie te bewijzen voor verander ik $f(u)$ in

$$g(u) = \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}}$$

en de methode van STIELTJES toepassende op de nieuwe integraal

$$J_1(z) = \int_0^\infty \frac{du}{u+z} \cdot g(u) = -\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\sqrt{z}) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2\sqrt{z}) - \frac{1}{4\sqrt{z}} - \log 2,$$

verkrijgt men de kettingbreuk

$$\frac{1|}{|a'_1 z} + \frac{1|}{|a'_2} + \frac{1|}{|a'_3 z} + \frac{1|}{|a'_4} + \frac{1|}{|a'_5 z} + \ldots .$$

met $a'_{2n} = \frac{1}{2n}$ en $a'_{2n+1} = \frac{16}{2n+1}$. Blijkbaar divergeeren nu beide reeksen $\sum\limits_1^\infty a'_{2k}$ en $\sum\limits_0^\infty a'_{2k+1}$, waaruit men besluit, dat de nieuwe kettingbreuk voor $z > 0$ noodzakelijkerwijze convergeert, terwijl men terloops voor $z = \frac{1}{16}$ de vrij merkwaardige uitkomst

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{1|}{|\frac{1}{1}} + \frac{1|}{|\frac{1}{2}} + \frac{1|}{|\frac{1}{3}} + \frac{1|}{|\frac{1}{4}} + \ldots,$$

kan opmerken. Als men nu de functies $f(u)$ en $g(u)$ vergelijkt, heeft men

$$\frac{f(u)}{g(u)} = 1 + e^{-\pi\sqrt{u}}$$

en dientengevolge overal in het integratievak

$$1 \leqq \frac{f(u)}{g(u)} \leqq 2,$$

daarom, opnieuw de redeneering van STIELTJES volgende, mag men besluiten tot de ongelijkheden

$$\tfrac{1}{2}(a'_1 + a'_3 + a'_5 + \ldots + a'_{2n+1}) < (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}) <$$
$$< (a'_1 + a'_3 + a'_5 + \ldots + a'_{2n+1}),$$

anders geschreven tot

$$8\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) < (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}) <$$
$$< 16\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right).$$

Hieruit blijkt, dat de benedengrens van a_{2k+1} moet zijn nul, en dat is in overeenstemming met het feit, dat $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ onbepaald toeneemt, want STIELTJES toonde aan, dat in dit geval geen bovengrens voor $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ kan worden aangegeven. De voornaamste gevolgtrekking echter is, dat de reeks $\overset{\infty}{\Sigma}\, a_{2k+1}$ divergeert, dat daarom de kettingbreuk

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + \frac{1|}{|a_4} + \frac{1|}{|a_5 z} + \ldots.$$

convergeert, behalve wanneer z bestaanbaar en negatief is, en dat zij gelijk is aan de integraal $J(z)$. Derhalve, $z = 1$ stellende, is er aldus bewezen, dat $C - \frac{1}{2}$ ontwikkeld kan worden in de kettingbreuk

$$\frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \frac{1|}{|a_4} + \frac{1|}{|a_5} + \ldots,$$

waarvan de noemers a_k zijn meetbaar en positief, terwijl de noemers met oneven aanwijzer tot benedengrens nul hebben. Min of meer zal men geneigd zijn te gelooven, dat een kettingbreuk, die aan deze voorwaarden voldoet, niet een meetbaar getal kan voorstellen, en zoo leidt de ontwikkeling van $C - \frac{1}{2}$ weder tot de gissing, dat C onmeetbaar moet zijn. De verkregen uitkomst heeft geen praktische waarde; dat men na eenige herleiding vindt

$$C - \tfrac{1}{2} = \frac{1|}{|12} + \frac{6|}{|5} + \frac{79|}{|42} + \frac{2410|}{|79} + \frac{262445|}{|2651} + \ldots,$$

is voor de berekening van de constante van geringe beteekenis, en al kan men teller en noemer van eenige naderende breuk in de getallen van BERNOULLI uitdrukken, als men de constante C wil benaderen, verdienen andere methoden de voorkeur.

Wiskunde. — M. J. BELINFANTE: *„Over de vermenigvuldiging en sommeerbaarheid van oneindige reeksen".*

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

In een vorig artikel, getiteld: „Een generalisatie van de stelling van MERTENS" is het volgende theorema bewezen [1]):

Theorema 1. *Het product van een reeks, die samenvoegbaar is van de orde p met een reeks, die sommeerbaar is van de orde q, is sommeerbaar van de orde* $p + q$.

We zullen nu bewijzen, dat deze stelling ook doorgaat, indien p en q geen geheele getallen zijn (§ 1). We merken verder op, dat theorema 1 het volgende theorema van ROSENBLATT als bijzonder geval bevat [2]):

Theorema 1*a*. *Het product van een reeks, die samenvoegbaar is van de orde p met een reeks, die samenvoegbaar is van de orde q, is sommeerbaar van de orde* $p + q$.

ROSENBLATT is tot zijn theorema gekomen door het volgende theorema van HARDY te generaliseeren [3]):

Theorema 2. *Indien de reeksen* Σa_n *en* Σb_n *convergent zijn, en aan de voorwaarden* $|na_n| < \varkappa, |nb_n| < \varkappa$ *voldoen voor iedere n, dan is hun product eveneens convergent.*

Er doet zich nu de vraag voor: is het ook geoorloofd om één van de voorwaarden $|na_n| < \varkappa, |nb_n| < \varkappa$ te laten vervallen?

We zullen door een voorbeeld laten zien, dat het antwoord ontkennend moet luiden, en door een ander voorbeeld zullen we aan toonen, dat de voorwaarden $|na_n| < \varkappa, |nb_n| < \varkappa$ te zamen met de convergentie van Σa_n en Σb_n niet noodzakelijk tengevolge hebben, dat aan de voorwaarde $|nc_n| < \varkappa'$, voldaan is. (Σc_n stelt het product van Σa_n en Σb_n voor).

---

[1]) Amst. Ak. Verslagen, dl. XXXII (p. 177—189). Het artikel zal geciteerd worden als: „Art. Mert".

[2]) Art. Mert., p. 188, 189.

[3]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 44, p. 284, 1913.

Hieruit volgt, dat we niet a priori uit theorema 2 tot de volgende uitbreiding mogen concludeeren:

Theorema 3. *Indien de reeksen* $\Sigma a_n^{(1)}$, $\Sigma a_n^{(2)}, \ldots \Sigma a_n^{(k)}$ *convergent zijn, en aan de voorwaarde* $|n a_n^{(i)}| < \varkappa$ *voor iedere* n *en* $1 \leq i \leq k$ *voldoen, dan is het product van deze k reeksen convergent.*

Een bewijs van dit theorema zal gegeven worden in § 2. In § 3 wordt het begrip „sommeerbaarheid van oneindig hooge orde" gedefinieerd, en een stelling dienaangaande bewezen.

§ 1.

De middelwaarden van de p^{de} orde van de reeks $a_1 + a_2 + \ldots$ worden nu gedefinieerd door de volgende uitdrukking:

$$\frac{S_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+1)}}$$

waarin:

$$A_n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+k-1)}{\Gamma(n) \cdot \Gamma(k)} \; ; \; A_n^{(0)} = 0 \; ; \; A_1^{(0)} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$S_n^{(k)} = a_1 A_n^{(k)} + a_2 A_{n-1}^{(k)} + \ldots + a_n A_1^{(k)} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Indien p een geheel getal of nul is, dan komen deze definities overeen met de vroegere definities. Ons bewijs van theorema 1 voor p en q geheel, was gebaseerd op de volgende stelling:

Theorema 4. *Indien* Σa_n *sommeerbaar is van de orde* p, *dan is* Σa_n *ook sommeerbaar van de orde* $p+1$,

terwijl gebruik gemaakt werd van de volgende betrekkingen:

$$S_1^{(p)} T_n^{(q)} + S_2^{(p)} T_{n-1}^{(q)} + \ldots + S_n^{(p)} T_1^{(q)} =$$

$$= S_1^{(p-1)} T_n^{(q+1)} + S_2^{(p-1)} T_{n-1}^{(q+1)} + \ldots + S_n^{(p-1)} T_1^{(q+1)} \quad (3)$$

$$W_n^{(p+q)} = S_1^{(p)} T_n^{(q)} + S_2^{(p)} T_{n-1}^{(q)} + \ldots + S_n^{(p)} T_1^{(q)} \quad \ldots \quad (4)$$

$$A_n^{(p+q)} = A_1^{(p)} A_n^{(q)} + A_2^{(p)} A_{n-1}^{(q)} + \ldots + A_n^{(p)} A_1^{(q)} \quad \ldots \quad (5)$$

$$A_{i+1}^{(p)} \geq A_i^{(p)} \qquad \text{als} \qquad p > 1 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\lim_{n=\infty} . A_n^{(p+1)} = \infty \qquad \text{als} \qquad p > 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Overigens is van het feit, dat p en q geheel waren ondersteld, geen gebruik gemaakt. Daar nu door CHAPMAN[1]) bewezen is, dat theorema 4 doorgaat, als p geen geheel getal is, hebben we slechts te bewijzen, dat de betrekkingen (3)—(8) vervuld blijven indien p en q geen geheele getallen zijn, en het oorspronkelijke bewijs, dat uit drie deelen bestond[2]) blijft volkomen geldig.

Nu zijn de formules (3) en (5) een onmiddellijk gevolg van de vergelijkingen:

$$A_n^{(p+1)} = A_1^{(p)} + A_2^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$S_n^{(p+1)} = S_1^{(p)} + S_2^{(p)} + \ldots + S_n^{(p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

zooals blijkt uit het geciteerde artikel[3]).

Het is dus voldoende te bewijzen, dat de betrekkingen (A), (B), (4), (6), (7) en (8) juist zijn als $p > 0$ en $q > 0$.

Bewijs van (A).

$$A_1^{(p)} + A_2^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1) \cdot \Gamma(p)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2) \cdot \Gamma(p)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(n) \cdot \Gamma(p)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \left[\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(n)}\right]$$

$$A_n^{(p+1)} = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n) \cdot \Gamma(p+1)} = \frac{1}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p+n)}{p \cdot \Gamma(n)}$$

Het is derhalve voldoende te bewijzen, dat:

$$\frac{\Gamma(p+n)}{p \cdot \Gamma(n)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(n)} \quad . \quad . \quad (9)$$

Dit geschiedt met behulp van inductie: aan (9) is voldaan als $n = 1$, en als we bij beide leden van (9) de gelijkheid $\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(p+n)}{n \cdot \Gamma(n)}$ optellen, krijgen we:

---

[1]) Proc. of the Lond. Math. Soc., Ser. 2 Vol. 9 p. 369—409.

[2]) Art. Mert. p. 178—185.

[3]) Art. Mert. p. 179.

$$\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n)} \cdot \left[\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right] = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)}$$

of:

$$\frac{(p+n)\,.\,\Gamma(p+n)}{pn\,.\,\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)}$$

$$\frac{\Gamma(p+n+1)}{p\,.\,\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} + \ldots + \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n+1)}$$

Bewijs van (B).

$$S_1^{(p)} + S_2^{(p)} + \ldots + S_n^{(p)} =$$

$$= a_1 A_1^{(p)} + [a_1 A_2^{(p)} + a_2 A_1^{(p)}] + \ldots + [a_1 A_n^{(p)} + a_2 A_{n-1}^{(p)} + \ldots + a_n A_1^{(p)}]$$

$$= a_1[A_1^{(p)} + A_2^{(p)} + \ldots + A_n^{(p)}] + a_2[A^{(p)} + \ldots + A_{n-1}^{(p)}] + \ldots + a_n A_1^{(p)}$$

Met behulp van (A) volgt hieruit:

$$S_1^{(p)} + S_2^{(p)} + \ldots + S_n^{(p)} = a_1 A_n^{(p+1)} + a_2 A_{n-1}^{(p+1)} + \ldots + a_n A_1^{(p+1)} = S_n^{(p+1)}$$

Bewijs van (4).

$$W_n^{(p+q)} = c_1 A_n^{(p+q)} + c_2 A_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + c_n A_1^{(p+q)}$$

$$= a_1 b_1 A_n^{(p+q)} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) A_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) A_1^{(p+q)}$$

$$= a_1[b_1 A_n^{(p+q)} + b_2 A_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + b_n A_1^{(p+q)}] +$$

$$+ a_2[b_1 A_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + b_{n-1} A_1^{(p+q)}] + \ldots + a_n[b_1 A_1^{(p+q)}]$$

$$= a_1 T_n^{(p+q)} + a_2 T_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + a_n T_1^{(p+q)}$$

$$= s_1 T_n^{(p+q)} + (s_2 - s_1)\, T_{n-1}^{(p+q)} + \ldots + (s_n - s_{n-1}) T_1^{(p+q)}$$

$$= s_1[T_n^{(p+q)} - T_{n-1}^{(p+q)}] + s_2[T_{n-1}^{(p+q)} - T_{n-2}^{(p+q)}] + \ldots + s_n T_1^{(p+q)}$$

$$= S_1^{(1)}\, T_n^{(p+q-1)} + S_2^{(1)} T_{n-1}^{(p+q-1)} + \ldots + S_n^{(1)} T_1^{(p+q-1)}$$

$$= S_1^{(p)} T_n^{(q)} + S_2^{(p)} T_{n-1}^{(q)} + \ldots + S_n^{(p)} T_1^{(q)}.$$

Bewijs van (6).

We moeten laten zien, dat:

$$A_{i+1}^{(p)} \geq A_i^{(p)} \qquad \text{als} \qquad p > 1$$

of:

$$\frac{\Gamma(p+i)}{\Gamma(i+1)\,.\,\Gamma(p)} \geq \frac{\Gamma(p+i-1)}{\Gamma(i)\,.\,\Gamma(p)}$$

$$\frac{(p+i-1)\,.\,\Gamma(p+i-1)}{i\,.\,\Gamma(i)\,.\,\Gamma(p)} \geq \frac{\Gamma(p+i-1)}{\Gamma(i)\,.\,\Gamma(p)}$$

$\frac{p+i-1}{i} \geq 1$, hetgeen volgt uit $p > 1$.

Bewijs van (7).

$$A_n^{(p+1)} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(p+1)} = \frac{(n+p-1)\,.\,(n+p-2)\ldots(p+1)\,.\,\Gamma(p+1)}{(n-1)\,.\,(n-2)\ldots\ldots 1\,.\,\Gamma(p+1)}$$

$$= \left(1+\frac{p}{n-1}\right).\left(1+\frac{p}{n-2}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{1}\right) > 1+p\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

Hieruit volgt dat $\lim\limits_{n=\infty} . A_n^{(p+1)} = \infty$ als $p > 0$.

Bewijs van (8).

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} &= \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(p+1)} \times \frac{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(n+p+q)} \\ &= \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+p+q)} \times \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad : \quad (10)$$

Daar $\lim\limits_{n=\infty} . \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} = \lim\limits_{n=\infty} . \; \Gamma(a+1)\,.\,A_n^{(a+1)} = \infty$, als $a > 0$, zal:

$\lim\limits_{n=\infty} . \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+p+q)} = 0$, als $q > 0$. Derhalve volgt uit (10):

$$\lim_{n=\infty} . \frac{A_n^{(p+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} = 0 \qquad \text{als} \qquad q > 0.$$

§ 2.

Dat de voorwaarde $|na_n| < \varkappa$, of zelfs de voorwaarde $\lim\limits_{n=\infty} . na_n = 0$

niet voldoende is om de convergentie te waarborgen van het product van de convergente reeks $a_1 + a_2 + \ldots$ met een willekeurige andere convergente reeks $b_1 + b_2 + \ldots$ blijkt uit het volgende voorbeeld:

De reeks

$$\frac{1}{2\, log\, 2} - \frac{1}{3\, log\, 3} + \frac{1}{4\, log\, 4} - \ldots$$

is convergent en voldoet aan de voorwaarde $\lim_{n=\infty} . na_n = 0$; het product van deze reeks met de convergente reeks:

$$\frac{1}{log\, log\, 2} - \frac{1}{log\, log\, 3} + \frac{1}{log\, log\, 4} - \ldots$$

is de reeks:

$$\frac{1}{2\, log\, 2} \cdot \frac{1}{log\, log\, 2} - \left[\frac{1}{3\, log\, 3} \cdot \frac{1}{log\, log\, 2} + \frac{1}{2\, log\, 2} \cdot \frac{1}{log\, log\, 3}\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{4\, log\, 4} \cdot \frac{1}{log\, log\, 2} + \frac{1}{3\, log\, 3} \cdot \frac{1}{log\, log\, 3} + \frac{1}{2\, log\, 2} \cdot \frac{1}{log\, log\, 4}\right] - \ldots$$

welke niet convergeert, daar de absolute waarde van de algemeene term u_{n-1} gelijk is aan:

$$\frac{1}{n\, log\, n} \cdot \frac{1}{log\, log\, 2} + \frac{1}{(n-1)\, log\, (n-1)} \cdot \frac{1}{log\, log\, 3} + \ldots + \frac{1}{2\, log\, 2} \cdot \frac{1}{log\, log\, n}$$

hetgeen grooter is dan:

$$\frac{1}{log\, log\, n}\left[\frac{1}{n\, log\, n} + \frac{1}{(n-1)\, log\, (n-1)} + \ldots + \frac{1}{2\, log\, 2}\right] > \frac{log\, log\, (n+1) - log\, log\, 2}{log\, log\, n}$$

zooals gemakkelijk volgt uit: $\frac{1}{p\, log\, p} > \int_p^{p+1} \frac{dx}{x\, log\, x}$.

Op den duur blijft dus u_n grooter dan 1.

Dat uit de voorwaarden $|na_n| < \varkappa$ en $|nb_n| < \varkappa$ niet zonder meer volgt $|nc_n| < \varkappa'$ indien de reeksen Σa_n en Σb_n convergent zijn, blijkt uit het volgende voorbeeld:

De reeks:

$$log\, .\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

is convergent en voldoet aan de voorwaarde $|na_n| < 1$. Het vierkant van deze reeks is:

$$1 - \left(1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, 1\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1\right) - \left(1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1\right) + \ldots$$

of, met behulp van de betrekking: [1])

$$1\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\cdot 1=\frac{2}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{5}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

Dus:

$$n\,|c_n|=n\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n=\infty}.\,|nc_n|=2\,.\lim_{n=\infty}.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

Bewijs van theorema 3.

We duiden den n^{den} term van het product van de reeksen

$$\Sigma a_n^{(i)},\ \Sigma a_n^{(j)},\ \Sigma a_n^{(k)},\ldots$$

aan door $a_n^{(i,j,k,\ldots)}$, en de som van de eerste n termen van dit product door $A_n^{(i,j,k,\ldots)}$. Derhalve geldt:

$$A_n^{(i,j,k,\ldots)}=a_1^{(i,j,k,\ldots)}+a_2^{(i,j,k,\ldots)}+\ldots+a_n^{(i,j,k,\ldots)}$$

Verder definieeren we:

$${}^{(p,q,r,.)}a_n=n\,.\,a_n^{(p,q,r,.)}$$

$${}^{(p,q,r,..)}a_n^{(i,k,l,\ldots)}=$$

$$=a_1^{(p,q,r,\ldots)}a_n^{(i,k,l,\ldots)}+2a_2^{(p,q,r,\ldots)}a_{n-1}^{(i,k,l,\ldots)}+\ldots+na_n^{(p,q,r,\ldots)}a_1^{(i,k,l,\ldots)}$$

$${}^{(p,q,r,.)}A_n={}^{(p,q,r,\ldots)}a_1+{}^{(p,q,r,\ldots)}a_2+\ldots+{}^{(p,q,r,\ldots)}a_n$$

$$=a_1^{(p,q,r,\ldots)}+2a_2^{(p,q,r,\ldots)}+\ldots+na_n^{(p,q,r,\ldots)}$$

$${}^{(p,q,r,..)}A_n^{(i,k,l,..)}={}^{(p,q,r,..)}a_1^{(i,k,l,..)}+{}^{(p,q,r,..)}a_2^{(i,k,l,..)}+\ldots+{}^{(p,q,r,..)}a_n^{(i,k,l,..)}$$

We zullen nu de volgende betrekking bewijzen:

---

[1]) Deze betrekking kan b.v. bewezen worden door de coëfficienten van x^n in de beide leden van de volgende betrekking aan elkaar gelijk te stellen:

$$\int_0^x\frac{2\log(1+x)}{1+x}\,.\,dx=\int_0^x 2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots\right).(1-x+x^2-\ldots)\,dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots\right)^2=[\log(1+x)]^2$$

$$^{(1,2,..k)}A_n = \sum_{i_1..i_k} {}^{(i_1)}A_n^{(i_2,i_3,..i_k)} - (k-1)\,.\,A_n^{(1,2,..k)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daartoe voeren we de volgende machtreeksen in:

$$\varphi_k(x) = \sum_1^\infty a_n^{(k)} x^n$$

$$\varphi_{p,q,r,..}(x) = \varphi_p(x)\,.\,\varphi_q(x)\,.\,\varphi_r(x)\,.\,.\,.\,.$$

Uit de voorgaande definities zijn gemakkelijk de volgende uitspraken af te leiden:

$a_n^{(i_1,i_2,...i_r)}$ is de coëfficient van x^n in $\dfrac{\varphi_{i_1,i_2,..i_r}}{x^{r-1}}$

$^{(i_1,i_2,...i_r)}a_n$ is de coëfficient van x^{n-1} in $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\varphi_{i_1,i_2,..i_r}}{x^{r-1}}$

$^{(i_1,i_2,..i_r)}a_n^{(i_{r+1},i_{r+2},..i_{r+p})}$ is de coëfficient van x^n in:

$$\frac{\varphi_{i_{r+1},i_{r+2},...i_{r+p}}}{x^{p-1}}\,.\,\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{i_1,i_2,...i_r}}{x^{r-1}}$$

Nu geldt:

$$\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{1,2,...k}}{x^{k-1}} = \frac{1}{x^{k-1}}\,.\,\frac{d}{dx}\varphi_{1,2,...k} - (k-1)\,.\,\frac{\varphi_{1,2,...k}}{x^k}$$

of, daar $\varphi_{1,2,...k} = \varphi_1\,.\,\varphi_2 ... \varphi_k$ en dus

$$\frac{d}{dx}\varphi_{1,2,...k} = \sum_{i_1...i_k} \varphi_{i_2,i_3,..i_k}\,.\,\frac{d\varphi_{i_1}}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\varphi_{1,2,...k}}{x^{k-1}} = \frac{1}{x}\,.\,\sum \frac{\varphi_{i_2,i_3,...i_k}}{x^{k-2}}\,.\,\frac{d\varphi_{i_1}}{dx} - \frac{k-1}{x}\,.\,\frac{\varphi_{1,2,...k}}{x^{k-1}}.$$

Door de coëfficienten van x^{m-1} aan weerszijden gelijk te stellen, krijgen we:

$$^{(1,2,...k)}a_m = \sum_{(i)} {}^{(i_1)}a_m^{(i_2,i_3,...i_k)} - (k-1)\,.\,a_m^{(1,2,...k)}$$

Door achtereenvolgens $m = 1, 2, ...\, n$ te substitueeren en de aldus verkregen gelijkheden op te tellen, krijgen we:

$$^{(1,2,...k)}A_n = \sum_{(i)} {}^{(i_1)}A_n^{(i_2,i_3,...i_k)} - (k-1)\,.\,A_n^{(1,2,...k)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Het bewijs van theorema 3 berust op de volgende stelling: *Indien Σu_n sommeerbaar is, dan is Σu_n convergent, mits:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + ... + nu_n) = 0\,.$$

Deze volgt uit TAUBER's theorema door op te merken dat indien Σa_n sommeerbaar is, de functie $\Sigma a_n . x^n$ een limiet heeft voor $x \to 1$. (Zie het artikel „Een Generalisatie van de stelling van TAUBER betreffende machtreeksen" (Verslagen der Kon. Ak. v. Wetenschappen, Deel XXXII. p. 297).

Onderstel nu, dat de reeksen $\Sigma a_n^{(1)}, \Sigma a_n^{(2)}, \ldots \Sigma a_n^{(k)}$ convergeeren, en dat voor iedere n en iedere i voldaan is aan:

$$|na_n^{(i)}| < \varkappa.$$

Daar de productreeks zeker sommeerbaar is van de orde k (zelfs al van lager orde als we letten op theorema 2), hebben we slechts te bewijzen:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{n} [a_1^{(1,2,\ldots k)} + 2a_2^{(1,2,\ldots k)} + \ldots + na_n^{(1,2,\ldots k)}] = 0$$

of:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{n} . {}^{(1,2,\ldots k)}A_n = 0$$

Uit (1) volgt nu dat het voldoende is de beide volgende betrekkingen te bewijzen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(1,2,\ldots k)}}{n} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{n} {}^{(i_1)}A_n^{(i_2, i_3, \ldots i_k)} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Bewijs van (2).

Met behulp van inductie toonen we aan, dat voor elke n geldt:

$$\left|A_n^{(1,2,\ldots k)}\right| < \varkappa^k [\log (n+1) + C]^k$$

waarin C de constante van EULER is. Immers we hebben:

$$\left|A_n^{(1)}\right| = \left| a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} \right| \leq \varkappa \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < \varkappa[\log (n+1) + C]$$

en uit

$$\left|A_n^{(1,2,\ldots i)}\right| < \varkappa^i [\log (n+1) + C]^i$$

leiden we af:

$$\begin{aligned} \left|A_n^{(1,2,\ldots i,i+1)}\right| &= \left| a_1^{(i+1)} A_n^{(1,2,\ldots i)} + a_2^{(i+1)} . A_{n-1}^{(1,2,\ldots i)} + \ldots + a_n^{(i+1)} . A_1^{(1,2,\ldots i)} \right| \\ &< \varkappa^i [\log (n+1) + C]^i [|a_1^{(i+1)}| + |a_2^{(i+1)}| + \ldots |a_n^{(i+1)}|] \\ &< \varkappa^{i+1} [\log (n+1) + C]^i . \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right] \\ &< \varkappa^{i+1} [\log (n+1) + C]^{i+1} \end{aligned}$$

Daar $\lim_{n=\infty} . \frac{[\log(n+1) + C]^k}{n} = 0$, volgt hieruit dat:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{A_n^{(1,3,\ldots k)}}{n} = 0$$

Bewijs van (3).

We bewijzen dat aan de betrekking (3) voldaan is voor $k = p$, indien het theorema 3 juist is voor $k = p-1$. Alsdan volgt uit het tot nog toe bewezene, dat als het theorema juist is voor $k = p-1$, het eveneens juist is voor $k = p$. Daar HARDY de geldigheid voor $k = 2$ bewezen heeft, is hiermee het theorema volledig bewezen.

Uit de onderstelling, dat theorema 3 geldig is voor $k = p-1$, volgt dat $\lim_{n=\infty} . A_n^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})} = s_{i_1} . s_{i_2} \ldots s_{i_{p-1}} = s$, indien de reeksen $\Sigma a_n^{(i_1)}, \Sigma a_n^{(i_2)}, \ldots \Sigma a_n^{(i_{p-1})}$ respectievelijk convergeeren tot $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots s_{i_{p-1}}$.

Immers bij definitie is $A_n^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})}$ de som van de eerste n termen van de productreeks:

$$[\Sigma a_n^{(i_1)}] . [\Sigma a_n^{(i_2)}] \ldots [\Sigma a_n^{(i_{p-1})}]$$

Nu geldt:

$$^{(i_p)} a_m^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})} = a_1^{(i_p)} . a_m^{(i_1, \ldots i_{p-1})} + 2a_2^{(i_p)} . a_{m-1}^{(i_1, \ldots i_{p-1})} + \ldots + m a_m^{(i_p)} . a_1^{(i_1, \ldots i_{p-1})}$$

Door $m = 1, 2, \ldots n$ te substitueeren en op te tellen, komt er:

$$^{(i_p)} A_n^{(i_1, \ldots i_{p-1})} = a_1^{(i_p)} . A_n^{(i_1, \ldots i_{p-1})} + 2a_2^{(i_p)} . A_{n-1}^{(i_1, \ldots i_{p-1})} + \ldots + n a_n^{(i_p)} . A_1^{(i_1, \ldots i_{p-1})}$$

Stel $A_r^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})} = s + h_r$, dan is $\lim_{n=\infty} . h_n = 0$, en:

$$^{(i_p)} A_n^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})} = s [a_1^{(i_p)} + 2a_2^{(i_p)} + \ldots + n a_n^{(i_p)}] +$$

$$+ [a_1^{(i_p)} h_n + 2a_2^{(i_p)} h_{n-1} + \ldots + n a_n^{(i_p)} h_1]$$

$$= P + Q.$$

Daar de reeks $a_1^{(i_p)} + a_2^{(i_p)} + \ldots$ convergeert, volgt uit het theorema van TAUBER dat:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1^{(i_p)} + 2a_2^{(i_p)} + \ldots + n a_n^{(i_p)}}{n} = 0$$

dus $\lim_{n=\infty} . \frac{P}{n} = 0$.

Substitueeren we de ongelijkheid $n|a_n^{(i_p)}| < \varkappa$ in Q, dan komt er:

$$|Q| < \varkappa \cdot (|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_n|)$$

Daar $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$, geldt ook $\lim\limits_{n=\infty} \frac{|h_1| + \ldots + |h_n|}{n} = 0$, derhalve $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Q}{n} = 0$.

We hebben dus:

$$\lim_{n=\infty} \frac{{}^{(i_p)}A_n^{(i_1, i_2, \ldots i_{p-1})}}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{P}{n} + \lim_{n=\infty} \frac{Q}{n} = 0.$$

§ 4.

Definitie [1]. *Indien de uitdrukking* $\frac{S_n^{(p)}}{A_n^{(p)}}$ *tot een limiet nadert als* n *en* p *beide onbepaald toenemen, doch zoodanig dat* $\lim \frac{p}{n} = 0$, *dan zeggen we dat de reeks* $a_1 + a_2 + \ldots$ *sommeerbaar is van oneindig hooge orde.*

Theorema 5. *Als een reeks sommeerbaar is van een zekere eindige orde, dan is zij ook sommeerbaar van oneindig hooge orde, en wel vinden we in beide gevallen dezelfde som.*

Bewijs. Zij $\lim\limits_{n=\infty} \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} = s$. Stel $\frac{S_r^{(k)}}{A_r^{(k)}} = s + h_r$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$.

$$S_n^{(p)} = S_1^{(k)} A_n^{(p-k)} + S_2^{(k)} A_{n-1}^{(p-k)} + \ldots + S_n^{(k)} A_1^{(p-k)}$$

$$= s[A_1^{(k)} A_n^{(p-k)} + A_2^{(k)} A_{n-1}^{(p-k)} + \ldots + A_n^{(k)} A_1^{(p-k)}] +$$

$$+ [h_1 A_1^{(k)} A_n^{(p-k)} + h_2 A_2^{(k)} A_{n-1}^{(p-k)} + \ldots + h_n A_n^{(k)} A_1^{(p-k)}]$$

$$= s \,.\, A_n^{(p)} + R\,.$$

Voor iedere r tusschen 1 en n geldt nu:

$$R = [h_1 A_1^{(k)} A_n^{(p-k)} + \ldots + h_r A_r^{(k)} A_{n-r+1}^{(p-k)}] + [h_{r+1} A_{r+1}^{(k)} A_{n-r}^{(p-k)} + \ldots + h_n A_n^{(k)} A_1^{(p-k)}]$$

$$= \qquad P \qquad + \qquad Q$$

[1]) De notatie is hier weer dezelfde als in § 1.

Bij elk positief getal ε is nu r te berekenen, zoodat $|h_{r+i}| < \varepsilon$; zij verder $|h_i| < h$ voor iedere i, dan geldt klaarblijkelijk voor $n > r$:

$$|P| < h \,.\, A_n^{(p-k)}\, A_r^{(k+1)} \qquad ; \qquad |Q| < \varepsilon\, A_n^{(p)}$$

$$Lim \,.\, \frac{|P|}{A_n^{(p)}} = 0, \text{ daar:}$$

$$\frac{A_n^{(p-k)}}{A_n^{(p)}} = \frac{\Gamma(n+p-k-1)}{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(p-k)} \cdot \frac{\Gamma(n)\,.\,\Gamma(p)}{\Gamma(n+p-1)} = \frac{\Gamma(n+p-k-1)}{\Gamma(n+p-1)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-k)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+p-k-1)}{(n+p-2)\,(n+p-3)\ldots(n+p-k-1)\,.\,\Gamma(n+p-k-1)} \,.$$

$$. \frac{(p-1)\,(p-2)\ldots(p-k)\quad \Gamma(p-k)}{\Gamma(p-k)}$$

$$= \frac{p-1}{(n-1)+(p-1)} \cdot \frac{p-2}{(n-1)+(p-2)} \cdots \frac{p-k}{(n-1)+(p-k)}$$

$$< \frac{p}{n-1+p-1} < \frac{p}{n} \text{ en } lim \,.\, \frac{p}{n} = 0.$$

$\frac{|Q|}{A_n^{(p)}} < \varepsilon$. Daar ε willekeurig positief is, volgt hieruit:

$$lim \,.\, \frac{Q}{A_n^{(p)}} = 0. \text{ Derhalve:}$$

$$Lim \,.\, \frac{S_n^{(p)}}{A_n^{(p)}} = s + lim \,.\, \frac{R}{A_n^{(p)}} = s + lim \,.\, \frac{P}{A_n^{(p)}} + lim \,.\, \frac{Q}{A_n^{(p)}} = s.$$

Opmerking.

Betreffende de voor de hand liggende vraag of een reeks sommeerbaar kan zijn van oneindig hooge orde zonder sommeerbaar te zijn van eenige eindige orde, voegen we de volgende opmerking toe:

Het is gemakkelijk in te zien, dat indien de termen van een reeks reëel zijn en de middelwaarden van de orde p schommelen tusschen de grenzen m_p en M_p, de volgende betrekking vervuld is:

$$m_p \leq m_{p+1} \leq M_{p+1} \leq M_p.$$

Onderstel nu dat het mogelijk is om een reeks te construeeren met de eigenschappen:

$$m_p \neq m_{p+1}\,;\; M_p \neq M_{p+1}\,;\; \lim_{p=\infty} .\, m_p = \lim_{p=\infty} .\, M_p = \mu\,;$$

dan is het niet moeilijk te bewijzen dat deze reeks *wel* sommeerbaar zou zijn van oneindig hooge orde, maar *niet* van eenige eindige orde. *Nu kan echter een reeks met deze eigenschappen niet bestaan,* hetgeen als volgt blijkt:

Krachtens een stelling van W. GROSS [1]) liggen de waarden van

$$\varphi_0(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

voor waarden van x die voldoende dicht bij de eenheid gelegen zijn tusschen m_p en M_p in. Derhalve volgt uit $lim.\, m_p = lim.\, M_p = \mu$, dat $\lim\limits_{x \to 1} \varphi_0(x) = \mu$. Daar echter de middelwaarden van Σa_n begrensd zijn, volgt hieruit met behulp van een theorema van LITTLEWOOD [2]), dat Σa_n *wel* sommeerbaar is van eindige orde.

Een reeks die sommeerbaar van oneindig hooge orde zou zijn, zonder sommeerbaar van eenige eindige orde te zijn, zou dus b.v. middelwaarden moeten bezitten, die over een oneindig interval schommelden.

Ik ben er niet in geslaagd zoodanige reeks te construeeren, en evenmin heb ik een bewijs kunnen vinden dat zoodanige reeks niet bestaan kan.

---

[1]) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien Abt. II^a 124 p. 1017—1037; 1915.

[2]) Zie o.a. het artikel „Over machtreeksen van den vorm $x^{p_0} - x^{p_1} + x^{p_2} - \ldots$" Verslagen Kon. Akad. v. Wetensch. Deel XXXII p. 473.

Physiologie. — H. J. HAMBURGER. *„Een nieuwe vorm van samenwerking tusschen organen"*.

Gelijk men weet, zijn tot nu toe twee vormen van samenwerking tusschen organen bekend. Bij de oudst bekende speelt het centrale zenuwstelsel een belangrijke rol. Wanneer men iemand onverwacht in den vinger prikt, trekt hij snel de hand terug; er heeft een samenwerking plaats gehad tusschen de huid van den vinger en de armspieren, en wel door bemiddeling van het ruggemerg. Men heeft hier te doen met een reflexwerking.

Voor eenige jaren heeft men een tweeden vorm van samenwerking tusschen organen leeren kennen; daar gaat het niet door bemiddeling van zenuwen, maar door bemiddeling van den bloedstroom. De glandula thyroidea bijv. scheidt stoffen af, die door de circulatie door het lichaam gevoerd worden en invloed uitoefenen op stofwisseling en groei van ver verwijderde organen.

Dat zenuwen hier geen essentieele rol spelen, blijkt uit het feit, dat de glandula thyroïdea, ook wanneer zij van haar zenuwen gescheiden en naar een andere plaats getransplanteerd is, toch die werking uitoefent.

Onderzoekingen, die in de allerlaatste jaren in ons laboratorium zijn uitgevoerd, hebben *een nieuwen derden vorm van samenwerking tusschen organen aan het licht gebracht* [1]). Het uitgangspunt der bewuste onderzoekingen, verricht door Dr. R. BRINKMAN, Mej. E. VAN DAM en Dr. L. JENDRASSIK, vormt een waarneming van O. LOEWI. Deze was in hoofdzaak de volgende: De n. vagus van een geïsoleerd met zoutoplossing doorstroomd kikvorschhart werd eenigen tijd zeer sterk geprikkeld, tot het stilstond. Dan werd de inhoud verwijderd en in een ander eveneens geïsoleerd kikvorschhart overgebracht. De bekende pharmacoloog uit Graz zag dan, dat het tweede hart dikwijls in zijn beweging verlangzaamd werd. Proeven met den n. sympathicus gaven dergelijke resultaten.

Het doel was nu in de eerste plaats, om de door LOEWI verkregen

[1]) Vergelijk mijn voordracht bij de opening van de Biological Buildings of Mc. Gill University in Montreal (Canada) in September 1922. Zie ook: H. J. HAMBURGER. The increasing significance of permeability problems for the biological and medical sciences; the Charles E. Dohme Memorial Lectures. First Course, 10, 11, 12 October 1922. Gehouden in Baltimore. Afgedrukt in: Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, June 1923.

resultaten onder meer physiologische voorwaarden te controleeren.

In de Vena cava van een kikvorsch A. wordt een glazen canule gebracht en op deze wijze wordt een doelmatige zoutoplossing door het hart gevoerd. Een ander glazen buisje wordt in de aorta gebracht. Men ziet dan, dat de zoutoplossing het hart rhythmisch verlaat. Geeft men nu deze vloeistof gelegenheid zich uit te storten in de Vena cava van een tweeden kikvorsch B, dan stroomt de vloeistof in de kamer van het tweede hart B. en kan weer in de Vena cava van kikvorsch A. terugkeeren. Zoo krijgt men een circulatie van zoutoplossing door de beide kikvorschharten. Deze methode van „Crossing circulation" werd voor den eersten keer door J. C. HEMMETER gebruikt.

Prikkelt men nu den n. sympathicus van kikvorsch A. dan ontstaat er een versnelling van den hartslag van dezen kikvorsch en na enkele weinige seconden, vertoont ook het hart van kikvorsch B., *waarvan de sympathicus niet werd geprikkeld*, toch een sneller tempo. Waardoor kan de versnelling van het tweede hart verklaard worden? Slechts hierdoor, dat uit hart A, natuurlijk ten gevolge van permeabiliteit, stoffen vrijkomen, die in het tweede hart hetzelfde effect veroorzaken, als een direkte zenuwprikkeling zou doen. Op den aard van deze stoffen komen wij dadelijk terug.

Hoe het mogelijk is, dat stoffen, die door activiteit van een orgaan, hier dat van kikvorsch A, ontstaan, het tweede dier B. tot activiteit kunnen prikkelen, daarover zullen wij hier niet spreken. Slechts zij er de aandacht op gevestigd, dat het hier een dergelijk geval betreft als bij de speekselsecretie. Wanneer men, zooals J. DEMOOR voor eenige jaren aantoonde, het bloedvaatstelsel van een speekselklier met een zoutoplossing doorstroomt, dan scheidt deze klier geen speeksel af. Maar dit geschiedt wel, wanneer men bij deze zoutoplossing een weinig speeksel voegt. Het product, dat door activiteit van de speekselklier ontstaat, is blijkbaar een prikkel tot verdere speekselafscheiding. De stoffen, die bij de omzetting van eiwit in de maag ontstaan, prikkelen op hun beurt weer de maagsecretie. Zoo bevreemdt het ons niet, dat de stoffen, die door sympathicusprikkeling uit het eerste hart vrijkomen, een prikkelenden invloed op het tweede hart uitoefenen kunnen.

Dr. R. BRINKMAN en Mej. VAN DAM hebben nu nog een en ander experiment uitgevoerd, dat nog treffender en nog meer onwederlegbaar bewijst, dat de overbrenging van prikkels door vloeistoffen, dus langs humoralen weg plaats heeft [1]). Ik zeg „nog meer onweder-

[1]) R. BRINKMAN und Frl. E. v. DAM, Pflüger's Archiv. Bd. 196, S. 166, 1922.

legbaar", want men kan bij het zooeven genoemde experiment nog de opmerking maken, dat bij de beweging van het tweede hart hydrodynamische invloeden een rol hebben gespeeld.

Derhalve werd als tweede orgaan niet het hart van kikvorsch B. genomen, maar de *maag* van dit dier.

Zooals bekend is, heeft prikkeling van den n. sympathicus niet slechts een versnelling van de hartbeweging, maar ook verlangzaming, ja zelfs opheffing van de spontane maagbewegingen ten gevolge. Nu werd de vraag gesteld: zal men, wanneer de vloeistof uit het hart van kikvorsch A in de Arteria gastrica van kikvorsch B gebracht wordt, verlangzaming van de maagbewegingen van den laatsten kikvorsch waarnemen? Dat was, zooals de proeven van Dr. BRINKMAN en Juffr. VAN DAM leerden, inderdaad het geval. *Er worden m. a. w. bij sympathicusprikkeling van het eerste hart stoffen vrijgemaakt, die op de maagbewegingen van den tweeden kikvorsch een remmenden invloed uitoefenen.*

Analoge verschijnselen als bij prikkeling van den n. sympathicus werden bij prikkeling van den n. vagus waargenomen.

Zooals bekend is oefent deze zenuw invloed uit zoowel op de maag- als op de hartbewegingen, maar beide in tegengestelde richting. Prikkelt men den n. vagus, dan gaat het hart, in tegenstelling tot hetgeen men bij prikkeling van den n. sympathicus ziet, langzamer kloppen en de maag trekt zich krachtiger samen. Derhalve werd de proef met „Crossing Circulation" van het hart van kikvorsch A. met de maag van kikvorsch B. herhaald, m. a. w. de zoutoplossing, die uit het hart van kikvorsch A. komt, wordt door het bloedvaatstelsel van de maag van kikvorsch B. gevoerd. Prikkelt men nu dezen n. vagus van kikvorsch A., dan ziet men het hart langzamer kloppen en de maag van kikvorsch B. toont typische contracties. Hier is geen andere gevolgtrekking mogelijk, dan dat bij vagusprikkeling van kikvorsch A. uit het hart stoffen vrijkomen, die in staat zijn de maag van kikvorsch B. tot contractie te brengen, juist zooals dit het geval is bij electrische vagusprikkeling.

Wij hebben hier dus te doen met twee soorten van stoffen, een, die bij prikkeling van den n. vagus, en een, die bij prikkeling van den n. sympathicus vrijkomt. Er zijn dus vagus- en sympathicusstoffen.

Dat men inderdaad met zulke stoffen te doen heeft, kon direkt worden aangetoond door het feit, dat de zoutoplossing die het hart verlaat nadat de vagus geprikkeld is, een of meer stoffen bevat, die de oppervlaktespanning van de oorspronkelijke zoutoplossing verlagen, stoffen dus, die capillair-actief zijn. Daarentegen vindt men,

dat de oppervlaktespanning van de zoutoplossing. die uit het hart komt, nadat de sympathicus geprikkeld is, verhoogd is[1]). Verder bleek, dat de vagusstoffen en de sympathicusstoffen elkander in capillair-actieven zin neutraliseeren, m. a. w. elkanders invloed op de oppervlaktespanning opheffen.

Het zoude te ver voeren, hier op bijzonderheden in te gaan. Zooveel is zeker, dat bij prikkeling van den vagus vagusstoffen en bij prikkeling van den sympathicus sympathicussstoffen ontstaan. Welke stoffen dit zijn is nog niet vastgesteld; misschien heeft men, tenminste bij de vagusprikkeling, te doen met cholineverbindingen, die met het kalium samenwerken.

Wat de methode betreft om van zeer kleine hoeveelheden vloeistof de oppervlaktespanning te bepalen, verwijzen wij naar twee opstellen, die verleden jaar verschenen zijn[2]). Daar zal men zien, dat hiertoe een zeer eenvoudige apparatuur voldoende is. Door middel van een in de kliniek welbekende torsie balans wordt gemeten, welke kracht er noodig is om een kleinen platinaring van de oppervlakte der vloeistof, die men onderzoekt, af te trekken.

De onderzoekingen, waarvan hier geen sprake was, geven aanleiding tot vele vragen. De clinicus zal onmiddellijk denken aan het verband van de resultaten met de verschijnselen van vagotonie en sympathicatonie en zal zich ook de vraag stellen, onder welke voorwaarden een overmaat van vagus- en sympathicusstoffen in de circulatie komt en haar overmaat op verschillende organen doet gelden, en eveneens, of er geen middel bestaat om die onschadelijk te maken.

De physioloog zal zich afvragen, of het latente stadium en de nawerking bij vagusprikkeling niet met den tijdsduur van het vrijkomen van vagusstoffen samenhangt. Ook zal hij willen weten of de vagusstoffen voor een en hetzelfde dier specifiek zijn. Wat hij en de klinikus verder zullen wenschen te weten is, of de verschijnselen *ook bij de warmbloedige dieren* zijn waar te nemen. Met onderzoekingen hierover heeft zich in den allerlaatsten tijd Dr. L. JENDRASSIK beziggehouden. Wat reeds nu daarbij gebleken is, laat zich als volgt samenvatten. Wanneer het overlevende konijnenhart met een doelmatige zoutoplossing doorstroomd wordt, dan is bij prikkeling van den n. vagus de uitstroomende vloeistof in staat, de samentrekking van een uitgesneden stuk darm krachtig te versnellen. Op

[1]) Men vergelijke een nog te verschijnen uitvoerig artikel van Dr. BRINKMAN en Mej. VAN DAM, Journal of Physiology.

[2]) R. BRINKMAN und Frl. E. VAN DAM. Münch. Med. Wochenschr. 1921. S. 1550.
R. BRINKMAN, Arch. Néerl. d. Physiol. VII 1922, p. 258.
R. BRINKMAN und Frl. E. VAN DAM VIII, 1923, p. 29.

deze onderzoekingen zal ik op deze plaats niet ingaan. Dr. JENDRASSIK zal ze binnenkort in de Biochemische Zeitschrift beschrijven. Hier is het voldoende er op te wijzen, dat dus niet slechts bij koudbloedige, maar ook bij warmbloedige dieren bij vagusprikkeling van het hart stoffen geproduceerd worden, die op dezelfde wijze op andere organen invloed uitoefenen, alsof daarvan de vagus electrisch werd geprikkeld. Hier was de darm het meest geschikte object voor de onderzoekingen.

Verder zij hier nog gewezen op drie merkwaardige bevindingen. In de eerste plaats, dat wanneer de boezem van een konijn, nadat deze in stukjes was gesneden, met zoutoplossing werd geëxtraheerd, ook het extract de samentrekking van het geïsoleerde stuk darm aanzet. Deze proef ging van de redeneering uit, dat waarschijnlijk nog vagusstoffen voorhanden waren, die gedurende het leven in den boezem waren gevormd. In de tweede plaats bleek, dat wanneer men atropine, die zooals bekend is den invloed van vagusprikkeling remt, bij het genoemde extract voegde, de invloed daarvan op de darmbeweging uitbleef. Ten derde werd gevonden, dat extract van de kamerspier geen vagus- maar een sympathicuseffect op de darmbeweging uitoefent.

De hier besproken proeven met warmbloedige dieren werden alle in een kamer van lichaamstemperatuur uitgevoerd.

Wanneer wij de hoofdzaken van het bovenbeschrevene samenvatten blijkt dus, dat er naast de twee bekende vormen van samenwerking tusschen organen nog *een derde bestaat*. Bij de oudst bekende werken organen samen door bemiddeling van het centrale zenuwstelsel; de reactie pleegt zeer snel te verloopen. Bij de tweede speelt het centrale zenuwstelsel geen wezenlijke rol, ook het periphere niet; de bemiddeling van de samenwerking heeft plaats door den bloedstroom. Deze transporteert stoffen, hormonen, die in de organen ontstaan zijn zonder medewerking van zenuwen. Bij den derden nieuwen vorm worden *door zenuwprikkeling* stoffen in het orgaan vrijgemaakt en door den bloedstroom naar andere organen getransporteerd. Bij den tweeden vorm heeft de uitwerking op de organen langzaam plaats; bij den derden, de humorale overbrenging van zenuwprikkels, is het effect noch snel, noch langzaam, de snelheid ligt tusschenbeide.

Het is echter zeer waarschijnlijk dat tenslotte de drie vormen in hun wezen tot één vorm kunnen worden teruggebracht. Ik zal hierop niet nader ingaan. Ik heb reeds in een van mijn Herter Lectures in New-York in October 1922 daarover gesproken.

Het kan nog van belang zijn er op te wijzen, dat de vorming van vagus- en sympathicusstoffen niet slechts gepostuleerd is, maar *dat zij ook langs physisch-chemischen weg direkt is aangetoond.*

Men kan er wel zeker van zijn, dat een dergelijke samenwerking tusschen organen, zooals boven beschreven is voor hart en maag en voor hart en darm, ook voor andere organen geldigheid moet bezitten. Hier opent zich een groot veld van onderzoekingen: wij staan nog slechts aan het begin.

Physiologisch Laboratorium der Rijks-Universiteit te Groningen.

Mei, 1923.

Plantkunde. — D. S. FERNANDES: *„Een methode om de O_2-opname en CO_2-afscheiding bij de ademhaling gelijktijdig te bestudeeren."*

(Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL).

I.

Alvorens in bijzonderheden te treden, zal aan de hand van een eenvoudig schema (fig. 1), kort worden aangegeven, hoe het toestel werkt en waarop gelet dient te worden.

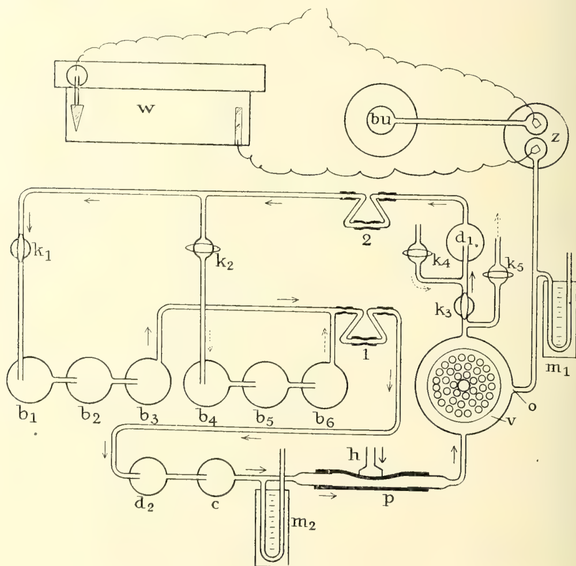


Fig. 1.

Van uit *p*, een gummi-zuigperspompje, wordt de lucht gepompt in de richting der pijltjes. De lucht treedt van boven in het ademhalingsvat *v*, verlaat dit van onderen en wordt in het waschfleschje

d_1, dat geconcentreerd zwavelzuur bevat, gedroogd. Van uit d_1 bereikt ze door het glazen kraantje k_1, (k_2 is dan gesloten) de absorptiebuizen b_1, b_2 en b_3, waarin zich barytwater bevindt. Op den terugweg gaat de lucht door het waschfleschje d_2, dat evenals d_1 zwavelzuur bevat en het contrôle-barytbuisje c, waarna ze weer in p komt en de kringloop opnieuw begint.

Voor een volgende waarneming wordt k_1 gesloten en k_2 opengezet, waardoor de CO_2-absorptie plaats vindt in de buizen b_4, b_5 en b_6. De zes absorptiebuizen zijn met beugeltjes aan een koperen raam bevestigd. Teneinde meer dan twee waarnemingen te kunnen doen, zonder een te groot aantal buizen in den als thermostaat dienenden glazen bak met water te brengen, moet men twee van zulke raampjes ter beschikking hebben. Heeft het eene dienst gedaan, dan worden de verbindingsstukken 1 en 2 omhoog gedraaid, waardoor ze boven water komen en losgemaakt kunnen worden. Het raampje met de 6 barytbuizen gaat in zijn geheel uit den bak en het andere (waarvan inmiddels de buizen schoongemaakt en ieder met 100 cM. barytwater gevuld zijn) wordt ingezet. Dit verwisselen der raampjes is in minder dan één minuut geschied, maar alvorens verdere waarnemingen met de pas ingebrachte barytbuizen te kunnen doen, moet er (al naar de temperatuur in den thermostaat) 10—15 min. gewacht worden, opdat de buizen en hun inhoud de temperatuur van den thermostaat aannemen. Het toestel werkt gedurende dezen tijd ventileerend en wel op de volgende wijze: kraan k_3 wordt gesloten, terwijl k_4 en k_5 opengezet worden. Begint nu het pompje te werken, dan kan de lucht, die uit het vat komt, niet anders dan door k_5 naar buiten, terwijl bij k_4 lucht wordt ingezogen, welke vooraf door waschfleschjes met sterke KOH-oplossingen (in de fig. niet geteekend) CO_2-vrij is gemaakt. De mogelijkheid om het toestel ook ventileerend te kunnen laten werken, biedt nog een ander voordeel aan. Wanneer nl. bij proeven van langeren duur 's avonds de waarnemingen gestaakt worden, kan het apparaat gedurende den geheelen nacht ventileerend doorwerken. De objecten zijn dan niet aan temperatuursschommelingen onderhevig en den volgenden morgen is de proef dadelijk voort te zetten, door k_3 te openen en k_4 en k_5 te sluiten. Bij proeven, die 10—12 uur moeten duren, geeft het heel wat tijdsbesparing, indien de plantjes den vorigen avond in het apparaat gebracht zijn, zoodat 's morgens vroeg de waarnemingen direct kunnen beginnen. Na de ventilatie van den nacht is al het CO_2 uit het toestel verdreven, hetgeen door blinde proeven aan te toonen is.

Is het toestel van de buitenlucht afgesloten en begint dan het

pompje te werken, zoo ontstaat er dadelijk een overdruk op het vat, terwijl de manometer m_2 een druksvermindering aangeeft. Zet men nu k_5 open, dan wordt de in het vat geperste lucht uitgeblazen. Wordt hierna dit kraantje langzaam gesloten, dat blijft verder de druk in het vat $= 1$. In den manometer m_1 staat dan de vloeistof in beide beenen even hoog, terwijl m_2 een grooteren negatieven druk aanwijst dan te voren. Het verbroken evenwicht, dat door de werking van het zuigperspompje in het gesloten stelsel ontstaat, wordt blijkbaar door het openen en weer sluiten van k_5 zoo verschoven, dat in het ademhalingsvat (en dus op de plantjes) geen overdruk kan ontstaan. Zoodra door de ademhaling O_2 uit het gesloten stelsel verdwijnt, zal m_1 dit dadelijk aantoonen. Wordt er echter tegelijk zooveel O_2 toegevoegd als er verdwijnt, dan zal m_1 op het nulpunt blijven en behoudt men in het vat den druk van de buitenlucht.

Bij *O* treedt de zuurstof in het vat, die in Z electrolytisch gevormd wordt. Met behulp van den weerstand *w* is de O_2-ontwikkeling van een minimum tot een bepaald maximum op te voeren. De intensiteit van het electrolytisch proces is steeds zoo te regelen, dat de O_2-productie gelijken tred houdt met de O_2-consumptie.

Dit evenwicht is, door den weerstand te vergrooten of te verkleinen, spoedig gevonden en de manometer m_1, toont verder aan, of deze toestand ook behouden blijft. Het kan gebeuren, (b.v. bij stijgen of dalen van de ademhalingsintensiteit), dat er een oogenblik iets meer of minder O_2 geleverd wordt aan het toestel. De stand van den manometer m_1, die reeds een te veel of te weinig van 0.1 cM. duidelijk aantoont, is dan dadelijk met behulp van den weerstand te herstellen, zoodat onregelmatigheden in de O_2-voorziening, meer dan 0.1 ccM. bedragende, niet behoeven voor te komen.

De bij de electrolyse in *Z* gelijktijdig gevormde waterstof wordt in de buret *bu* opgevangen. Na aangebrachte correcties (op barometerstand, temperatuur, waterdampspanning en druk van de waterzuil in de buret), geeft de opgevangen hoeveelheid waterstof, door 2 gedeeld, het volumen O_2 aan, dat gedurende de waarneming in het toestel is gebracht.

De manometer m_1 bewijst nog eenige andere diensten. Wanneer als vloeistof een oplossing van kaliumjodide (met wat oplosbaar zetmeel) gebruikt wordt, is m_1 een gevoelig contrôlemiddel op het ontstaan van sporen ozon. Bij aanwezigheid van dit gas ontwikkelen zich b.v. kiemplantjes van Pisum sativum niet normaal, zoodat het gewenscht is, ozon uit het ademhalingsapparaat te weren.

Tenslotte heeft men in den manometer m_1 een geschikt middel

om na te gaan of de ingestelde temperatuur zoowel door het geheele toestel als door de objecten volkomen aangenomen is. Begint men de waarnemingen vóórdat het geheel op de gewenschte temperatuur is gekomen, dan zal in m_1 de vloeistof dadelijk in het open been stijgen, hetgeen beteekent, dat er nog uitzetting plaats vindt, terwijl door de ademhaling (O_2-opname) direct volumenvermindering moest optreden. Voor de bepaling van den tijdsduur van voorverwarmen is m_1 dus van practische beteekenis.

De uit het vat medegevoerde waterdamp wordt in d_1 gebonden, zoodat in de barytbuizen droge lucht komt. De waterdamp uit de loog medegenomen wordt in d_2 geabsorbeerd. Door de volumenvermeerdering in d_2 te meten kan gevonden worden, hoeveel water uit de loog verdwijnt en is een correctie van den vastgestelden titer aan te brengen. Deze verdamping uit de barytbuizen is heel gering en bedroeg bij proeven, die 3 dagen duurden ± 2 ccM., zoodat zonder bezwaar de correctie achterwege kan blijven.

De manometer m_2 is met kwik gevuld en dient om den druk aan te geven, dien het zuigperspompje heeft te overwinnen, noodig om de lucht door de verschillende vloeistoffen heen te drijven. Door een droppeltje paraffineolie op het kwik in het gesloten been, wordt het ontstaan van schadelijke kwikdampen voorkomen.

Op het gummi-pompje p tikt een vlakke hamer h, die door een electromotor (in de fig. niet geteekend) in vertikale beweging wordt gebracht. Deze hamer is hooger of lager in te stellen, waardoor de pompslag en, als gevolg van dezen, de grootte der bellen, te regelen is. De snelheid van den motor is met behulp van een weerstand te vergrooten of te verkleinen, waarmede een reguleeren van het aantal bellen mogelijk is. Grootte en aantal der bellen zijn natuurlijk van belang voor een goede CO_2-absorptie.

Voor een gelijkmatige verspreiding der binnenkomende lucht in het vat, worden de ebonieten plaatjes, waarop de plantjes liggen, door een as in een langzaam draaiende beweging gebracht. Ophooping van CO_2 in het vat, (waarover later) wordt hiermede buitengesloten.

Door de zuiging van de lucht in en uit het vat, maakt de vloeistof in m_1 een op- en neergaande beweging, die niet te voorkomen is. Bij een korten en kleinen pompslag, is deze beweging zóó gering te houden, dat ze niet hinderlijk is. Men kan trouwens elk oogenblik den motor stop zetten en zich ervan overtuigen of de manometer werkelijk op het nulpunt staat.

Het geheele apparaat is tegen den binnenwand van een koperen raamwerk vastgezet en past juist in een glazen bak (inhoud ± 45 L.), die als waterthermostaat dient. Met electrische verwarming is het

mogelijk het water tot op 0.03° C constant te houden. De temperatuursschommelingen in het apparaat zelf zijn nog geringer dan die in den thermostaat, zoodat correcties hierop betrekking hebbende, achterwege kunnen blijven.

Bevindt het toestel zich onder water in den thermostaat, dan kan makkelijk onderzocht worden of het geheel goed luchtdicht is. Men pompt hiertoe door k_4 lucht in het apparaat en gaat na of er ergens ook bellen uit het water opstijgen. Als de verbindingen met vacuumslang en glas tegen glas zijn gemaakt, komen lekkages niet voor.

II.

Beschrijving der onderdeelen.

a. Zuigperspomp (fig. 2).

Een luchtdicht pompje, dat langen tijd achtereen zonder weigeren doorwerkt en een voldoende capaciteit bezit, is eenvoudig in elkaar te zetten.

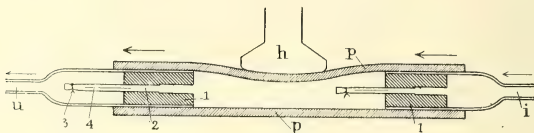


Fig. 2.

De glazen buisjes *i* en *u* zijn met elkaar verbonden door een stuk stevig rubberslang *p* (± 15 cM. lang en $2^1/_2$ cM wijd). Ieder der buisjes *i* en *u* is van een ventiel voorzien, dat bestaat uit een stukje (1 cM. lang) vacuumslang 1, waarin het eene einde van een stuk ventielslang 2 (± 3 cM lang) met solutie is vastgelijmd. Het andere uiteinde van de ventielslang is bij 3 met een touwtje stevig dichtgebonden, terwijl in de ventielslang een rechte overlangsche snede 4 is gemaakt, waarvan (als er niet gepompt wordt) de sneevlakken sluitend tegen elkaar liggen. Om te voorkomen, dat deze randen later weer aan elkaar plakken, worden ze met talk bestreken. De glazen buisjes *i* en *u* passen klemmend in de rubberslang *p*, terwijl de vacuumstukjes 1 ook volkomen moeten afsluiten. Hoe het pompje werkt, als de hamer *h* erop tikt, is uit de fig. dadelijk op te maken.

b. Het ademhalingsvat (fig. 3.)

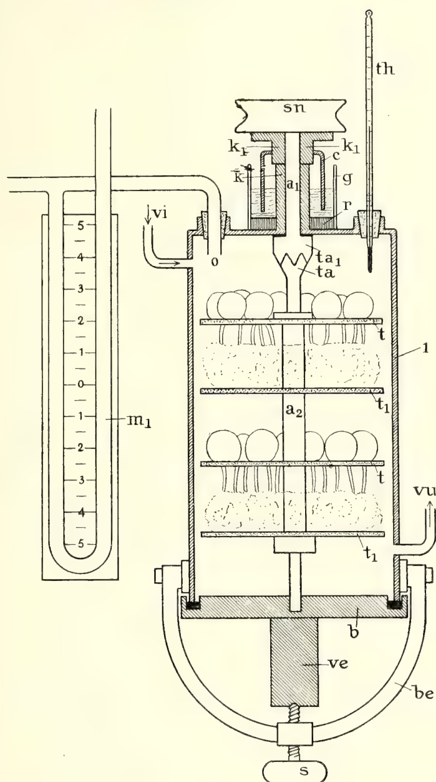


Fig. 3.

Evenals in het onderzoek van KUYPER[1]) is ook hier gebruik gemaakt van een cilindervormige koperen bus 1. De proefobjecten bevinden zich op de ebonieten plaatjes t, die aan een as a_2 zitten. In ieder der plaatjes t zijn er 25 ronde gaatjes zóó gemaakt, dat kiemende zaden van Pisum sativum er niet doorheen kunnen vallen Op de plaatjes t_1 zijn vochtige watten gelegd, waarop de worteltjes

[1]) KUYPER: De invloed der temperatuur op de ademhaling der hoogere planten. Dissertatie. Utrecht, 1909.

rusten, waardoor watergebrek niet kan voorkomen. Van boven eindigt de as a_2 in een verbreeding, voorzien van 4 tanden ta, die juist passen tusschen de vier tanden ta_1, van een gelijke verbreeding aan het ondereind van de as a_1. Deze stalen as a_1 gaat door een koperen koker k (aan het deksel gesoldeerd), waarin zij passend sluit, maar toch licht draaibaar is. Om k zit een glazen cilinder g, van onder gesloten door den gummiring r. De as a_1 eindigt van boven klemmend in een koperen buis k_1, waaraan van onderen de holle metalen cilinder c is bevestigd en van boven het snaarschijfje sn. Door de olie in g is de as luchtdicht afgesloten en is lekkage niet mogelijk, daar er in het vat nooit groote drukverschillen ontstaan. In het midden van het losse bovenstuk b bevindt zich een uitholling, waarin a_2 vrij draaien kan. Wordt nu door een motor sn langzaam rondgedraaid, dan zal a_1 deze beweging door middel van de tandjes ta_1 en ta op a_2 overbrengen, waarmede bereikt is, dat de circuleerende lucht gelijkmatig binnen het heele vat wordt verspreid en de kiemplantjes voortdurend door versche lucht worden bestreken. De noodzakelijkheid, om in een cilindervormig ademhalingsvat (15 cM. middellijn bij 2 dM. hoogte) voor ventilatie te zorgen, bleek duidelijk bij een van de vele contrôle proeven. Bij een constante temperatuur van 20° C. was door de O_2-opname in 50 minuten een stand van 4 cM. op den manometer m_1 ontstaan. Daarna werd in de volgende 10 minuten sneller gecirculeerd, met het gevolg dat de manometer in dien tijd nog evenveel steeg als in de voorafgegane 50 minuten. Er kon hiervoor geen andere verklaring gevonden worden, dan door aan te nemen, dat er in het vat CO_2-ophooping plaats vond. Deze zou ontstaan, doordat de binnentredende lucht bij vi zich langs den makkelijksten weg dóór het vat naar het uitgangspunt vu begaf, hierbij slechts een deel van CO_2 medenemend. Verdween nu door een snellere circulatie een gedeelte van het opgehoopte CO_2, dan was een plotselinge grootere stijging van den manometer hierdoor te verklaren. Zoodra door de draaiende beweging der ademende objecten, elke CO_2-ophooping in het vat werd voorkomen, was er ook inderdaad geen abnormale manometerstijging meer te bespeuren. Het behoeft geen betoog, dat, niet alleen met het oog op de zuurstofvoorziening en meting, maar ook om andere redenen, het door de ademhaling gevormde CO_2 dadelijk afgevoerd moet worden. Bij een CO_2-ophooping in het vat is natuurlijk een volumetrische bepaling van de verdwenen hoeveelheid O_2 niet meer mogelijk. Bovendien geraakt dan een gedeelte der planten in een CO_2-rijke atmosfeer en zal door O_2-gebrek al spoedig intramoleculaire ademhaling optreden.

Het komt mij voor, dat in de ademhalingsapparaten naar het

model door PFEFFER en DETMER gegeven en b.v. door KUYPER gebruikt, weinig of geen acht is geslagen op de fout, die begaan kan worden, wanneer er in een ademhalingsvat van den vorm als hier beschreven, niet voor een volkomen ventilatie gezorgd wordt.

De losse bodem *b* is voorzien van een randgroeve, waarin een gummiring ligt. De draaibare beugel *be* heeft in het midden een schroef *s*, die, omhoog gedraaid, tegen *ve* drukt en zoodoende den onderrand van het vat sluitend in de groeve met gummiring perst.

In het deksel van het vat zit, behalve de opening *o* voor den zuurstofinlaat, ook een doorboorde gummikurk, waardoor een thermometer *th* steekt.

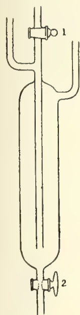


Fig. 4.

c. Fig. 4 geeft den vorm van de *droogbuisjes* en het *contrôlebuisje* aan. Het vullen geschiedt door kraan 1, terwijl voor het ledigen en schoonwasschen kraan 2 dient.

d. De *absorptiebuizen* zijn aan een koperen raam bevestigd (fig. 5). Daar voor het behouden van een constante temperatuur de thermostaat niet willekeurig groot kan gemaakt worden, zijn rechte absorptiebuizen (2½ dM. lengte bij 3 cM. wijdte) in dit geval beter te gebruiken dan Pettenkofersche of Winklersche. Wanneer men voor de CO_2-binding barytwater kiest, (21 gr. bariumhydroxyde + 3 gr. chloorbarium op 1 L. water), dan is de absorptie eerst volledig, als de lucht door 3 van zulke buizen (elk 100 ccM. loog bevattend) gaat. Ieder raampje van 6 buizen is dus slechts voor twee waarnemingen bruikbaar. De buizen eindigen van onderen in dunne open stukjes, die met gummistopjes goed gesloten kunnen worden. Van boven geschiedt de afsluiting door gummikurken van 3 cM. dikte. In iedere kurk zijn drie gaten, waarvan twee dienen voor de in- en uitlaatbuisjes, terwijl het derde, dat voor de vulling dient, met een massief glazen staafje dichtgestopt kan worden. De verbindingen der buizen onderling zijn, als alle andere aan het apparaat, met vacuumslang gemaakt. Van een diffundeeren van CO_2 uit het water van den thermostaat door de rubberverbindingen en kurken naar binnen, noch van een O_2-opname door den rubber, kon iets gemerkt worden. Blinde proeven, die 24 uur duurden, gaven bij temperaturen tusschen 20° en 30° C. geen meetbare titerverandering van de loog, terwijl de manometer m_1 gedurende dien tijd op het nulpunt bleef.

e. De *zuurstofvoorziening* en *meting*.

Ten einde geen last te hebben van ozon-vorming, is voor de electrolyse een 10 °/₀ natronoplossing te verkiezen boven verdund zwavelzuur.

In fig. 6 is C een glazen cilinder met natronloog, waarin de platina-electroden p_1 en p_2 zich bevinden. Door middel van dunne platinadraden zijn deze electroden respectievelijk in de glazen buisjes 1 en 2 door insmelting vastgezet. De buisjes 1 en 2 steken door caoutchouckurken, die goed passen in de wijdere buizen w en z (van onderen open), en worden met wat kwik gevuld. Met behulp van een weerstand we is de stroomsterkte zoo te regelen, dat de

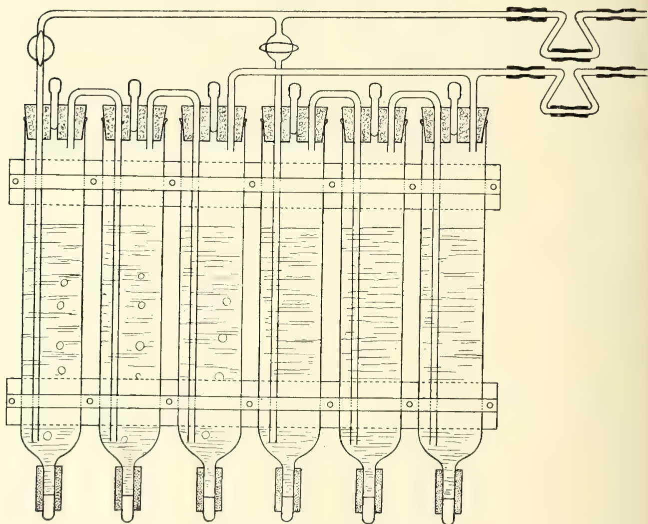


Fig. 5.

intensiteit van de electrolyse een gewenschte grootte kan bereiken. Hierdoor is het mogelijk, de zuurstofontwikkeling, die in de buis z aan de electrode p_2 plaats vindt, in evenwicht te houden met het O_2-verbruik bij de ademhaling. Als weerstand we voldoet voor dit doel uitstekend een glazen bak met leidingwater, waarin de electroden w_1 en z_1. Door w_1, die aan een statief zit, langs een hellend plankje te verschuiven, wordt niet alleen de afstand w_1—z_1 kleiner of grooter gemaakt, maar komt ook deze electrode meer of minder diep in het water te staan.

De in z gevormde O_2 staat in open verbinding met den manometer m_1 en het ademhalingsvat. De buis z is eigenlijk ook een

manometer, waarin de loog even hoog als in *c* zal staan, zoolang er juist zooveel O_2 ontwikkeld wordt, als er in het apparaat verdwijnt; m_1 is echter noodig, om, zooals reeds vermeld is, als contrôle op de ozon-vorming te dienen.

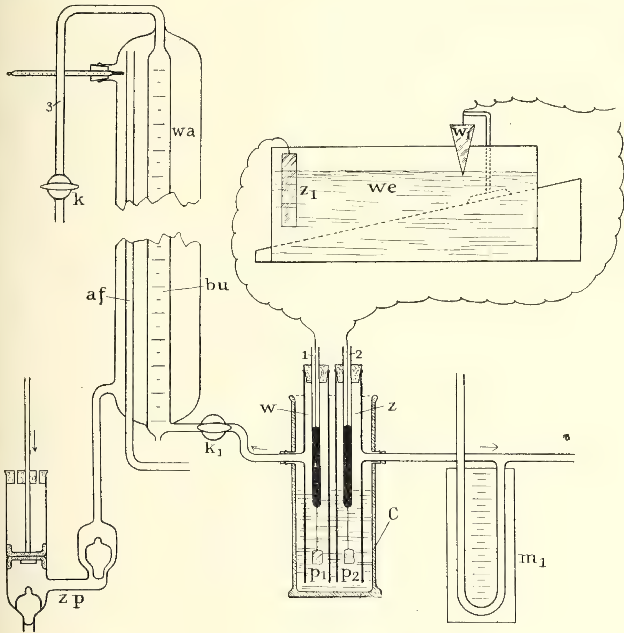


Fig. 6.

Voor het opvangen van de waterstof, die aan de electrode p_1, in de buis *w* vrij komt, dient de buret *bu*, waarop aflezingen tot op 0.1 ccM. mogelijk zijn. Deze buret eindigt boven in een omgebogen glazen buis 3, voorzien van een glazen kraantje *k*. Van onderen heeft de buret een nauwe opening, terwijl niet ver van deze een zijdelingsch buisje is aangebracht voor de verbinding met de buis *w*. Wanneer de buret zoo gesteld wordt, dat de onderste opening zich juist even onder het niveau van het water in den thermostaat bevindt, is het niet mogelijk, dat bij het uitloopen van water ook tegelijk lucht in de buret naar boven stijgt.

Het vullen van de buret met water uit den thermostaat geschiedt door k_1 te sluiten, k open te zetten en aan de buis 3 te zuigen. Wordt na de vulling k gesloten en staat k_1 open, dan kan er geen water anders uit de buret loopen, of er moet in w waterstof gevormd worden, die dan in den vorm van bellen in de gevulde buret opstijgt. Voor het vormen van de eerste waterstofbellen in de buret is er een kleine overdruk noodig, hetgeen te zien is aan de daling van de vloeistof in de buis w. Deze overdruk, die verder gedurende het leegloopen van de buret constant blijft, moet aanwezig zijn vóórdat de waarnemingen beginnen, daar anders de eerste aflezing een te klein getal zal aangeven. De fout is te voorkomen, door eenige minuten vóór de proef ingezet wordt, — als het apparaat nog ventileerend werkt — de electrolyse te doen plaats vinden, tot de eerste bellen in de buret opstijgen. Voor het geval, dat gedurende eenzelfde waarneming, de buret meerdere malen gevuld wordt, moet het opzuigen van het water heel langzaam en gelijkmatig gebeuren, opdat geen waterstof wordt medegezogen, die zich bevindt in de verbindingsbuis tusschen k_1 en de buret. Wordt voorzichtig water in de buret gezogen, dan blijft de eenmaal gemaakte overdruk in w behouden.

Een andere fout ontstaat, wanneer de buret bloot staat aan de temperatuursschommelingen van het lokaal, waarin gewerkt wordt. Men krijgt dan niet alleen in w, maar ook in z en m_1 dalingen of rijzingen, die geen gevolg zijn van de zuurstof-opname. Te verhelpen is dit, door de buret ook op constante temperatuur te houden, hetgeen op de volgende wijze te verkrijgen is. Door middel van een metalen zuigperspompje zp (dat eveneens aan het koperen raamwerk zit, waaraan het geheel bevestigd is), wordt water uit den thermostaat met groote snelheid omhoog gepompt in een wijden glazen cilinder wa, waarin de buret zich bevindt. Het water komt van onderen in wa en wordt door de buis af van boven af weer naar den thermostaat gevoerd. Zelfs bij hooge temperaturen (50°, 55° C.) is op deze manier de temperatuur in de buret gelijk te houden aan die van het water in den thermostaat.

f. De *regeling der temperatuur* komt in principe overeen met die door RUTGERS [1]) en COHEN STUART [2]) beschreven en is een navolging van toestellen, welke in het VAN 'T HOFF-laboratorium te Utrecht in gebruik zijn.

[1]) RUTGERS, De invloed der temperatuur op den praesentatietijd bij geotropie. Dissertatie. Utrecht 1910.

[2]) COHEN STUART, Recueil des travaux botaniques néerlandais. Vol. XIX Livraison 2. 1922.

Het verwarmingsapparaat *v* (fig. 7) bestaat uit een koperen bus, waarop een metalen buis, die boven water steekt. In *v* bevindt zich paraffineolie, die electrisch verwarmd wordt door een nikkelchroomdraad, die om een stuk mica gewikkeld is.

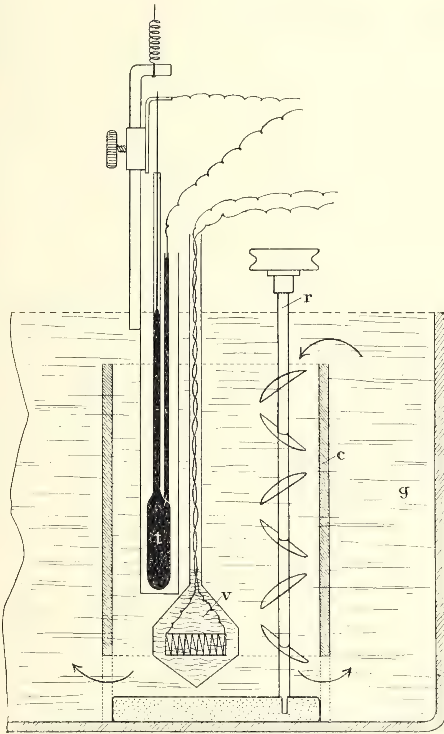


Fig. 7.

Thermoregulateur *t*, roerinrichting *r* en *v* bevinden zich dicht bij elkaar in een open glazen cylinder *c*, die op pootjes staat midden in den thermostaat *g*. De thermoregulateur is, om elken invloed van trilling op den kwikstand te voorkomen, volgens de methode-Moll aan een stalen spiraalveer aan de zoldering opgehangen.

De hier beschreven methode geeft, wat de CO_2-bepaling betreft, geen nieuw beginsel aan. Gekozen is de eenvoudige en altijd weer

betrouwbaar gebleken barytmethode, die hier niet nader beschreven behoeft te worden. Als gevolg van de inschakeling in een gesloten stelsel ondergingen de verschillende onderdeelen eenige vormveranderingen, die echter aan het wezen van de barytmethode niets veranderden.

Voor het vraagstuk der zuurstofvoorziening, dat steeds meerdere moeilijkheden opleverde, kon een bevredigende oplossing gegeven worden, die vergeleken met de reeds bestaande methoden [1]), de volgende voordeelen en vereenvoudiging aanbiedt:

a. het ontstaan van vermindering van druk en zuurstofgehalte in het apparaat wordt tot een minimum teruggebracht,

b. voor de verbruikte O_2 treedt dadelijk zonder eerst een afsluitventiel te passeeren, zuivere O_2 in de plaats, hetgeen gecontroleerd kan worden,

c. een zuurstofbom of ander reservoir is er niet meer noodig.

Het toestel is vervaardigd door den heer P. A. DE BOUTER, amanuensis aan het Botanisch Laboratorium te Utrecht. Grooten dank ben ik hem verschuldigd niet alleen voor de wijze, waarop hij zich van zijn taak kweet, maar ook voor het vinden van enkele vernuftige verbeteringen.

Utrecht, Mei 1923. *Botanisch Laboratorium.*

---

[1]) Zie KROGH: "The respiration exchange of animals and man. LONGMANS, GREEN en Co., London 1916".

Scheikunde. — W. D. Cohen: *„De lichtoxydatie van alkohol.* (III). *De photo-katalytische invloed van enkele reeksen van ketonen op de lichtoxydatie van aethylalkohol".*

(Aangeboden door de Heeren J. Böeseken en A. F. Holleman).

Inleiding. Eene eerste mededeeling over dit onderwerp verscheen reeds verscheiden jaren geleden in deze verslagen [1]), eene voortzetting ervan publiceerde Böeseken [2]), hierin zijn de theoretische grondslagen, waarop deze onderzoekingen berusten in extenso uiteengezet [3]) en er zij dus voor de bestudeering hiervan naar deze verhandeling verwezen.

Het was thans mijn doel te onderzoeken, welk verband er bestaat tusschen de configuratie van een keton en zijn photo-katalytischen invloed op de oxydatie van een bepaalden alkohol en ik bestudeerde daartoe den invloed van enkele reeksen van ketonen op de oxydatiesnelheid van aethylalkohol, om daaruit zoo mogelijk een conclusie te kunnen trekken over de constitutieve eischen, waaraan een keton moet voldoen, om — onder de hierna omschreven omstandigheden — als photokatalysator te kunnen optreden, waarmede dan tevens zijn photochemische aantastbaarheid is vastgelegd. Deze kwestie is weliswaar ook reeds vroeger herhaaldelijk ter sprake gebracht [4]), doch de betrekkelijk geringe regelmatigheid in de geconstateerde verschijnselen maakte eene uitbreiding van het onderzoek in deze richting zeer gewenscht.

De lichtthermostaat. Bij de reactie:
Licht + Keton + Alkohol + Zuurstof = Keton + Aldehyd + Water verdwijnt dus een zekere hoeveelheid zuurstof, en de snelheid, waarmede de zuurstof wordt opgenomen is, onder overigens vastgelegde omstandigheden, een maat voor de photokatalytische activiteit van het onderzochte keton.

De lichtthermostaat (fig. 1) bestaat uit een roodkoperen bak, voorzien van twee tegenover elkaar gelegen vensters in de langswanden, welke een voortdurende beschouwing van het reactievat mogelijk maken en een venster in den bodem ten behoeve van de

[1]) Böeseken en Cohen, Verslagen Deel XXIV 1582 (1916).
[2]) Böeseken, Rec. 40, 433 (1921).
[3]) Ibid, 437.
[4]) Cohen, Rec. 39, 258 (1920). Chem. Weekblad 13, 902 (1916).

belichting. De thermostaat rust op een ijzeren raamwerk, dat door bekleeding met brandvrij materiaal tot een geheel afgesloten ruimte

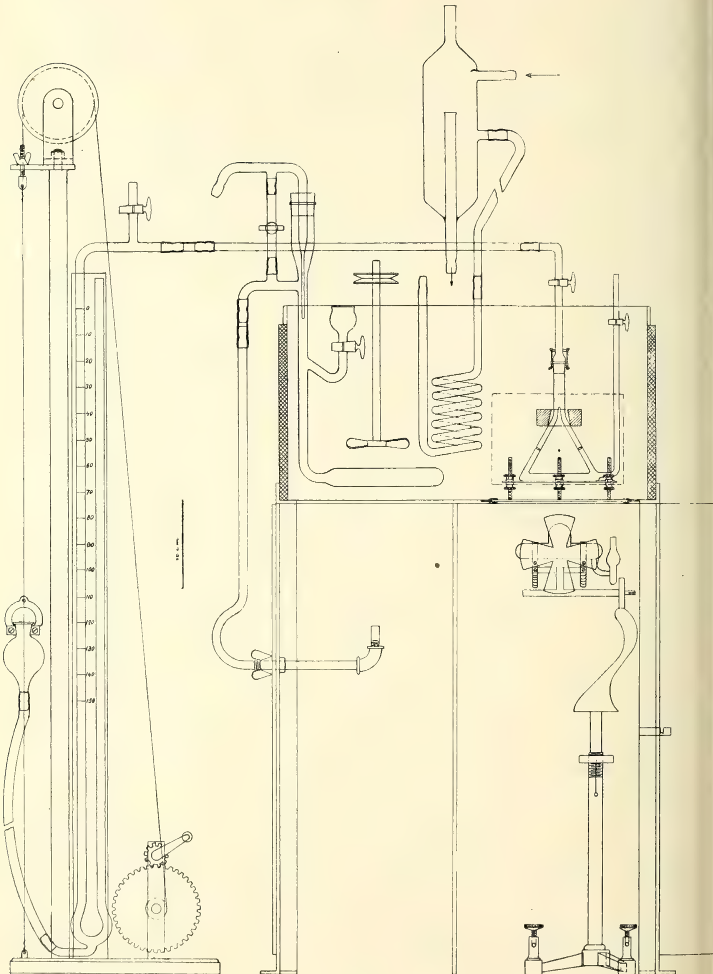


Fig. 1.

is geworden. Deze ruimte is door een vertikaal schot in tweeën verdeeld. Links bevinden zich twee met een thermoregulateur verbonden gasbranders, terwijl rechts een Heraeus-kwartslamp is gemonteerd. Voor de bediening hiervan is de rechterzijwand van het raamwerk als deur ingericht (in de figuur half geopend geteekend), terwijl voor de koeling van de lamp ter plaatse van het gloeilichaam in het voorschot een ventilator is aangebracht, welke zuigend moet werken. Verder kan het water in den thermostaat nog gekoeld worden met behulp van een koelspiraal, waar door heen water onder constanten druk stroomt, terwijl een schroefroerder voor een goede menging in den bak zorgt; behalve de vensters zijn de opstaande wanden hiervan met vilt geisoleerd. Ventilator en roerwerk worden door aparte regelbare motoren aangedreven. De temperatuur van den thermostaat is constant te houden op $35 \pm {}^{1}/_{100}\,^{\circ}$, welke temperatuur is gekozen, omdat hierbij de thermostaat het nauwkeurigst is te regelen.

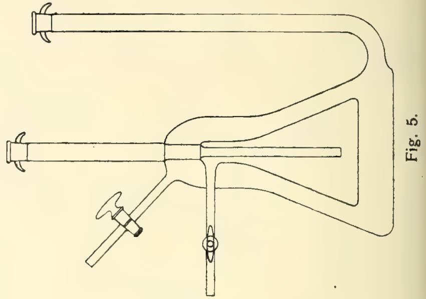
Als reactievat gebruikte ik aanvankelijk het reeds vroeger beschreven roerapparaatje [1]) (fig. 2), het bezit echter het nadeel, dat het belichtingsoppervlak klein is, terwijl de nauwkeurigheid van de meting door het spoedig vervuilen van het kwik in den kwikafsluiter ernstig geschaad wordt. Ik zocht dus het reactievat zoodanig te wijzigen, dat ook zonder intensieve menging van gas en vloeistof eene alkoholische oplossing verkregen kon worden, die steeds verzadigd met zuurstof blijft of althans een dusdanige overmaat zuurstof bevat, dat van het meten van een diffusiesnelheid in plaats van reactiesnelheid geen sprake kan zijn.

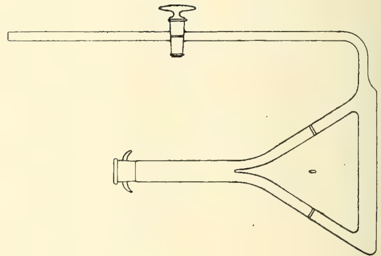
Een en ander is mogelijk door de dikte van de vloeistoflaag zeer gering en wel circa één mM. te nemen. Men krijgt dan een reactievat volgens fig. 3, hetwelk dus in hoofdzaak bestaat uit een kolf met volmaakt vlakken bodem; de afmetingen zijn zoo gekozen, dat 5 cc. vloeistof een laagdikte van 1 mM. geven. De hals is nauw en bezit een slijpstuk, waaraan een omgebogen capillaire buis met kraan verbonden kan worden. Verder is dicht bij den bodem een zijbuis met kraan aangebracht, waardoor het dus mogelijk is de geheele toestel met zuurstof te vullen. Bovendien bevindt zich in de kolf een vullichaam, teneinde het gasvolume in verhouding tot het belichtingsoppervlak zoo klein mogelijk te maken; hierdoor wordt de nauwkeurigheid der meting belangrijk verhoogd. Voor bepaalde doeleinden is dit vullichaam tot een tweede reactievat binnen het eerste gemaakt, men krijgt dan een toestel volgens fig. 4.

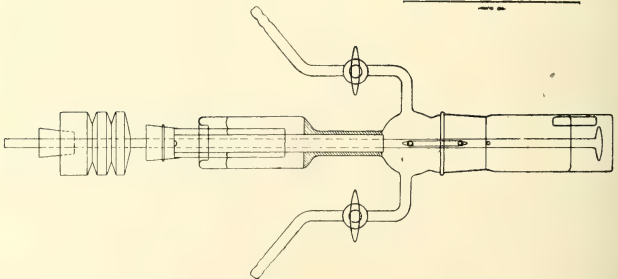
Het reactievat is met behulp van een nauwe slang verbonden met den micromanometer. Het linker been hiervan heeft een inhoud van

[1]) Verslagen XXIV, 1584 (1916).

1,5 cc. en is in 150 deelen verdeeld. Iedere ruimte tusschen twee deelstrepen vertegenwoordigt dus een inhoud van 0,01 cc. De


Fig. 5.


Fig. 3.


Fig 2.

instelling wordt verkregen door de peer met een hijschtoestelletje op en neer te bewegen, terwijl de stand van den meniscus in beide

beenen van den manometer wordt gecontroleerd doordat zich hierachter een spiegel bevindt, waarop op afstanden van 1 mm. horizontale lijnen zijn aangebracht. Indien het apparaat goed gereinigd is en met gedistilleerd kwik gevuld, kan een nauwkeurigheid in de instelling van 1 à 2 honderste cc. bereikt worden, welke met den temperatuursinvloed binnen de grenzen van de waarnemingsfout ligt. De calibreerfout van het apparaat was zoo gering, dat deze kon worden verwaarloosd.

Het reactievat wordt na met een koperen ring te zijn bezwaard op een glazen tafeltje geplaatst, dat op zijn beurt op de onderruit van den thermostaat rust. Met behulp van drie stelschroeven is het tafeltje horizontaal te stellen, waardoor dus de dunne vloeistoflaag het geheele bodemoppervlak van het reactievat bedekt. Het gloeilichaam van de lamp wordt na het aansteken steeds in horizontalen stand gebracht; de lamp brandt bij een netspanning van 110 Volt en een voorschakelweerstand van ca. 20 Ω constant bij 2,7 Amp./40 Volt. Lamp en reactievat hebben ten opzichte van elkaar steeds denzelfden afstand; bij mijn proefnemingen was de afstand van de onderzijde van het reactievat tot aan het venster 20 mm. en van de bovenzijde van de lamp tot aan het venster 25 mm., rekent men hierbij de dikte van het glas, dan was de onderlinge afstand van lamp tot object ongeveer 50 mm.

De metingen.

a. De preparaten. Deze werden grootendeels door mijzelf of onder mijn toezicht vervaardigd en zoo zorgvuldig mogelijk gezuiverd. Aangezien de bereiding van alle bekend is, zij hiervoor naar de betreffende literatuuropgaven verwezen. Indien zulks mogelijk was werden minstens twee preparaten van verschillende herkomst onderzocht of het preparaat na de meting opnieuw omgekristalliseerd of gedistilleerd; de gevonden getallen werden eerst dan als definitief beschouwd, indien ze volkomen constant en reproduceerbaar waren; behoudens een enkele uitzondering was dit steeds het geval.

b. Als oplosmiddel resp. te oxydeeren vloeistof diende absolute aethylalkohol, niet omdat dit absoluut zijn voor het goede verloop van de reactie volstrekt noodzakelijk is — immers er ontstaat gedurende de reactie water — maar om steeds van eene oplossing van constante samenstelling uit te gaan. Bij mijn vroegere onderzoekingen was ik tot de conclusie gekomen, dat, althans voor de photochemische reductie der ketonen water een sterke antikatalysator zoude zijn.[1]) Destijds was mij de photokatalytische alkoholoxydatie door moleculaire zuurstof nog niet bekend, evenmin dat deze reactie

[1]) Cohen Rec. 39, 244 (1920).

en de ketonreductie primair dezelfde waren en het dus onlogisch is aan te nemen, dat water een antikatalysator zoude zijn bij de ketonreductie. Inderdaad is bij een hernieuwd onderzoek gebleken, dat althans van een belangrijke antikatalytische werking van water geen sprake is, maar dat de eens gemaakte fout, die helaas reeds in de handboeken is overgenomen [1]) aan eene verkeerde uitlegging der destijds gedane proefnemingen moet worden toegeschreven.

Het lijkt mij niet ondienstig dit thans nog even toe te lichten, al ware het alleen maar om er op te wijzen, hoe gemakkelijk men zekere verschijnselen bij het bestudeeren van een reactie over het hoofd kan zien. Immers, aanvankelijk nam ik mijn proeven over de photochemische ketonreductie zoodanig, dat ik de 96 %-ige alkoholische oplossing in een dunne laag in *open* kolven belichtte, doch toen niets van de reeds door CIAMICIAN [2]) beschreven uitkristallisatie van het moeilijk oplosbare pinakon waarnam. Dit gelukte echter zeer gemakkelijk toen ik — evenals CIAMICIAN zulks deed — absolute alkohol gebruikte en bovendien in *gesloten* apparaten, dus onder buitensluiten van zuurstof, werkte. Daarbij trok ik de zeer verklaarbare, doch achteraf gezien onjuiste conclusie, dat water een sterke antikatalysator zou zijn en zag de interessante photokatalytische alkoholoxydatie waarbij — de resultaten van deze verhandeling zijn hiervan het overtuigend bewijs — wel aldehyd maar geen pinakon [3]) ontstaat en die eerst eenige jaren later door een toeval werd ontdekt, geheel over het hoofd.

c. Het reactievat wordt, ten einde steeds over een groote overmaat zuurstof te kunnen beschikken, na toevoeging van 5 cc. der te onderzoeken oplossing met zuurstof gevuld, die in een waschflesch met alkoholdamp verzadigd wordt. Onder deze omstandigheden blijft de oplossing steeds meer dan voldoende verzadigd met zuurstof; evenwel is het zonder invloed op de uitkomst der metingen, of het gas in het reactievat lucht of zuurstof is, veiligheidshalve werd echter steeds zuurstof genomen.

De metingen, waarvan de resultaten in onderstaand overzicht zijn vereenigd, strekken zich in hoofdzaak uit over de volgende reeksen van ketonen:

a. benzophenon en zijn hydreeringsproducten in de kern,

b. acetophenon en enkele alkyl-, benevens phenylsubstitutieproducten in de CH_3-groep,

c. de phenylsubstitutieproducten van aceton,

d. de meest eenvoudige aliphatische, aromatische en vet-aromatische α-β-diketonen,

e. enkele α-β-γ-triketonen.

De getallen boven de horizontale deelstreep geven aan de molaire

[1]) HOUBEN—WEYL. Die Methoden der organischen Chemie 2te Aufl. (1922), Band II pag. 983.

[2]) CIAMICIAN en SILBER, Ber. 33 2911 (1900); 34 1530 (1901); 44 1288 (1911).

[3]) BÖESEKEN en COHEN, l.c.

concentratie van het keton, terwijl de getallen daaronder de zuurstof-absorbtie, uitgedrukt in cc. per uur voorstellen. Ze zijn het gemiddelde van een groot aantal goed kloppende waarnemingen.

1. Benzophenon.

1 (verzad.)	3/4	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
10.30	**12.00**	**12.00**	**11.90**	9.00	5.60	3.65	2.28

2. Phenylcyclohexylketon.

1 (verzad.)	1/2	1/4	1/8
5.15	**5.00**	2.82	1.12

3. Dicyclohexylketon. Bij alle concentraties inactief.

4. Phenyl. n. hexylketon.

2	1	1/2	1/4
1.00	**0.97**	0.68	0.22

5. Di-n hexylketon. Bij alle concentraties inactief.

6. Acetophenon.

2	1 1/2	1	1/2	1/4
1.30	**1.40**	**1.42**	1.03	0.22

7. Propiophenon.

2	1	1/2	1/4
1.10	**1.11**	0.92	0.20

8 Phenylbenzylketon.

1/2 (verzad.)	1/4	1/8
5.05	**4.85**	2.35

9 Diphenylacetophenon.

1/32 (verzad.)	1/64
3.13	0.78

10. Triphenylacetophenon (β-benzpinakoline). Inactief.

11. Aceton. Bij alle concentraties inactief.

12. Monophenylaceton.

3	2	1
0.50	**0.48**	0.35

13. Symm. Diphenylaceton (dibenzylketon).

2	1	½
1.76	1.75	0.85

14. Asymm. Diphenylaceton.

1 (verzad.)	½
0.03	0.01

15. Triphenylaceton 1.1.2.

1/8 (verzad.)
0.05

16. Symm. Tetraphenylaceton [1]).

1/50 (verzad.)
0.17

17. Phenylfurylketon.

2	1	½
0.07	0.10	0.10

18. Diacetyl.

4	3	2	1½	1	¾	½	¼	1/8	1/16	1/32
16.00	15.30	15.30	15.10	14.90	14.10	10.60	6.40	2.60	0.64	0.16

19. Benzil.

¼ (verzad.)	1/8	1/16
3.20	1.44	0.52

20. Acetylbenzoyl [2]).

4	3½	3	2	1½	1	¾	½	¼	1/8	1/16
8.60	11.70	12.90	12.60	12.80	13.10	10.80	8.50	6.05	4.15	2.08

[1]). Prof. STAUDINGER, Zürich, was zoo vriendelijk mij een kleine hoeveelheid van dit preparaat te zenden.

[2]). Door belichten van een alkoholische oplossing van acetylbenzoyl in een toegesmolten buis kan men zeer gemakkelijk het bijbehoorende photoreductieproduct verkrijgen. De stof bestaat uit zeer fraaie kleurlooze, in alkohol moeilijk oplosbare kristalnaalden en is in drogen toestand aan de lucht volkomen stabiel. Overigens is de verbinding geheel vergelijkbaar met het overeenkomstige reductieproduct

21. Furil.

1/16 (verzad.)
2.80

Opm. Na eenigen tijd belichten daalt de aanvankelijk constante absorbtie tot 0; daarbij wordt het keton zelve, onder ontkleuring van de vloeistof, aangetast.

22. Benzfuril.

2	1	1/2	1/16
5.80	6.30	6.20	2.20

23. Terephtalophenon.

0.01 (verzad.)	0.006	0.004
2.80	3.55	3.45

24. Isophtalophenon.

0.1 (verzad.)	0.01
2.80	1.48

25. Phenanthreenchinon.

0.02 (verzad.)	0.01
10.50	6.25

Opm. Gedraagt zich evenals furil.

26. Anthrachinon.

0.004 (verzad.)
0.67

27. Kamferchinon. De activiteit varieert met de herkomst der preparaten. Een vijftal wisselden bij 1/8 mol. van 0.19—0.43. Bij nog lagere en ook bij zeer kleine concentraties is de activiteit practisch niet merkbaar.

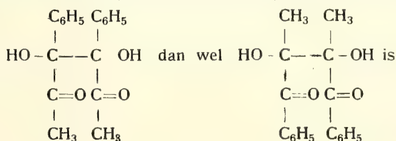
28. Fluorenon. Bij alle concentraties — ook zeer kleine — inactief.

29. α-Hydrindon.

2	1	1/2
0.19	0.17	0.07

---

van diacetyl (verg. Chem. Weekbl. 13, 594 (1916); ze smelt onder ontleding bij 116°—124°. Het is nog niet uitgemaakt of de structuurformule



30. β-Hydrindon. Is als photokatalysator onbruikbaar, aangezien deze stof in alkoholische oplossing zelf zeer snel door zuurstof wordt aangegrepen.

31. Indaandion 1.2.

1/8 (verzad.)	1/16
0.92	0.39

31. Pentaantriketon. Inactief.

32. Diphenyltriketon. Inactief.

34. Alloxaan. Uiterst geringe activiteit.

Deze gegevens veroorloven ons de volgende conclusies te trekken:

a. De activeeringssnelheden zijn binnen betrekkelijk ruime grenzen onafhankelijk van de concentratie van het keton (in de tabellen vet gedrukt) geheel overeenkomstig aan de vroeger gevonden reductiesnelheden. [1]) Dit verschijnsel komt weliswaar niet bij alle onderzochte gevallen tot uiting, doch men dient niet te vergeten, dat de omstandigheden van de proef een zekere mate van activiteit en oplosbaarheid van het keton noodzakelijk maken om de maximale activeeringssnelheid te bereiken.

Duidelijke voorbeelden, waarbij de zuurstofabsorbtie binnen ruime grenzen constant blijft zijn benzophenon, diacetyl en benzoylacetyl (vergelijk de grafische voorstellingen in fig. 5 en 6). Wij zien soms bij zeer hooge ketonconcentraties (20) of in de buurt van het verzadigingspunt (1) de activiteit weer dalen, hetgeen dan moet worden toegeschreven aan onderlinge storingen der keton-molekulen [2]). De daling in activiteit bij lagere concentraties moet eenvoudig worden verklaard door de afwezigheid van een voldoende hoeveelheid activeerbare keton-molekulen, waarbij dan een gedeelte van het beschikbare licht ongebruikt wordt gelaten. Dat inderdaad in het concentratiegebied der maximale activeering al het photoactieve licht wordt tegengehouden door een laagdikte van slechts 1 mm., heb ik zeer fraai kunnen bewijzen met het reactievat volgens fig. 4, hetwelk dus volkomen te vergelijken is met de vroeger beschreven „mantelbuizen” ten behoeve der photochemische reductie. Brengt men b.v. in het buitenste reactievat een alkoholische (of ook benzolische) oplossing van benzophenon in een voor de maximale activeering noodzakelijke concentratie, dan blijkt een benzophenonoplossing in het binnenste reactievat geen spoor zuurstof te absorbeeren; de absorptie begint echter onmiddellijk merkbaar te worden, zoodra de ketonconcentratie

[1]) Cohen, Rec. 39, 253 (1920).

[2]) Ibid. pag. 273.

in het buitenvat beneden de kritische daalt. In het gebied der maximale activeering wordt dus al het photoactieve licht door een laag van 1 mm. tegengehouden en wel onafhankelijk van het gebruikte

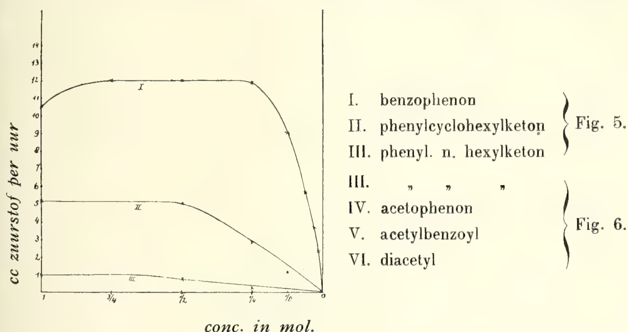


Fig. 5.

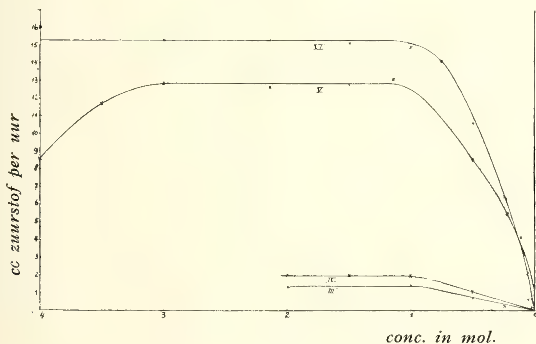


Fig. 6.

oplosmiddel. Deze verschijnselen sluiten zich volkomen aan met hetgeen vroeger bij de ketonreductie werd gevonden. Overeenkomstige proefnemingen met diacetyl en benzoylacetyl leiden tot volmaakt dezelfde resultaten.

b. Voor de photoactiviteit van de mono-ketonen geeft in het algemeen het „aromatisch" karakter den doorslag [1]), terwijl daarnaast constitutieve factoren van invloed zijn. Zoo is de photoactiviteit van

[1]) Cohen, Chem. Weekbl. 13, 902 (1916).

benzophenon op ongeveer de helft gedaald, als een der kernen gehydreerd is (2) (fig. 5) en totaal verdwenen bij het dicyclohexylketon (3). Dat de cyclohexylkern overigens de activiteit van de phenylkern minder verzwakt dan een zuiver alifatische groep bewijst de veel geringere activiteit van phenyl. n. hexylketon (4) (fig. 5), dat met de activiteit van acetophenon en propiophenon op één lijn te stellen is (6, 7) (fig 6). Bij het invoeren van C_6H_5-groepen in de CH_3-groep van acetophenon neemt de activiteit aanvankelijk sterk toe (8, 9) om bij triphenylaceton plotseling 0 te worden. Bekend is trouwens, dat β-benzpinakoline alle ketoneigenschappen mist. Bij de phenylsubstitutieproducten van aceton (op zich zelf evenals di-n. hexylketon totaal inactief (5, 11) blijkt het invoeren van slechts één phenylgroep de verbinding photoactief te maken (12). Van de hoogere phenylsubstitutieproducten vertoonen de symmetrisch gebouwde molekulen de grootste activiteit (verg. 13 en 16 met 14 en 15).

c. De photoactiviteit der α-β-diketonen is een veel algemeener eigenschap en noch aan het specifiek alifatisch- of aromatisch karakter, noch in het bizonder aan den meer of minder symmetrischen bouw van het molekuul gebonden. Het inschuiven van een tweede $C=0$ groep heeft veelal een zeer versterkende werking op de photoactiviteit (verg. 18 en 20 t. o. v. 11 en 6), waarbij eventueel storende invloeden uitgaande van de rest van het molekuul zeer op den achtergrond worden geschoven. In dit verband is het bijv. interessant er op te wijzen, dat phenanthreenchinon (25), hetwelk als een bizonder orthogesubstitueerd benzil is te beschouwen in zijn betrekkelijke activiteit alle onderzochte ketonen achter zich laat, terwijl het daarmede vergelijkbare fluorenon (28) volmaakt onwerkzaam is. Het omgekeerde geval doet zich voor bij de vergelijking van benzil (19) t. o. v. benzophenon (1), waar het diketon vergeleken met het monoketon minder actief is. Het kan echter mogelijk zijn, dat door de geringe oplosbaarheid van benzil in alkohol de maximale activeeringsconcentratie niet bereikt kan worden.

Zeer belangrijk is ook de activiteit der α-β-diketonen, die een of twee furaankernen dragen (21 en 22), waarmede een nieuw bewijs voor de groote overeenkomst in eigenschappen der furaan- en benzolderivaten is geleverd.

d. Zien wij dus, dat de phenyl- en furylgroep in het α-β-diketon geen storenden invloed op elkaar uitoefenen, zoo is die invloed blijkbaar buitengewoon sterk in het overeenkomstige monoketon, phenylfurylketon (17), dat een zeer geringe activiteit vertoont. Hier komt de reeds boven aangeduide invloed van de symmetrie van het molekuul op de photoactiviteit van het monoketon zeer sterk

tot uiting. Feitelijk is deze symmetrie-invloed reeds vroeger bij de photochemische reductie der substitutieproducten van benzophenon herhaalde malen geconstateerd, doch niet als zoodanig herkend [1]). Om aan deze opvatting nog meer kracht bij te zetten is gepoogd om difurylketon te maken, omdat deze verbinding een aan benzophenon gelijkwaardige activiteit zou moeten bezitten. Helaas is het tot dusver op geen enkele wijze gelukt deze stof in handen te krijgen [2]), doch in dit verband zij reeds gewezen op de veel grootere activiteit van terephtalophenon t. o. v. isophtalophenon. (23 en 24).

e. Een eenigszins aparte plaats onder de α-β-diketonen neemt kamferchinon in, waarvan de activiteit onverwacht gering en bovendien niet reproduceerbaar is. Het schijnt, dat de meer of mindere zuiverheid der preparaten van grooten invloed is.

f. α-Hydrindon (29) en indaandion 1. 2. (31) vertoonen als inwendige condensatie-producten beschouwd van resp. propiophenon (7) en acetylbenzoyl (20) een sterk verminderderde activiteit. β-Hydrindon is wegens de groote oxydeerbaarheid, als vergelijkingsobject met monophenylaceton onbruikbaar.

g. De photoactiviteit der onderzochte α-β-γ-triketonen is nul of te verwaarloozen klein (32, 33, 34)[3]). Dit verschijnsel moet ongetwijfeld worden toegeschreven aan door het oplosmiddel veroorzaakte paralyse der middelste $C = O$ groep, [4]) waardoor dus de verbinding haar gunstige eigenschappen van dubbel α-β-diketon feitelijk geheel verloren heeft [5]).

Laboratorium voor organische scheikunde der Technische Hoogeschool.

Delft, April 1923.

[1]) Verg. COHEN, Rec. 39. 258 (1920).

[2]) FREUNDLER, Bl. (3) 17, 612 (1897).

[3]) Voor de photochemische reductie van alloxaan zie Ciamician en Silber, Ber. 36, 1581 (1903).

[4]) Pentaantriketon en diphenyltriketon lossen in absoluten alkohol aanvankelijk met donkergele kleur op, na eenig staan verandert de kleur van de oplossing in lichtgeel, waarbij zeer waarschijnlijk aan het hydraat analoge alkoholadditieproducten $CH_3-CO-C(OH)(OC_2H_5)-CO-CH_3$ en $C_6H_5-CO-C(OH)(OC_2H_5)-CO-C_6H_5$ ontstaan.

[5]) Verg. SACHS, Ber. 34, 3052 (1901); 35, 3311 (1902); VON PECHMANN, Ber. 23 3380 (1890); WIELAND, Ber. 37, 1531 (1904); BILTZ. Ber. 45, 3662 (1912).

Biochemie. — J. R. KATZ: „*Verdere onderzoekingen over het antagonisme tusschen citraat en calciumzout bij biochemische processen, onderzocht met behulp van gesubstitueerde citraten.*" (Eerste mededeeling).

(Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. BÖESEKEN).

I. *Probleemstelling.*

In een vroeger onderzoek [1]) heb ik getracht het wezen der biologische citraatwerking te analyseeren. Na toevoeging van citraat gedraagt een biologische vloeistof zich, alsof ze geen vrije calcium-ionen meer bevat; toevoeging van citraat werkt dus op dezelfde wijze als toevoeging van oxalaat of fluoride. Maar terwijl de werking der laatstgenoemde zouten berust op de vorming van een zeer weinig oplosbaar precipitaat, blijft een gips-oplossing na toevoeging van citraat volkomen helder. Er moeten zich dus complexe ionen gevormd hebben [2]); de vraag is enkel, hoe zij geconstituëerd zijn.

Om deze nog duistere vraag nader te onderzoeken, heb ik destijds de werking der citraten vergeleken met die van gesubstitueerde citraten, waarin van de groepen die mogelijkerwijze het Ca tot complexen kunnen binden (de alkoholgroep en de drie carboxylgroepen) één of meer onwerkzaam gemaakt zijn door substituties (acetyleeren der alkoholgroep; de carboxylgroep geësterificeerd of in zuuramide omgezet etc). Als typische vertegenwoordiger eener biologische citraatwerking werd de remming der lebstolling van melk onderzocht.

Het bleek toen, dat wanneer men *of* de alkoholgroep *of* één der carboxylgroepen onwerkzaam maakt, de citraat-werking in een $^{1}/_{25}$ N oplossing op $^{1}/_{16}$ harer sterkte verzwakt wordt; (d. w. z. even zwak gemaakt wordt als in een citraat-oplossing van $^{1}/_{16}$ der zelfde sterkte), terwijl wegnemen van twee of meer groepen de werking

[1]) Deze verslagen, 26 April 1912.

[2]) SABATANI, Atti della R. Acad. di Torino **36**, p. 27—53 en Memorie (2) **52**, p. 213—257 voerde het eerst argumenten voor deze stelling aan.

BROMBERG, Diss. Amsterdam.

tot op minder dan $^1/_{100}$ der oorspronkelijke grootte reduceert. Maakt men de alkoholgroep onwerkzaam, dan blijkt de werking even sterk te zijn als bij andere drie- tot vierbasische zuren van verwante structuur maar zonder oxygroep (zooals tricarballylzuur, aconietzuur of isoallyleentetracarboonzuur). Maakt men één carboxylgroep onwerkzaam, dan blijkt de werking even sterk te zijn als bij andere tweebasische oxyzuren (zooals appelzuur en wijnsteenzuur). Evenzoo blijkt, dat als twee of drie groepen tegelijkertijd onwerkzaam gemaakt zijn, de werking even groot geworden is als bij de dan vergelijkbare verbindingen.

De vraag rijst nu:

1. *gelukt het ook bij minder gecompliceerde dan zulke biochemische systemen een dergelijke vermindering van het aantal vrije Ca-ionen door citraat-toevoeging aan te toonen?*

2. *vertoonen de gesubstitueerde citraten daar een dergelijke vermindering der werkzaamheid als bij de lebstolling?*

De beste weg tot het beantwoorden dezer vragen — het bepalen der concentratie van de vrije Ca-ionen in de oorspronkelijke oplossingen — is ongelukkigerwijze niet gangbaar, omdat wij nog geen methode kennen, de concentratie van vrije Ca-ionen potentiometrisch te bepalen. Men moet dus tot indirecte methoden zijn toevlucht nemen. Het ligt dan voor de hand te onderzoeken hoeveel calcium door citraat-toevoeging in oplossing gehouden wordt, als men aan een verdunde oplossing van een calcium-zout een stof toevoegt, die het calcium als onoplosbare verbinding neerslaat (b.v. oxalaat, fluoride, pyrophoshaat, zeep etc.). Het oplosbaarheidsprodukt dezer reactie moet zoo gekozen zijn, dat de werking van het citraat zich goed meetbaar uit. Kent men dit oplosbaarheidsprodukt, zoo is tenminste bij deze kleine concentratie het gehalte aan *vrije* calcium-ionen bekend, terwijl men weet hoeveel Ca in oplossing blijft.[1])

De zuiverste resultaten zal men krijgen door gewichtsanalytische bepaling van de hoeveelheid neergeslagen of in oplossing gebleven calcium, daar deze uitgevoerd kan worden zonder de calcium-oplossing merkbaar te verdunnen. Ik zal deze proef later voor citraat en voor gesubstitueerde citraten nemen. Maar om een voorloopige oriënteering te krijgen kan men ook een titratie aanwenden, al heeft deze het bezwaar, de oorspronkelijke oplossing merkbaar te verdunnen.

De heer D. P. Ross van Lennep, die mij behulpzaam was bij de proeven over den invloed der gesubstitueerde citraten op de lebstolling, deed mij opmerken, dat de zeeptitratie van calcium volgens Clark

[1]) De vraag in hoeverre hydrolytische splitsing compliceert zal ik later behandelen.

(zooals die gebruikt wordt bij de bepaling der hardheid van water) hier wellicht goede diensten zou kunnen verrichten.[1]) Hij voerde een aantal proeven met citraten en gesubstitueerde citraten uit, maar onze proefnemingen bleven ongepubliceerd. Ik heb dit vraagstuk thans opnieuw aangevat en een aantal nieuwe bepalingen ter aanvulling en ter contrôle uitgevoerd. De resultaten volgen hieronder.

2. *Proefnemingen.*

De onderzochte, sterk in ionen gesplitste, Ca-oplossing werd als volgt bereid. Een verzadigde oplossing van $CaSO_4$ (puriss. pro anal.) in gedist. water werd verdund met het 2,3 voudige voluum gedist. water. In een nauwmond-stopflesch van 250 cM³ inhoud werd 50 cM³ dezer vloeistof afgepipetteerd en met 50 cM³ gedistilleerd water of met 50 cM³ eener waterige oplossing van de te onderzoeken stof gemengd. Deze 100 cM³ werden in dezelfde stopflesch volgens Clark getitreerd (met een oplossing van zeep in alkohol van 56 voluumprocenten)[2]). Bij de titratie ontstaat in de flesch een fijn verdeeld precipitaat van calciumoleaat. Het eindpunt is bereikt, als naast dit precipitaat zooveel alkalioleaat in de oplossing blijft bestaan, dat de oplossing na schudden een staan blijvend zeepschuim vertoont. Als eindpunt werd genomen de toestand, waarbij na 6—8 maal krachtig omschudden in de lengteas van de flesch het zeepschuim als een 1 mM. hooge, 1 à 2 mM. breede witte ring aan den rand van vloeistof en flesch optreedt en vijf minuten lang blijft bestaan. Dit eindpunt is vrij scherp te bepalen, als men de noodige oefening verkregen heeft; als men vergelijkende proeven steeds op dezelfde wijze uitvoert, wijken herhaalde bepalingen derzelfde vloeistof bij een hoeveelheid titervloeistof van omstreeks 45 cM³ slechts enkele tiende cM³ van het gemiddelde der bepalingen af. Voor onze doeleinden is deze nauwkeurigheid ruim voldoende.

Zonder citraat hebben de 100 cM³ calciumsulfaat-oplossing 45 à 47 cM³ titervloeistof noodig om tot dit eindpunt te komen; het totale voluum der vloeistof aan het einde der titratie bedraagt dus 145 à 147 cM³. Heeft de vloeistof tengevolge der citraat-toevoeging

---

[1]) Een nadeel dezer methode is, dat men niet met water maar met 56-voluumprocentigen alkohol titreert, wat het milieu verandert, waarin de calcium-ionen opgelost zijn. Wanneer men echter enkel kleine verschillen meet, m. a. w. ongeveer even veel alkohol toevoegt, belet dit niet *ver elijkbare* resultaten te krijgen

[2]) Voor de nauwkeurige beschrijving der Clark'sche methode verwijs ik naar Jahresberichte f. Chemie 1850, p. 608; naar Lunge. Berl. 6e dr. dl. II, p. 232.

belangrijk minder titervloeistof noodig, dan liet ik uit een tweede buret zooveel alkohol van 56 voluumprocenten (spec. gew. 0.921) bij de te onderzoeken 100 cM³ toevloeien, dat het totale voluum aan het einde der titratie weer tusschen 145 à 147 cM³ zou bedragen; en in deze vloeistof werd dan het eindpunt bepaald. Van dezen voorzorgsmaatregel werd afgezien, wanneer het totale voluum aan het einde der proef tusschen 140 en 147 cM³ lag. Deze maatregel beoogt te verhinderen dat bij een onderzoeking naar het titreerbare calcium in zoutoplossingen derzelfde molekulaire concentratie, deze bij het eindpunt der titratie verschillende molekulaire concentratie zouden bezitten en daardoor niet meer vergelijkbaar zouden wezen.

Van het citroenzuur en zijn verschillende substitutie-producten werden 1/10 N neutrale oplossingen der natriumzouten gemaakt (neutraal tegen lakmoes; gecontroleerd werd dat zij bij verdunning met hetzelfde voluum der bovengenoemde gipsoplossing neutraal tegen lakmoes bleven). Als normale oplossingen beschouwde ik zulke, die één grammolekuul per liter bevatten (dus niet: één gramaequivalent bij meerbasische zuren). Het mengsel van gips en van (ev. gesubstitueerd) citraat bevatte derhalve de verschillende zouten in de concentratie van 1/20 N.

De met hetzelfde voluum water verdunde gipsoplossing verbruikte gemiddeld 45.7 cM³. Dit komt overeen met 12.2 deelen CaO per 100000 deelen water; of met 8.7 deelen Ca per 100000 deelen water. Bij citraten enz. werd uit een tabelletje LUNGE en BERL [1]) (berekend uit proeven van FAIST en KNAUSS) afgeleid, hoeveel Ca bij de titratie *niet* teruggevonden werd, berekend als procent van de totale hoeveelheid (8.7).

In de eerste kolom vermeld ik de verbruikte hoeveelheid cM³ titervloeistof; in de tweede kolom de hoeveelheid niet teruggevonden calcium als percent van de totale hoeveelheid.

Zoo vond ik:

a. Citroenzuur [2])	2.6 cM³	96 %
b. De alkoholgroep onwerkzaam gemaakt.		
Acetylcitroenzuur	40.9 cM³	12 %
Vergeleken met:		
Aconietzuur	41.3 cM³	11 %
Tricarballylzuur	40.8 cM³	12 %
Isoallyleentetracarboonzuur	39.8 cM³	14 %

[1]) 6e druk, IIe deel, p. 232.

[2]) Als zóó weinige cM³ titervloeistof voldoende zijn om tot de grenswaarde te komen, is de grens veel minder gemakkelijk te beoordeelen dan anders en de waarnemingen verschillen dan sterker van elkander.

c. Eén carboxylgroep onwerkzaam gemaakt.		
Symmetrisch citroenzuur monoamide	41.1 cM^3	11½ %
Vergeleken met:		
Appelzuur	40.2 cM^3	13½ %
Wijnsteenzuur	40.4 cM^3	13 %
d. Een alkoholgroep en één carboxylgroep onwerkzaam gemaakt.		
Methyleencitroenzuur	43.4 cM^3	5½ %
Vergeleken met:		
Barnsteenzuur	43.6 cM^3	5 %
Glutaarzuur	43.6 cM^3	5 %
Acetondicarboonzuur	43.9 cM^3	6 %
e. Twee carboxylgroepen onwerkzaam gemaakt.		
Citroenzure dimethylester	43.35 cM^3	5½ %
Citrodiamide	43.75 cM^3	5 %
f. Drie groepen onwerkzaam gemaakt.		
Citramide (citrotriamide)	44.4 cM^3	3 %
Diaethylester van citroenzuur monoamide	44.8 cM^3	3 %

Allerlei indifferente zouten van eenwaardige zuren natriumchloride, cyanide, formiaat, acetyl-salicylaat enz.) gebruiken 44.6 à 44.9 cM^3 titervloeistof; dus ook drie procent minder dan water.

Voor de structuurformules der onderzoekte verbindingen verwijs ik naar mijn vorige publicatie [1]), waar ik ze alle aangegeven heb.

Het blijkt uit deze proeven, dat substitutie in de citraten de werking zeer belangrijk verzwakt. Maakt men één groep onwerkzaam (het schijnt van weinig beteekenis te zijn of het de alkohol- of éëne der carboxylgroepen is) dan vindt men 11 à 12 % van het calcium bij de titratie niet meer terug (in plaats van 96 %). Deze hoeveelheid is derhalve in complexen gebonden bij de Ca-ionen concentratie, die met de oplosbaarheid van calciumoleaat overeenkomt in een alkohol-water-mengsel van omstreeks 17 voluumprocenten alkohol (per 100 voluumprocenten vloeistofmengsel). In deze oplossingen zijn de vergeleken citraten en gesubstitueerde citraten in dezelfde molekulaire concentratie voorhanden.

Neemt men twee werkzame groepen tegelijkertijd weg, dan blijkt 5 à 5½ % van het calcium in complexen gebonden te zijn, bij drie groepen nog slechts 3 %.

Om te kunnen vergelijken met welke concentraties van het niet-gesubstitueerde citraat deze getallen overeenkomen, heb ik eenige bepalingen verricht met citraat van veel zwakker molekulaire concentratie (alles in dezelfde maten uitgedrukt als bij de zooeven beschreven proeven):

[1]) Deze verslagen, 26 April 1912 p. 1343—1354.

$^1/_{200}$ N citraat	(0.0050 N)	35.9 cM^3	24 %
$^1/_{400}$ N citraat	(0.0025 N)	42.55 cM^3	7.7 %
$^1/_{800}$ N citraat	(0.00125 N)	44.3 cM^3	3.4 %
geen citraat		45.7 cM^3	—

Daaruit vindt men door intrapolatie, dat 11 à 12 % niet teruggevonden calcium overeenkomt met 0.0033 N; 5 à $5^1/_2$ % met 0.0019 N citraat, en 3 % met 0.0010 N citraat; dat derhalve de werkzaamheid door de substitutie zinkt op resp. $^1/_{15}$, $^1/_{26}$, $^1/_{50}$ harer waarde bij het onveranderde citroenzuur.

Deze getallen vertoonen goede overeenstemming met de uitkomsten der lebstollingsproeven, waar gevonden werd: $^1/_{16}$, $^1/_{100}$, $^1/_{100}$. Bij de onzekerheid in de bepalingen bij kleine hoeveelheden complexvorming kan men geen betere overeenstemming wenschen.

Merken wij nog op, dat ook barium- en strontium-zouten door citraat-toevoeging van hun vrije ionen beroofd worden. Zoo vond ik bij verdunde oplossingen van bariumnitraat, strontiumnitraat en calciumsulfaat, die per 100 cM^3 resp.:

barium	strontium	calcium
23.0 cM^3	25.4 cM^3	25.4 cM^3

titervloeistof noodig hadden, dat zij — wanneer deze 100 cM^3 $^1/_{100}$ resp. $^1/_{50}$ N natriumcitraat bevatten — nog slechts verbruikten:

$^1/_{100}$ N	21.6 cM^3	6.0 cM^3	11.2 cM^3
$^1/_{50}$ N	16.85 cM^3	1.85 cM^3	3.9 cM^3

3. *Conclusies.*

a. De biologische citraat-werking berust op de vermindering van de concentratie der vrije calciumionen door de vorming van complexe verbindingen of ionen. Deze citraat-werking laat zich ook in minder gecompliceerde dan biochemische stelsels, b.v. bij de oplosbaarheid van calciumoleaat in citraat aantoonen.

b. Gesubstitueerde citraten vertoonen daar juist dezelfde vermindering der werkzaamheid als bij een biochemische reactie (zooals de lebstolling) waargenomen is. Neemt men hetzij de alkoholgroep, hetzij één der carboxylgroepen weg, dan zinkt de werkzaamheid op $^1/_{15}$ der waarde; veel sterker in deze vermindering als men twee groepen tegelijkertijd wegneemt.

c. Het citroenzuur heeft zijn sterke werkzaamheid te danken aan het feit, dat het een meerbasisch oxyzuur is.

Proeven met andere meerbasische oxyzuren zijn in bewerking. Voor de litteratuur verwijs ik naar de binnenkort verschijnende uitvoerige Duitsche publicatie.

Hydrodynamica. — J. M. BURGERS: *„Over de grootte van den weerstand bij den turbulenten stroomingstoestand"*.

(Aangeboden door de Heeren P. EHRENFEST en H. KAMERLINGH ONNES).

§ 1. *Inleiding*.

Het probleem, waarover de volgende mededeeling handelt, is een methode te zoeken om den weerstand te berekenen dien een turbulente vloeistofstroom ondervindt. Een volledige oplossing is nog niet verkregen; onderstaande regels bevatten niet meer dan een eerste poging die mogelijk tot het genoemde doel kan leiden.

Het is bekend dat de strooming van een vloeistof door een rechte cilindrische buis of door een kanaal in de meeste gevallen niet eenvoudig in evenwijdige banen met onveranderlijke snelheden verloopt, maar dat ze een onregelmatig pulseerend karakter heeft. De snelheid der vloeistof verandert van punt tot punt en van oogenblik tot oogenblik op onregelmatige wijze. Men noemt deze strooming *turbulent* in tegenstelling met de regelmatige, evenwijdige, z.g. *laminaire* strooming die alleen bij zeer lage snelheden optreedt. Om de strooming te kunnen overzien, wordt het begrip: *gemiddelde* of *hoofdbeweging* ingevoerd. Deze verkrijgt men door in elk punt het tijdsgemiddelde van de snelheid te bepalen, en zich dan de stationaire strooming voor te stellen welke door deze gemiddelde snelheden bepaald is. De werkelijke beweging is dan op te vatten als een samenstelling van deze onveranderlijke hoofdbeweging met een snel veranderlijke *nevenbeweging*; de laatste heeft de gemiddelde snelheid nul [1]).

Een dergelijke turbulente strooming ondervindt in het algemeen een vrij hoogen weerstand, welke tennaastenbij evenredig stijgt met het quadraat van de snelheid der hoofdbeweging. Schrijft men de weerstandswet in den vorm:

$$\text{drukverlies per eenheid van lengte } J = C\,\frac{\varrho V^2}{d},$$

[1]) Met betrekking tot de splitsing in hoofdbeweging en nevenbeweging vergelijke men: H. A. LORENTZ, Turbulente Flüssigkeitsbewegungen und Strömung durch Röhren, Abhandl. über theor. Physik I (1907) p. 58—60.

waar V de gemiddelde stroomingssnelheid is (de hoeveelheid die per tijdseenheid door de buis stroomt, gedeeld door het oppervlak van de doorsnede), d de diameter en ρ de dichtheid van de vloeistof, dan is de coëfficiënt C een functie van het vergelijkingsgetal van Reynolds: $R = \frac{Vd\rho}{\mu}$ (μ is de coëfficiënt der inwendige wrijving van de vloeistof). Voor deze C wordt opgegeven:

a. voor buizen met ruwen wand: C is bij benadering onafhankelijk van R (maar wel afhankelijk van den graad van ruwheid);

b. voor buizen met zeer gladden wand en cirkelvormige doorsnede:

$$C = 0{,}1582\, R^{-\frac{1}{4}}$$ [1].

De meeste theoretische onderzoekingen over de turbulente strooming behandelen het probleem: hoe *ontstaat* deze bewegingstoestand? [2]) Beschouwingen over den *weerstand* door deze strooming ondervonden zijn gegeven door O. Reynolds en H. A. Lorentz [3]). Meermalen is de onderstelling uitgesproken dat dit probleem met statistische methodes moet worden aangepakt [4]). Dit ligt ook voor de hand: de weerstand dien de strooming ondervindt en dien men kan meten, is een gemiddelde over steeds wisselende en nooit exact terugkeerende toestanden. Het is dus aannemelijk dat men ook zonder nauwkeurige kennis van het verloop der nevenbewegingen reeds iets over dergelijke gemiddelden kan te weten komen.

In de volgende regels wordt een voorloopige poging gedaan om tot een verklaring van de quadratische weerstandsformule te komen. Het eerste gedeelte (§ 2 en 3) bevat een beschouwing over een door Reynolds en Lorentz afgeleide vergelijking, welke in een zoodanigen vorm wordt gebracht dat duidelijk blijkt van welke grootheden men de gemiddelde waarden moet kennen, om den weerstand te kunnen bepalen. In het tweede gedeelte (§ 4 en 5) wordt een zeer eenvoudig „stroomingsmodel” besproken, waarvoor deze gemiddelden bepaald kunnen worden.

In de plaats van de strooming door een buis of kanaal is in deze

---

1) Vergelijk voor meer nauwkeurige gegevens b.v. R. von Mises, Elemente der Techn. Hydromechanik I (1914) p. 57 en H. Blasius, Mitt. über Forschungsarbeiten herausgeg. vom V. D. I., Heft 131 (1913).

2) Zie b.v. het referaat van F. Noether, ZS. für angew. Math. u. Mechanik **1**, p. 125, 1921.

3) O. Reynolds, Scientific Papers II, p. 575—577;
H. A. Lorentz, l.c. p. 66—71.

4) O. a. door Th. von Kármán in een voordracht op de Versammlung der Mathematiker und Physiker in Jena 1921; zie ook een opmerking in ZS. für angew. Math. u. Mechanik I, p. 250, 1921.

§ § een eenvoudiger geval genomen: de strooming tusschen twee evenwijdige wanden, op een afstand l van elkaar, waarvan de een zich t. o. v. de andere met de snelheid V verplaatst (zie fig. 1). Daartoe moeten op de wanden resp. de krachten $+S$ en

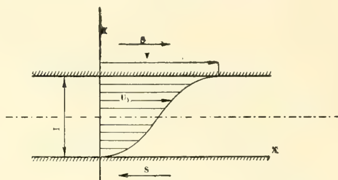


Fig. 1.

$-S$ werken per eenheid van oppervlak; dezelfde grootte heeft ook de tangentieele kracht tusschen elk paar aan elkaar grenzende vloeistoflagen. Men schrijft de weerstandswet:

$$s = C \varrho V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan is C weer een functie van het getal van Reynolds, hetwelk hier wordt:

$$R = \frac{V l \varrho}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bij kleine waarden van R is de strooming laminair, en men kan afleiden dat:

$$C = \frac{1}{R} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bij groote waarden van R daarentegen, waarbij de strooming turbulent is, neemt C veel minder sterk af wanneer R stijgt, of blijft constant. Directe metingen voor dit geval bestaan er niet; op grond van proeven van Couette [1]) zou men mogen verwachten:

$$C = c_1 + c_2 R^{-1} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

op grond van beschouwingen van von Kármán over het verloop der snelheid van de hoofdbeweging als functie van den afstand tot den wand: [2])

$$C = 0.008 \, R^{-1/4} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

Er wordt gerekend alsof de strooming *tweedimensionaal* is, d.w.z. dat er slechts bewegingen in een plat vlak worden toegelaten.

[1]) M. Couette, Ann. de Chim. et de Phys. (6) **21**, p. 457, 1890.

[2]) Th. von Kármán, ZS. für angew. Math. u. Mechanik, l.c.

Ofschoon deze beperking in strijd is met de werkelijkheid, is ze ingevoerd om door het rekenwerk te kunnen komen.

In § 7 wordt nog kort de strooming tusschen twee vaste wanden besproken.

§ 2. *De hoofdvergelijking.*

In het volgende wordt de gemiddelde of hoofdbeweging aangeduid door U. Ze is een functie van y, en heeft aan den wand $y = 0$ de waarde 0, aan den wand $y = l$ de waarde V. De componenten van de snelheid der nevenbeweging zijn u en v; de wervelsterkte der nevenbeweging zij:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Deze grootheden zijn functies van x, y en van den tijd t. u en v zijn onderworpen aan de voorwaarden:

$$u = 0, v = 0 \text{ voor } y = 0 \text{ en voor } y = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en aan de continuiteitsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Door Reynolds en Lorentz is aangetoond dat het bijzondere karakter der turbulente strooming een gevolg is van het optreden van een schijnbare wrijvingskracht, die de hoofdbeweging ondervindt door de aanwezigheid der nevenbewegingen. Dit wordt uitgedrukt door de formule:

$$\mu \frac{dU}{dy} - \varrho\, \overline{uv} = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waar de streep boven uv de gemiddelde waarde dezer grootheid in een bepaald punt gedurende zeker tijdsverloop aangeeft, of op een bepaald oogenblik langs een lijn evenwijdig met de x-as. Dit tijdsgemiddelde is dus alleen een functie van y (hetzelfde geldt voor $\overline{\zeta^2}$ in (9)). De grootheid $\overline{uv}$ is *negatief*, en $S > \mu \dfrac{dU}{dy}$.

De nevenbewegingen zijn echter niet onafhankelijk van de hoofdbeweging. Zullen de nevenbewegingen steeds dezelfde energie behouden, dan moet voldaan zijn aan:

$$-\int_0^l dy\, \varrho\, \overline{uv} \frac{dU}{dy} = \int_0^l dy\, \mu\, \overline{\zeta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De vergelijkingen (8) en (9) zijn de op dit bijzondere geval toegepaste formules (36) en (46) uit het aangehaalde artikel van LORENTZ.

Uit (8) en (9) kan men de grootheid $\frac{dU}{dy}$ elimineeren:

$$-S\int_0^l dy\,\varrho\,\overline{uv} = \int_0^l dy\,\{\varrho^2\,(\overline{uv})^2 + \mu^2\,\overline{\zeta^2}\}\,. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Verder geeft (8) door integratie:

$$\mu V = Sl + \int_0^l dy\,\varrho\,\overline{uv}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wanneer nu S geëlimineerd wordt uit (10) en (11), krijgt men:

$$\frac{\mu V}{l} = \left.\frac{\int_0^l dy\,\{\varrho^2\,(\overline{uv})^2 + \mu^2\,\overline{\zeta^2}\} - \frac{1}{l}\left(\int_0^l dy\,\varrho\,\overline{uv}\right)^2}{-\int_0^l dy\,\varrho\,\overline{uv}}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

Om deze vergelijking eenvoudiger te maken voer ik onbenoemde variabelen in door de formules:

$$x = l\,x',\, y = ly'\,;\, u = Vu',\, v' = Vv'\,;\, \zeta = \frac{V}{l}\,\zeta' \quad . \quad . \quad (13)$$

Daardoor krijgt men, wanneer nu de accenten weer worden weggelaten:

$$\frac{1}{R} = \left.\frac{\int_0^1 dy\,(\overline{uv})^2 - \left(\int_0^1 dy\,\overline{uv}\right)^2}{-\int_0^1 dy\,\overline{uv}} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\int_0^1 dy\,\overline{\zeta^2}}{-\int_0^1 dy\,\overline{uv}}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

en daarnaast uit (11):

$$\frac{S}{\varrho V^2} = -\int_0^1 dy\,\overline{uv} + \frac{1}{R}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

De vergelijkingen worden nog iets overzichtelijker wanneer men de volgende afkortingen invoert:

$$\left.\begin{aligned} -\int_0^1 dy\, \overline{uv} &= \sigma \\ \int_0^1 dy\, (\overline{uv})^2 &= (1+\tau)\,\sigma^2 \\ \int_0^1 dy\, \overline{\zeta^2} &= \varkappa\sigma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Dan zijn σ, τ en $\varkappa$ alle drie *positieve* grootheden.

De vergelijkingen (14) en (15) krijgen daardoor de volgende gedaante:

$$\underline{\sigma\tau + \frac{\varkappa}{R^2} = \frac{1}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

en:

$$\frac{S}{\varrho V^2} = C = \sigma + \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

De formule (17) zal worden aangeduid als de *hoofdvergelijking.*

§ 3. *Onderzoek van de hoofdvergelijking.*

Vergelijking (17) toont vooreerst dat wanneer de snelheid V van de hoofdbeweging en daarmede R stijgt, de nevenbewegingen niet gelijkvormig kunnen veranderen: σ, τ en $\varkappa$ kunnen niet alle drie constant blijven, wanneer R verandert.

Als R gegeven is, stelt (17) een voorwaarde voor waaraan de nevenbewegingen moeten voldoen. Heeft men een nevenbeweging die eraan voldoet, dan geeft (18) de waarde van den weerstandscoëfficiënt die zou optreden, wanneer deze nevenbeweging inderdaad de hoofdstroom vergezelt. Het probleem dat zich nu voordoet luidt dus: is het mogelijk dat men aannemelijke waarden voor de grootheden τ en $\varkappa$ kan vinden — waaruit dan met behulp van (17) en (18) de waarde van σ en die van den weerstandscoëfficiënt volgt — zonder dat men de nevenbewegingen exact behoeft te berekenen? Naar analogie met de toepassing der statistische methode in de kinetische gastheorie zou men kunnen verwachten dat wanneer R groot is, en dus de turbulente toestand goed ontwikkeld, het mogelijk moet zijn τ en $\varkappa$ te berekenen door alle nevenbewegingen te beschouwen die aan (6) en (7) voldoen, aan deze bewegingen een zeker gewicht toe te kennen op grond van de een of andere waarschijnlijkheidshypothese, of een maximum- of minimumvoorwaarde,

en dan over alle het gemiddelde te nemen. De moeilijkheid wordt dan overgebracht naar de keus van deze voorwaarde.

Zonder echter in deze kwestie een beslissing te nemen, kan men ook — daarop heeft Prof. VON KÁRMÁN te Aken mij attent gemaakt — eerst vragen naar de *maximale waarde* die s, of σ, kan aannemen, wanneer men alleen op (17) en de voorwaarden (6) en (7) acht geeft. Dit zou een bovenste grens geven voor den weerstand bij turbulente strooming.

Dat er een maximale waarde zijn moet kan men aldus inzien:

Uit (17) volgt dat σ alleen dan groot kan worden (meer in 't bijzonder groot t. o. v. $\frac{1}{R}$), wanneer $\varkappa < R$ is, en wanneer τ zeer klein wordt. De waarde van τ hangt samen met de verdeeling van $\overline{uv}$ over het gebied $0 < y < 1$; τ zou alleen dan gelijk nul kunnen zijn, wanneer $\overline{uv}$ een constante waarde had. Dit is echter niet mogelijk, daar u en v beide nul moeten worden aan de wanden. Het gunstigste is dus dat $\overline{uv}$ een constante waarde heeft in het geheele gebied, met uitzondering van twee dunne „grenslagen" langs de wanden, waarin $\overline{uv}$ van deze waarde daalt tot 0. Is de dikte dezer grenslagen ε, dan is τ van dezelfde orde van grootte als ε; dus met een getallenfactor c_1:

$$\tau = c_1 \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

In deze grenslagen is de gradiënt van u, $\frac{\partial u}{\partial y}$, en dus de wervelsterkte ζ, van dezelfde orde van grootte als ε^{-1}, zoodat $\overline{\zeta^2}$ evenredig is met ε^{-2}, en — wanneer deze sterke werveling alleen in de grenslagen voorkomt —:

$$\varkappa = c_2 \varepsilon^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Dan levert (17):

$$\sigma = \frac{1}{c_1 \varepsilon R} - \frac{c_2}{c_1 \varepsilon^2 R^2}$$

Deze uitdrukking heeft een maximum als:

$$\varepsilon = \frac{2 c_2}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

(de dikte van de grenslaag is dus omgekeerd evenredig met R); dan is:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{4 c_1 c_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

σ krijgt een constante waarde; men zou dus volgens (18) asymptotisch naderen tot de *quadratische weerstandswet.*

Deze schematische redeneering is echter vaag, en laat niet toe de waarde der coëfficiënten c_1 en c_2, en daarmee die van σ te bepalen. Ze toont alleen dat de vloeistofdeeltjes met sterke werveling (d.i. groote waarden van ζ^2 — men bedenke dat $\overline{\zeta} = 0$) langs de wanden geconcentreerd moeten zijn. Om verder te komen moet men trachten een beeld te vormen van de structuur van het wervelveld. Daarbij kan men twee wegen volgen: men kan trachten de mogelijke wervelverdeelingen op de wijze van de FOURIER-ontwikkeling te ontleden in een som van elementaire functies, goniometrische of andere; of men kan zich een verzameling van min of meer geïndividualiseerde wervels (werveldraden met de as loodrecht op het x-y-vlak) voorstellen die op de een of andere wijze over de strooming verdeeld zijn. Analoge methodes zijn toegepast ter berekening van de waarde van R waarbij de turbulentie intreedt: REYNOLDS, ORR e.a. hebben storingen beschouwd die als een soort golfbeweging door de geheele strooming heengaan; LORENTZ heeft daarentegen de storing door een enkelen wervel veroorzaakt, onderzocht[1]).

De statistische behandeling van een dergelijke verzameling van elementaire bewegingen wordt bemoeilijkt door de omstandigheid dat elke elementaire beweging door de werking der inwendige wrijving gedempt wordt. Daartegenover staat dat door de onderlinge wisselwerking der elementaire bewegingen (de hydrodynamische vergelijkingen zijn quadratisch!) en door den invloed van de hoofdbeweging voortdurend nieuwe bewegingen ontstaan. Uit de door LORENTZ afgeleide formules volgt dat die bewegingsvormen waarvoor $\iint dx\, dy\, uv$ negatief is, versterkt worden door de hoofdbeweging. Er kan dus een gemiddelde stationaire toestand bestaan, waarbij elke elementaire beweging wel voortdurend van intensiteit, van fase of van plaats wisselt, maar waar voor elk een zekere gemiddelde sterkte kan worden aangegeven. Natuurlijk zullen dit in hoofdzaak bewegingsvormen zijn waarvoor $\iint dx\, dy\, uv < 0$ is.

Het statistische probleem wordt hier niet uitgewerkt. In de beide volgende §§ zal echter een eenvoudig type van een wervelveld worden opgebouwd uit een verzameling van scheefliggende,

---

[1]) O. REYNOLDS, l.c. p. 570;
W. MC. F. ORR, Proc. Roy. Irish Acad. **27**, p. 124—128, 1907;
H. A. LORENTZ, l.c. p. 48.

elliptische wervels, alle van dezelfde gedaante, maar van verschillende grootten. Bij een bepaalde rangschikking en intensiteitsverdeeling is het inderdaad mogelijk τ zeer klein te maken, terwijl $\varkappa < R$ blijft. In de wijze waarop men de diameters der wervels kiest, heeft men dan nog een arbitrair element, dat toelaat naar een zoo groot mogelijke waarde van σ te zoeken.

§ 4. *De elliptische wervel van* LORENTZ.

Door LORENTZ is aangetoond dat men een eenvoudigen bewegingsvorm die voldoet aan (6) en (7), en waarvoor $\iint dx\, dy\, uv < 0$ is, kan verkrijgen door een wervelbeweging te beschouwen, waar de vloeistof in elliptische banen rondloopt [1]). Deze beweging is meetkundig af te leiden uit een cirkelvormigen wervel, door deze in één richting samen te drukken. In de laatste stroomt de vloeistof in concentrische ringen met de hoeksnelheid ω, welke een functie is van den straal van den ring, en aan den buitenrand de waarde nul heeft, terwijl in het centrum ω en $\frac{d\omega}{dr}$ eindige waarden hebben. Het verloop van ω als functie van den straal, dat bij LORENTZ door een BESSEL-functie is bepaald, wordt hier anders genomen.

De constructie van den elliptischen wervel is aangeduid in fig. 2. De

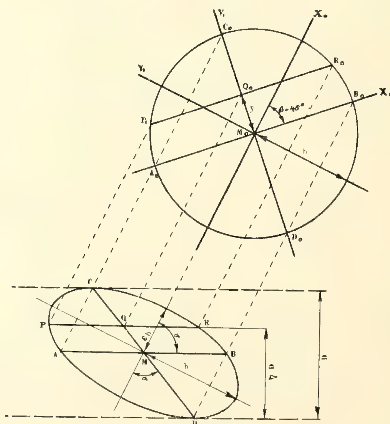


Fig. 2.

1) H. A. LORENTZ, l.c. p. 48—52.

assen hebben de lengten $2b$ en $2\varepsilon b$, waar $\varepsilon = {}^1/_3 (\sqrt{15} - \sqrt{6}) = 0{,}475$; de kleine as maakt met de richting der hoofdbeweging de hoek $\alpha = arctg \frac{1}{\varepsilon}$. De geconjugeerde middellijnen AB en CD correspondeeren met de middellijnen $A_0 B_0$ en $C_0 D_0$ in den cirkel, die hoeken van 45° maken met de richtingen van de hoofdassen der ellips. Naast het door LORENTZ gebruikte coordinatenstelsel $x_0 y_0$ wordt nog ingevoerd het stelsel $x_1 y_1$ langs $M_0 B_0$ en $M_0 C_0$.

Uit de door LORENTZ op blz. 49 gegeven formules volgt voor de waarde van uv in een punt van den wervel dat correspondeert met een punt $x_0 y_0$ in den cirkel:

$$\left.\begin{aligned} M_0 = -uv &= \frac{1}{2}(x_0^2 - \varepsilon^2 y_0^2)\, \omega^2 \sin 2\alpha + \varepsilon x_0 y_0\, \omega^2 \cos 2\alpha = \\ &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\, \omega^2 \{x_1^2(1-\varepsilon^2) + x_1 y_1 (1+\varepsilon^2)\} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Nu moet — ter bepaling van de gemiddelde waarde van uv langs een lijn, evenwijdig aan de x-as — de integraal van M_0 langs een lijn PR (evenwijdig aan de x-as) berekend worden. Deze lijn correspondeert met $P_0 R_0$ in den cirkel; de lengten dezer lijnen hebben de standvastige verhouding:

$$\frac{AB}{A_0 B_0} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \alpha} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2}}$$

Deze integraal wordt dus:

$$M_1 = \int_{-\sqrt{b^2 - y_1^2}}^{+\sqrt{b^2 - y_1^2}} dx_1 \frac{\varepsilon \omega^2}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}} \{x_1^2 (1-\varepsilon^2) + x_1 y_1 (1+\varepsilon^2)\}. \quad . \quad (24)$$

Nu is ω een functie van $r_0 = \sqrt{x^2_0 + y^2_0} = \sqrt{x^2_1 + y^2_1}$; hiervoor wordt genomen:

$$\omega = c\,(b^2 - r_0^2)^{5/4} = c\,(b_2 - x_1^2 - y_1^2)^{5/4} \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

De tweede term van de integraal verdwijnt door de symmetrie van ω; men vindt:

$$M_1 = \frac{\sqrt{2}\, \varepsilon (1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, c^2 \int_0^{\sqrt{b^2 - y_1^2}} dx_1\, x_1^2\, (b^2 - x_1^2 - y_1^2)^{5/2}$$

[1]) In de verdere formules komt alleen c^2 voor; het teeken van c doet niet ter zake.

of na de substitutie:

$$x_1 = \sqrt{b^2 - y_1^2}\, sin\, \chi,$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, c^2\,(b^2 - y_1^2)^4 \int_0^{\pi/2} d\chi\, sin^2\chi\, cos^6\chi = \\ &= \frac{5\pi}{256}\, \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, c^2\,(b^2 - y_1^2)^4 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (26)$$

De keuze van form. (25) was er op gericht om het door (26) gegeven verloop van M_1, dat de latere berekeningen gemakkelijk maakt, te krijgen. Voert men nog een variabele η in (zie fig. 2), welke op de raaklijn in D de waarde 0 heeft, en op de raaklijn in C de waarde 1, dan is:

$$\eta = \frac{y_1 + b}{2\,b}$$

en dus:

$$M_1 = A\eta^4\,(1-\eta)^4 = A\varphi\,(\eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

waar A een van η onafhankelijke factor is.

Stelt men zich voor dat in de strooming een verzameling van dergelijke wervels aanwezig is, alle van dezelfde grootte en stand, alle tusschen dezelfde raaklijnen evenwijdig aan de stroomrichting gelegen, dan geven deze een bijdrage in het $\overline{uv}$-veld van de door (27) gegeven gedaante (zie fig. 3) [1]).

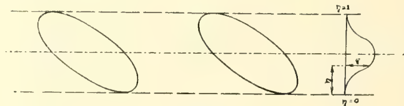


Fig. 3.

De integraal van M_0 over den geheelen wervel wordt:

$$M_2 = \frac{2\pi}{63}\,\frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon^2}\,c^2\,b^9 . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

---

[1]) Hetzelfde verloop van M_1 is te verkrijgen met andere typen van stroomingen, b.v. met:

$$\Psi = \eta^2\,(1-\eta^2)\,(e^{1-\eta}\,cos\,ax - e^{\eta}\,sin\,ax)$$

voor η tusschen 0 en 1, en

$$u = -\,\partial\,\Psi/\partial x,\; v = \partial\,\Psi/\partial y\,.$$

Daarnaast is $N_2 = \iint dxdy\, \zeta^2$ over het oppervlak van den wervel, volgens de formules van LORENTZ:

$$N_2 = \frac{\pi}{4\varepsilon}(3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4)\int_0^b dr_0\, r_0^3 \left(\frac{d\omega}{dr_0}\right)^2 = \frac{5\pi}{42}\frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon} c^2 b^7 \quad . \quad (29)$$

Zoodat:

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{15}{4}\frac{(3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4)(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon^3 (1-\varepsilon^2)}\frac{1}{b^2},$$

of met:

$$b = D\frac{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}{4\varepsilon},$$

waar D de „dikte" van den wervel is,

$$\frac{N_2}{M_2} = 30\frac{3 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\frac{1}{D^2} = \frac{294}{D^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Deze waarde is slechts weinig hooger dan de door LORENTZ berekende minimum-waarde:

$$14{,}68\frac{2(3+2\varepsilon^2+3\varepsilon^4)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\frac{1}{D^2} \doteq \frac{288}{D^2}$$ [1])

§ 5. *Constructie van het wervelveld.*

In § 1 en 3 is reeds opgemerkt dat de bedoeling van deze § niet is een analyse te geven van de ware gedaante van het wervelveld, maar een geïdealiseerd geval, een „model" te beschouwen, dat een bruikbaar beeld geeft van het gedrag der grootheden $\overline{uv}$ en $\overline{\zeta^2}$. Dit „model" is verkregen door in den hoofdstroom $U(y)$ een aantal elliptische wervels van de boven besproken vorm en stand te rangschikken. Daarbij komt het niet aan op de x-coordinaten van de centra der wervels, mits de gemiddelde verdeeling over lijnen evenwijdig aan de x-as gelijkmatig zij. Positief en negatief roteerende wervels zijn gelijkmatig door elkaar verspreid. Wanneer wervels geheel of gedeeltelijk over elkaar vallen, is er evenveel kans dat ze elkaars u-, v- of ζ-veld versterken als verzwakken; bij de bepaling van de gemiddelden $\overline{uv}$ en $\overline{\zeta^2}$ behoeft men dus hierop geen acht te geven, en men kan de bijdragen die de wervels elk voor zich geven eenvoudig sommeeren.

Beperkt men zich een oogenblik tot een groep wervels wier „dikten" D (zie fig. 2) liggen tusschen D en $D + dD$, en wier

[1]) Zie de opmerking bij LORENTZ, p. 54/55. De door (25) bepaalde functie voldoet eveneens aan $d\omega/ds = 0$ voor $s = 1$ $(s = r_0/b)$.

onderrand (d. i. de raaklijn in het punt D in dezelfde figuur) ligt tusschen $y = \xi$ en $y = \xi + d\xi$, zoodat ze alle tusschen dezelfde lijnen evenwijdig aan de x-as gelegen zijn, dan geven deze alle evenredige bijdragen in het $\overline{uv}$-veld. De integraal: $-\int dx\, uv$ over een doorsnede PR van een enkelen wervel is gegeven door (26) of (27). De bijdrage van de geheele groep in $-\overline{uv}$ is hiermee evenredig, en zal dus voorgesteld kunnen worden door:

$$b\,(D,\xi)\,\eta^4\,(1-\eta)^4\,dD\,d\xi = b\varphi\,(\eta)\,dD\,d\xi,$$

waarin: $\eta = (y-\xi)/D$, en waar de factor $b\,(D,\xi)\,dDd\xi$ het product is van het aantal wervels dezer groep op een strook van de eenheid van lengte evenwijdig aan de x-as, hun gemiddelde sterkte (gem. van c^2), en de verdere factoren die in (27) in de letter A zijn ondergebracht. Het $\overline{uv}$-veld is dus te berekenen, zoodra de functie $b\,(D,\xi)$ gegeven is.

Van de grootheid $\overline{\zeta^2}$ behoeft men alleen de integraal over de geheele doorsnede te kennen, welke te vinden is als de som van de integralen van ζ^2 over alle wervels die liggen in een strook van de eenheid van lengte evenwijdig aan de x-as, en van de volle breedte. Met behulp van (30) vindt men voor de bijdrage die de bovengenoemde groep wervels hierin levert:

$$\left.\begin{aligned}&\iint dx\,dy\,\zeta^2 = -\frac{294}{D^2}\iint dx\,dy\,uv = \\ &= \frac{294}{D^2}\,b\,dD\,d\xi\int_{\xi}^{\xi+D} dy\,\varphi\left(\frac{y-\xi}{D}\right) = \frac{294}{630}\,\frac{b\,dD\,d\xi}{D}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

De vergelijkingen (16) ter bepaling van τ en $\varkappa$ zijn homogeen t.o.v. de intensiteit der wervels. Men mag dus in deze vergelijkingen b met een willekeurigen factor vermenigvuldigen. De werkelijke waarde van de grootheid σ volgt dan uit de hoofdvergelijking (17). Hieruit zou achteraf de juiste waarde van b gevonden kunnen worden, wat echter onnoodig is.

Het in § 3 gestelde probleem: σ zoo groot mogelijk te maken, eischt nu een verdeelingsfunctie $b\,(D,\xi)$ te zoeken, die voor $-\overline{uv}$ een zooveel mogelijk constante waarde levert. Ik zal nu twee betrekkelijk eenvoudige verdeelingen bespreken.

I. Men kan vooreerst beproeven wat te bereiken is, wanneer men zich beperkt tot wervels van één bepaalde dikte D. Dan wordt een constante waarde van $-\overline{uv}$ verkregen, door b onafhankelijk van ξ

te nemen, d. w. z. de wervels gelijkmatig over de doorsnede te verspreiden. De wervels kunnen echter niet door de wanden heen dringen; dus is:

$$\left.\begin{array}{ll} b = \text{constante}, & \text{voor } 0 < \xi < 1 - D \\ b = 0 & , \text{voor } \xi < 0 \text{ en } \xi > 1 - D \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Daaruit volgt dat $-\overline{uv}$ alleen in het gebied $D < y < 1 - D$ een constante waarde kan hebben, in de overblijvende strooken daalt ze tot nul.

Afgezien van een constanten factor vindt men:

a) voor $y < D$:

$$-\overline{uv} = \int_0^y d\xi\, \varphi\left(\frac{y-\xi}{D}\right) = D \int_0^{y/D} d\eta\, \varphi(\eta) =$$

$$= \frac{D}{630}\left\{126\left(\frac{y}{D}\right)^5 - 420\left(\frac{y}{D}\right)^6 + 540\left(\frac{y}{D}\right)^7 - 315\left(\frac{y}{D}\right)^8 + 70\left(\frac{y}{D}\right)^9\right\}$$

b) voor $D < y < 1 - D$:

$$-\overline{uv} = \int_{y-D}^{y} d\xi\, \varphi\left(\frac{y-\xi}{D}\right) = D \int_0^1 d\eta\, \varphi(\eta) = \frac{D}{630} \qquad (33)$$

c) voor $y > 1 - D$ moet in de onder a) gegeven uitdrukking y vervangen worden door $1 - y$.

Nu wordt:

$$-\int_0^1 dy\, \overline{uv} = \frac{D}{630}(1-D)$$

$$\int_0^1 dy\, (\overline{uv})^2 = \left(\frac{D}{630}\right)^2 (1 - 1{,}172\, D),$$

zoodat:

$$\tau = 0{,}828\, D + \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Daar alle wervels even groot zijn geeft (30) onmiddellijk:

$$\varkappa = \frac{294}{D^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Uit vergelijking (17) volgt nu:

$$\sigma = \frac{1}{0{,}828\, DR} - \frac{294}{0{,}828\, D^3 R^2} - \ldots \ldots \quad (36)$$

(wanneer men zich beperkt tot de termen van de hoogste orde).

Deze uitdrukking heeft een maximum wanneer de dikte D der wervels gelijk is aan:

$$D = \frac{29,7}{\sqrt{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

dan is:

$$\sigma = \frac{0,027}{\sqrt{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

De weerstandscoëfficiënt C wordt volgens formule (18):

$$C = \frac{S}{\varrho V^2} = \frac{0,027}{\sqrt{R}} + \text{termen van de orde } \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad (39)$$

Men komt dus tot een weerstandswet waar S evenredig is met de $1\frac{1}{2}$-*de macht van* V. Dit is niet in overeenstemming met de beschouwingen van § 3. Daar was echter aangenomen dat de intensiefste werveling alleen aan de wanden geconcentreerd was, terwijl ze hier over de geheele doorsnede gelijkmatig is verspreid. Dit is hier niet anders te verkrijgen zonder het $\overline{uv}$-veld te storen. Men moet dus zoeken of een ander model, met wervels van verschillende afmetingen, een beter resultaat kan geven.

II. Wanneer het wervelveld wordt opgebouwd uit wervels van verschillende dikten, b.v. vanaf de dikte $D = 1$ (deze nemen juist de volle breedte van de strooming in), tot een later te bepalen minimum-waarde D_0, dan zal de dikte der grenslagen, en daarmee de waarde van τ, op zijn gunstigst van dezelfde orde van kleinheid zijn als D_0. Indien nu de bijdrage die iedere grootte van wervels in $\int \zeta^2 \, dy$ levert, ten minste asymptotisch voor kleine D's, evenredig was met $\frac{dD}{D^2}$, zou deze integraal zelf evenredig worden met $\frac{1}{D_0}$. Dan zou men een analoge verhouding krijgen als die welke verg. (19) en (20) weergeven. Daartoe zou volgens (31) noodig zijn dat $B = \int b d\xi$ voor kleine D's evenredig werd met $\frac{1}{D}$.

Nu bleek mij, dat inderdaad een verdeeling te vinden is die aan deze eischen voldoet, wanneer men alle wervels *tegen de wanden* aan legt. Hiermee is ξ vastgelegd. Voor $B(D)$ moest ik het volgende verloop aannemen:

1. de wervels met dikten tusschen D en $D + dD$ hebben een gezamenlijke intensiteit evenredig met $B \, dD = 2 \frac{dD}{D}$; deze wervels vallen in twee groepen uiteen, elk langs één van de wanden gelegen;

2. bovendien komt nog een aantal wervels met de dikte 1 voor, die de gezamenlijke intensiteit $^1/_4$ hebben.

Daarmee vindt men voor $-\overline{uv}$, wanneer $D_0 < y < 1 - D_0$:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{uv} &= \int_y^1 \frac{dD}{D}\,\varphi\left(\frac{y}{D}\right) + \int_{1-y}^1 \frac{dD}{D}\,\varphi\left(\frac{1-y}{D}\right) + \frac{1}{4}\,\varphi(y) = \\ &= \int_y^1 \frac{d\eta}{\eta}\,\varphi(\eta) + \int_{1-y}^1 \frac{d\eta}{\eta}\,\varphi(\eta) + \frac{1}{4}\,\varphi(y) = \\ &= \frac{1}{280} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

De eerste term stelt voor de bijdrage van de wervels die tegen den wand $y = 0$ liggen; hiervan komen alleen in aanmerking diegene waarvoor $D > y$ is. De tweede term geeft de bijdrage van de wervels die tegen den anderen wand liggen; voor deze moet $D > 1 - y$ zijn. De derde term is de bijdrage van de afzonderlijke groep wervels met $D = 1$ [1]).

In de grenslaag $0 < y < D_0$ vindt men:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{uv} &= \int_{D_0}^1 \frac{dD}{D}\,\varphi\left(\frac{y}{D}\right) + \int_{1-y}^1 \frac{dD}{D}\,\varphi\left(\frac{1-y}{D}\right) + \frac{1}{4}\,\varphi(y) = \\ &= \frac{1}{280} - \int_y^{D_0} \frac{dD}{D}\,\varphi\left(\frac{y}{D}\right) = \\ &= \frac{1}{280}\left\{70\left(\frac{y}{D_0}\right)^4 - 224\left(\frac{y}{D_0}\right)^5 + 280\left(\frac{y}{D_0}\right)^6 - 160\left(\frac{y}{D_0}\right)^7 + 35\left(\frac{y}{D_0}\right)^8\right\} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Uit de formules (40) en (41) volgt dan:

$$-\int_0^1 dy\,\overline{uv} = \frac{1}{280}\,(1 - 0{,}889\,D_0)$$

$$\int_0^1 dy\,(\overline{uv})^2 = \left(\frac{1}{280}\right)^2 (1 - 1{,}068\,D_0)$$

---

1) Neemt men B evenredig met D^{-n}, waar $n < 1$, dan wordt wel $\int \overline{\zeta^2}\,dy$ kleiner, maar de in $-\overline{uv}$ voorkomende integraal die de bijdrage der wervels tegen den wand $y = 0$ gelegen geeft, wordt:

$$\int_y^1 \frac{dD}{D^n}\,\varphi\left(\frac{y}{D}\right) = y^{1-n}\int_y^1 d\eta\,\eta^{2+n}\,(1-\eta)^4 \text{ (voor } y > D_0)$$

zoodat:

$$\tau = 0{,}710\, D_0 - \ldots \qquad (42)$$

De berekening van $\varkappa$ kan als volgt geschieden: De wervels met diameters tusschen D en $D + dD$ leveren in $-\int dy\, \overline{uv}$ de bijdrage:

$$2\frac{dD}{D}\int_0^D dy\, \varphi\left(\frac{y}{D}\right) = \frac{dD}{315};$$

in $\int dy\, \overline{\zeta^2}$ leveren ze dus op grond van (30):

$$\frac{294}{315}\frac{dD}{D^2}$$

Daarbij komt nog de afzonderlijke bijdrage der groote wervels met $D = 1$:

in $\qquad -\int dy\, \overline{uv} \; : \; \frac{1}{2520};$

dus in $\qquad \int dy\, \overline{\zeta^2} \; : \; \frac{294}{2520}.$

In totaal wordt dus:

$$\int dy\, \overline{\zeta^2} = \frac{294}{315}\left(\frac{1}{D_0} - 1\right) + \frac{294}{2520} = \frac{294}{315}\left(\frac{1}{D_0} - \frac{7}{8}\right).$$

Tenslotte verkrijgt men:

$$\varkappa = \frac{261}{D_0} + \ldots \qquad (43)$$

Substitueert men de waarden van τ en $\varkappa$ in de hoofdvergelijking (17), dan volgt voor σ (wanneer men zich weer beperkt tot de termen van de hoogste orde):

$$\sigma = \frac{1}{0{,}710\, D_0\, R} - \frac{261}{0{,}710\, D_0^3\, R^2} - \ldots \qquad (44)$$

Het maximum van τ treedt op wanneer de minimumdikte D_0 der wervels bepaald is door:

$$D_0 = \frac{522}{R} \qquad (45)$$

Dit is heel wat lager dan de voor alle wervels gelijke dikte D in verg. (37). Met (45) wordt:

$$\underline{\sigma = 0{,}00135 + \ldots} \qquad (46)$$

Deze uitdrukking nadert bij $n < 1$ tot *nul*, zoo y zeer klein wordt; alleen wanneer $n = 1$ is nadert ze tot een van y onafhankelijke waarde, en gelukt het $-\overline{uv}$ tot aan de grenslaag constant te maken.

en de weerstandscoëfficiënt:

$$C = \frac{S}{\varrho V^2} = 0{,}00135 + \text{termen van de orde } \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad (47)$$

Deze verdeeling der wervels leidt dus tot de *quadratische* weerstandswet.

§ 6. *Discussie.*

In § 5 II is met behulp van een geïdealiseerd model van het wervelveld als grootste waarde van den weerstandscoëfficiënt gevonden: $C = 0{,}00135$ voor groote waarden van R.

Het maximum dat C kan aannemen, wanneer niet dit speciale model was gebruikt, maar alleen acht gegeven op de vergelijkingen (17) en (18) en de voorwaarden (6) en (7), zal vermoedelijk hier nog boven vallen. Zeker zal het er niet onder blijven. Vergelijkt men de waarde van C met hetgeen verwacht werd volgens formule (4*b*), dan blijkt dat in het hier in aanmerking komende gebied, ongeveer $R = 10000—1000000$ [1]), *C te hoog* is.

De werkelijke weerstand is dus *niet* de *maximaal mogelijke*. Ter bepaling van den waren toestand is dus nog een voorwaarde noodig, evenals men in de kinetische gastheorie naast den eisch: zoo gering mogelijke energie, een tweede voorwaarde (uitgedrukt door de waarschijnlijkheidshypothese) heeft ingevoerd.

Dat C te hoog is, wijst er op dat de verdeeling van $-\overline{uv}$ te gelijkmatig is. In verband met hetgeen de metingen omtrent de verdeeling van de snelheid der hoofdbeweging over de breedte van de strooming geleerd hebben, moet men verwachten dat $-\overline{uv}$ geen constante waarde heeft in het gebied tusschen de grenslagen, maar dat het verloop iets meer is afgerond. Dit zou daaraan kunnen worden toegeschreven dat de wervels niet, zooals boven is aangenomen, alle precies tegen de wanden zitten, maar dat ze door de onregelmatig veranderende bewegingen die ze aan elkaar meedeelen, zich een weinig van den wand af begeven. De onregelmatige „Browniaansche" bewegingen van het wervelveld zouden dus een soort „Boltzmann-Maxwell"-verdeeling teweegbrengen, analoog aan de dichtheidsverdeeling van een gas in het veld der zwaartekracht — een mogelijkheid waarop door VON KÁRMÁN in de boven aangehaalde voordracht reeds is gewezen.

Een gelijkmatige verspreiding van alle wervels over de geheele doorsnede leidt op zijn gunstigst, als in het in § 5 I behandelde

[1]) Volgens de proeven van COUETTE treedt de turbulentie in bij $R = ca.$ 1900.

voorbeeld, tot een te *kleine* waarde voor C. De werkelijke toestand ligt dus tusschen de in § 5 I en II beschouwde in.

In fig. 4 zijn de formules (39), (47) en (4*b*) ter vergelijking op logarithmische schaal uitgezet.

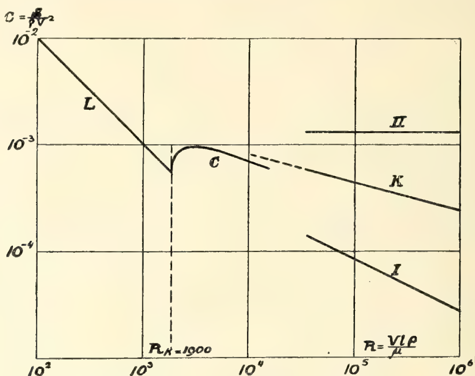


Fig. 4. Logarithmisch diagram van C als functie van R.

Lijn L: laminair gebied, $C = \frac{1}{R}$ (form. 3).

Lijn C: resultaten der metingen van COUETTE. R is berekend met $\mu = 0{,}01096$, welke waarde COUETTE afleidt uit de gegevens van POISEUILLE (l. c. p. 460).

Lijn K: $C = 0{,}008\ R^{-1/4}$ (form. 4*b*), afgeleid uit beschouwingen van VON KÁRMÁN over het verloop van $U(y)$.

Lijn I: formule (39), afgeleid in de onderstelling dat alle wervels even groot zijn en gelijkmatig verspreid liggen over de doorsnede.

Lijn II: formule (47), afgeleid in de onderstelling dat de wervels verschillende afmetingen hebben, en alle tegen de wanden liggen.

§ 7. *Strooming tusschen twee evenwijdige vaste wanden.*

De strooming onder druk door een kanaal met twee evenwijdige vaste wanden laat zich volgens hetzelfde schema behandelen als de strooming tusschen één vasten en één bewegenden wand. Daar dit geval zich meer aansluit bij de meeste der in de practijk voorkomende stroomingen, worden de voornaamste punten van de berekening hier nog vermeld.

De afstand der beide wanden zij h; de gemiddelde snelheid van den hoofdstroom V; het drukverval $-dp/dx$ zij door J aangeduid.

Het getal van REYNOLDS is: $R = Vh\varrho/\mu$; de coëfficiënt van de weerstandsformule: $C = Jh/\varrho V^2$. In de plaats van (8) treedt nu als bewegingsvergelijking voor de hoofdbeweging:

$$\mu \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d}{dy}(\varrho \overline{uv}) = -J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

De eerste integraal hiervan is:

$$\mu \frac{dU}{dy} - \varrho \overline{uv} = J\left(\frac{h}{2} - y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

De integratie-constante is bepaald doordat midden tusschen de wanden $\frac{dU}{dy}$ en $\overline{uv}$ beide gelijk aan nul worden, tengevolge van de symmetrie. Integreert men nog twee malen, dan wordt gevonden (daar aan beide wanden $U = 0$ is):

$$\mu V h = \frac{1}{12} J h^3 - \int_0^h dy\, \varrho y\, \overline{uv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

welke vergelijking in de plaats treedt van (11). De voorwaarde voor de stationariteit behoudt de door (9) gegeven gedaante. Men kan eerst $\frac{dU}{dy}$ elimineeren met behulp van (49); daarna J met behulp van (50), en vindt dan:

$$\frac{\mu V}{h} = \frac{\frac{1}{12}\int_0^h dy\, \{\varrho^2 (\overline{uv})^2 + \mu^2 \overline{\zeta^2}\} - \frac{1}{h^3}\left(\int_0^h dy\, \varrho y\, \overline{uv}\right)^2}{\frac{1}{h}\int_0^h dy\, \varrho y\, \overline{uv}} \quad . \quad . \quad (51)$$

Nu ga ik weer op onbenoemde variabelen over, en stel daarna:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 dy\, y\, \overline{uv} = \sigma \\ &\frac{1}{12}\int_0^1 dy\, (\overline{uv})^2 = (1+\tau)\,\sigma^2 \\ &\frac{1}{12}\int_0^1 dy\, \overline{\zeta^2} = \varkappa\sigma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Dan krijgen de vergelijkingen (50) en (51) de gedaante:

$$\sigma\tau + \frac{\varkappa}{R^2} = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\frac{1}{12}\frac{Jh}{\varrho V^2} = \frac{C}{12} = \sigma + \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Constructie van het wervelveld.

Uit verg. (49) is reeds te bemerken dat $\mu \frac{dU}{dy}$ slechts dan klein kan zijn t.o.v. $J\left(\frac{h}{2} - y\right)$ — zooals bij de werkelijke strooming het geval is — wanneer $-\varrho\overline{uv}$ tennaastenbij gelijk wordt aan $J\left(\frac{h}{2} - y\right)$. Of uitgedrukt met de boven ingevoerde onbenoemde variabelen: $-\overline{uv}$ moet evenredig zijn met $\frac{1}{2} - y$.

De grootheid $\overline{uv}$ moet dus bij den wand $y=0$ negatieve waarden, en bij den wand $y=1$ positieve waarden aannemen. Om dit te verkrijgen bouw ik het wervelveld op uit twee groepen van elliptische wervels die elkaars *spiegelbeeld* zijn. De eene groep bestaat uit wervels die denzelfden stand hebben als in § 4 en 5 is beschreven, en alle tegen den wand $y=0$ liggen. Laat deze groep in het $\overline{uv}$-veld de bijdrage geven:

$$-(\overline{uv})_{\mathrm{I}} = \psi(y).$$

De andere groep, die hiervan het spiegelbeeld is, en die ligt tegen den wand $y=1$, geeft dan de bijdrage:

$$-(\overline{uv})_{\mathrm{II}} = -\psi(1-y)$$

In $\int dy\, \overline{\zeta^2}$ geven beide groepen natuurlijk precies evenveel.

Wanneer men nu wervels neemt met dikten tusschen 1 en een minimum-waarde D_0, en de verdeelings- of intensiteitsfunctie evenredig neemt met:

$$B\,d\,D = \left(\frac{1}{D} - \frac{3}{4}\right)dD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

(deze uitdrukking is steeds positief), dan verkrijgt men voor waarden van y gelegen tusschen D_0 en $1 - D_0$:

$$\psi(y) = \int_y^1 dD\left(\frac{1}{D} - \frac{3}{4}\right)\varphi\left(\frac{y}{D}\right) =$$

$$= \frac{1}{140}\left\{\frac{1}{2} - y + 7\,y^5 - 14\,y^6 + 10\,y^7 - \frac{5}{2}\,y^8\right\}$$

(afgezien van een constanten factor); en daaruit:

$$\psi(y) - \psi(1-y) = \frac{1}{140}\left(\frac{1}{2} - y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Tusschen de grenslagen heeft het $\overline{uv}$-veld dus inderdaad het gewenschte verloop.

In de grenslagen daalt $-\overline{uv}$ van de waarde $\pm 1/280$ tot nul. Berekent men het verloop in deze lagen, dan worden de integralen:

$$\int_0^1 dy\, y\, \overline{uv} = \frac{1}{1680}\left(1 - 2{,}667\, D_0 + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{12}\int_0^1 dy\, (\overline{uv})^2 = \left(\frac{1}{1680}\right)^2 (1 - 3{,}204\, D_0 + \ldots)$$

zoodat:

$$\tau = 2{,}129\, D_0 - \text{termen met } D_0^2 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Voor $\int_0^1 dy\, \overline{\zeta^2}$ wordt gevonden:

$$2\int_{D_0}^1 dD\, \frac{294}{630}\,\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D} - \frac{3}{4}\right) = \frac{294}{315}\left(\frac{1}{D_0} - \frac{3}{4}\, lg\, \frac{1}{D_0} - \ldots\right).$$

Dit geeft:

$$\varkappa = \frac{131}{D_0}\left(1 - \frac{3D_0}{4}\, lg\, \frac{1}{D_0} + \text{termen met } D_0 \ldots\right). \quad . \quad (58)$$

Men kan (57) en (58) substitueeren in (53), en dan het maximum van σ opzoeken. Dit treedt op voor:

$$D_0 = \frac{262}{R}\left(1 - \frac{98}{R}\, lg\, \frac{R}{262} \ldots\right)$$

Is dit gevonden, dan geeft ten slotte (54):

$$C = 0{,}0108 + \frac{2{,}11}{R}\, lg\, R + \text{termen met } \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$[1]

Discussie.

Ook in dit geval nadert men asymptotisch tot de *quadratische* weerstandswet (bij $R > 100000$ is de logarithmische term weinig

[1]) De constante term van C is hier $8\times$ zoo groot als in (47), wat ook langs elementairen weg is af te leiden uit een vergelijking van de grootte der wrijvingskracht op de wanden uitgeoefend in beide gevallen.

meer dan 2 °/₀ van den constanten term). De coëfficiënt C is echter ook thans *te hoog*: VON MISES geeft voor:

R van 10000 tot de grootste bereikte waarden:

$$C = 0{,}006 \text{ tot } 0{,}0024;$$

de formules van VON KÁRMÁN leveren:

$$C = \text{ca. } 0{,}07 \; R^{-1/4}$$

beide voor kanalen met gladde wanden.

Bij kanalen met ruwe wanden geeft men meestal een quadratische weerstandsformule met een coëfficiënt C die afhankelijk is van de verhouding der oneffenheden tot den diameter. De dan optredende waarden van C kunnen vele malen grooter zijn dan de voor gladde wanden geldende; ze kunnen ook boven de door (59) gegeven waarde komen. Zoo worden door GIBSON voor oud gegoten ijzer, met lichte roestplekken, waarden gegeven tot 0,015 [1]).

Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der T. H.
Delft, Mei 1923.

---

[1]) R. VON MISES, l.c. p. 63, in verband met de op bl. 83/84 gegeven definitie van den „hydraulischen straal". Deze is voor een kanaal van oneindig groote diepte, zooals het hier behandelde, gelijk aan h.

A. H. GIBSON, Hydraulics and its applications (1919), p. 209 (in diens formule op p. 206 is $m = \frac{1}{2} \times$ de hydraulische straal volgens VON MISES, zie p. 194).

Men vergelijke verder L. SCHILLER, ZS. für angew. Math. u. Mechanik **3**, p. 2, 1923, en anderen.

Bacteriologie. — F. D'HÉRELLE: „*Culture du bactériophage sans intervention de bactéries vivantes*".

(Aangeboden door de Heeren W. EINTHOVEN en J. VAN DER HOEVE).

Geologie. — V. VAN STRAELEN: „*Description de crustacés décapodes nouveaux des terrains tertiaires de Borneo*".

(Aangeboden door de Heeren H. A. BROUWER en EUG. DUBOIS).

(Deze mededeelingen zullen worden opgenomen in de „Proceedings" Vol. XXVI).

Naar aanleiding van de aanbieding van deze twee in 't Fransch gestelde mededeelingen, herinnert de Heer L. E. J. BROUWER aan vroeger daaromtrent genomen besluiten der vergadering.

Voor de boekerij der Akademie wordt ten geschenke aangeboden:

a. door den Heer J. F. VAN BEMMELEN, namens de Ned. Dierkundige Vereeniging, een ex. van het door die Vereeniging ter gelegenheid van haar 50-jarig bestaan uitgegeven werk: *Flora en fauna der Zuiderzee. Monografie van een brakwatergebied*;

b. Door den Heer J. W. MOLL een ex. van *Botanical pen-portraits* by Dr. J. W. MOLL and Dr. H. H. JANSSONIUS.

(Het boek zal worden doorgezonden aan H. H. administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds met de vraag of zij er prijs op stellen dit ex. voor het fonds in bezit te nemen en, zoo niet, het terug te zenden naar de Akademie ter plaatsing in hare bibliotheek).

De vergadering wordt gesloten..

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE BIJZONDERE OPENBARE VERGADERING OP ZATERDAG 26 MEI 1923, 's NAMIDDAGS 3 UUR.

SAAMGEROEPEN TOT HET UITREIKEN VAN DE
BUYS BALLOT-MEDAILLE EN DE
BAKHUIS ROOZEBOOM-MEDAILLE.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.
Secretaris: de Heer L. BOLK.

Aan de oproeping tot het bijwonen dezer vergadering, waarbij naast vele leden van de wis- en natuurkundige Afdeeling, ook aanwezig zijn de Heeren C. VAN VOLLENHOVEN en J. SIX als Voorzitter en onder-Voorzitter der letterkundige Afdeeling, hebben bovendien de volgende personen, als gasten tot bijwoning uitgenoodigd, gehoor gegeven:

Van de Nederlandsche Chemische Vereeniging de Heeren G. L. VOERMAN, Voorzitter, C. J. VAN NIEUWENBURG, onder-Voorzitter, L. E. GOESTER en J. P. WIBAUT;

Van de Weêr- en Sterrekundige Vereeniging Mej. JOH. REUDLER en de Heeren T. VAN LOHUIZEN, J. STEIN, H. C. DUDOK VAN HEEL en CH. A. C. NELL; voorts de Heeren E. H. BÜCHNER, Secretaris van het Bakhuis Roozeboom-fonds, C. EASTON, Curator van het Kon. Ned. Meteorologisch Instituut, CH. M. A. HARTMAN, Directeur van — en de Heeren G. VAN DIJK, H. G. CANNEGIETER en P. M. VAN RIEL, adjunct-Directeuren bij dat Instituut, J. M. BURGERS en W. VAN BEMMELEN.

De Voorzitter opent de vergadering met een woord van welkom tot de aanwezige bestuursleden van de letterkundige Afdeeling en tot hen, die, als gasten, aan de uitnoodiging om deze plechtigheid bij te wonen welwillend gevolg gegeven hebben. Hij verzoekt daarna den onder-Voorzitter en den Secretaris, de Heeren A. F. HOLLEMAN en L. BOLK, om de beide bekroonden, de Heeren SIR NAPIER SHAW uit Londen en Prof. GUSTAV TAMMANN uit Göttingen ter vergaderzaal binnen te leiden.

Nadat de bekroonden in de voor hen bestemde zetels vóór de bestuurstafel hebben plaats genomen, heet de Voorzitter den Heer

Shaw, die niet geaarzeld heeft hierheen te komen voor de ontvangst der medaille, in het Engelsch welkom en geeft tevens een korte uiteenzetting van de stichting van het Buys Ballot-fonds, dat in 1888, het jaar volgende op dat, waarin wijlen Prof. Buys Ballot, toenmaals Voorzitter dezer Afdeeling, zijn 70ste levensjaar had volbracht, op initiatief van wijlen Prof. Donders in het leven werd geroepen om uit de renten, voor de eerste maal na verloop van vijf jaren na de stichting en vervolgens om de tien jaren, een gouden medaille uit te reiken aan dien geleerde, die daarvoor in het laatstverloopen 10-jarig tijdvak door zijne onderzoekingen op het gebied der meteorologie het meest in aanmerking kan komen.

De eerste maal (in 1893) werd de medaille toegekend aan Prof. Julius Hann te Weenen; de tweede maal (in 1903) gezamenlijk aan de Heeren R. Assmann en A. Berson te Tegel bij Berlijn; de derde maal (in 1913) aan den Heer H. Hergesell te Straatsburg en — zegt de Voorzitter tot den Heer Shaw — „dat thans gij voor dit doel in ons midden zijt, beschouwen wij als een eer, die tot dankbaarheid moet stemmen."

Daarna geeft de Voorzitter het woord aan het lid der Afdeeling, den Heer E. van Everdingen, die den Heer Shaw toespreekt als volgt:

Dear Sir Napier,

Since it is my duty to explain why our Academy is going to link together by a golden chain your name and that of our famous compatriot, whose memory we are honouring at the same time, it is only natural that I should begin with a single remark about the character of Buys Ballot's work. All over the world his name is associated with the law connecting gradient of pressure and direction of wind — yet, in our mind, it is not so much this law, but the method of synoptic representation of meteorological data by which it was detected, which earned Buys Ballot the gratitude of coming generations. Even before international cooperation in meteorology was born at the Vienna conference of 1873, followed by the first meeting of the International Meteorological Committee at Utrecht in 1874, Buys Ballot was incessantly and successfully striving to collect, criticize and coordinate observations from all parts of the world, and so he may justly be called the father of the meteorology of the globe.

With Buys Ballot, we recollect today the series of names associated with the medal: Hann, the unrivalled climatologist, but scarcely less famous for the profound knowledge of meteorological

facts and theories displayed in his manual of meteorology and other contributions to our science;

ASSMANN and BERSON, afterwards HERGESELL, who extended the experimental field towards the third dimension and over the oceans by devising new methods of attack and organizing scientific research, with the ultimate result of the discovery of the stratosphere and all the anomalies of temperature in the troposphere.

BUYS BALLOT, in the discussion of his own work, says that he left too much to others the care of developing his law into a mathematical form.

Also the famous meteorologists I mentioned are rather more renowned for an enormous increase of our knowledge of facts than for framing theories.

Is that so, to quote your own words: „because meteorology has not arrived at the stage suitable for the attention of a professor?"

No — since this was written [1]), your country got its professor of meteorology, and there and elsewhere since the days of FERREL and even of HADLEY and HALLEY several of the ablest among scientists have given their attention to the physical problems suggested by the study of meteorology — I only mention by way of example the more recent investigations by MARGULES and BJERKNES on the energy and the formation of cyclones, those of HUMPHREYS, GOLD and EMDEN on radiation equilibrium.

What then is the reason, that no communis opinio exists at this moment about vital points: f. i. whether the gradient causes the wind, or the wind the gradient; whether temperature differences are the causes or the result of the formation of cyclones? Is it not, because the physical problems discussed by these scientists are not quite meteorological problems? Indeed, in order to secure a solution, it has often been necessary to simplify or to modify the problem in such a way, that the practical meteorologist is at a loss what to do with the result, or is inclined to think that the more important sources of energy have been shut out at the boundary.

I quote another of your words:

„The dynamics of an elastic fluid moving on a rotating spheroid, however interesting, is beset with an extraordinary number of temptations to error, and the more humble ambition of trying to find out what the motion really is, although painfully laborious, has advantages which may be compared with the advantages which walking has as compared with the use of a flying machine" [2]).

[1]) The Air and its Ways p. 42, Cambridge 1923.

[2]) The Mechanics of the Atmosphere, Nature, July 1904.

This was written in 1904. Since then, flying has become safer, and walking less safe — but still there remains truth enough in the comparison, and it is to these investigations on the firm ground of facts that you have devoted yourself since the leadership of the Meteorological Office in England was entrusted to you in 1900.

In order to approach the aim, the walker must know his ground, and you recognised from the beginning, thanks certainly also to your membership of the Meteorological Council, what obstructions and pitfalls were lying about. You came to the office with something like 20 years' practice as a teacher of experimental physics, and so one of your first occupations has been to advocate the use of the metric system in meteorology. For scientific aerological research this system was adopted internationally at Vienna in 1912: if, on our weather maps and in our messages the battle between millimeter and millibar is still raging, and Fahrenheit degrees have not been abandoned for absolute temperatures, it is not *your* fault — but at all events, the inches have been got rid of.

In the same line were your efforts in favour of uniform projection and scale of meteorological charts; these led you to the construction of the „octogonal globe'', giving a nearly equal area projection of the whole surface on plane polar caps, conical temperate and cylindrical tropical belts, capable of being reproduced by printing on a plane sheet.

A more direct attack of the problem what the motion really is was undertaken in your various researches on the trajectories of air, the life history of surface air currents, published in cooperation with your assistant Mr. Lempfert. Here direct evidence is given of air escaping from the surface or supplied to it from above — and the causes were shown of the many variations in intensity or duration of rainfall associated with slow or fast travelling storms, V-shaped depressions and squall-lines.

The problem of the great circulation and its connexion with the energy of cyclones has been the subject of many of your investigations. You have shown, that the normal condition of the atmosphere is one in which the gradient is exactly balanced by the velocity, so that as a first approximation isobars become identical with stream lines. After extending Teisserenc de Bort's isobars at 4 kilometers to 8 kilometers, you have pointed out that at 8 kilometers the density is the same all over the globe in all seasons of the year, and that the isobars at 8 kilometers very much resemble the curves representing the weight of the lower 8 kilometers, but with a reversal of sign as to high and low. This shows that neither the knowledge

of conditions near the surface, nor of the upper currents alone is sufficient, though import correlations exist.

During the last years, the life-history in three dimensions has been considered. The study of a tropical revolving storm has made you follow up an idea of the late Lord RAYLEIGH, and consider the vertical convection largely as eviction, a new meteorological term meaning that air is carried off by a frictional effect orginating from other rising air. The high Westerly motion is considered as the Flywheel of the whole circulation, sometimes driving the engine, sometimes driven by it.

Time does not permit to go on in this way and to describe your models and experiments, I therefore only quote the words by which you have indicated your object: "to suggest lines along which, partly by experiment and partly by observation, some quantitative estimates might be formed of the operation of various physical processes, which have hitherto been used in a qualitative manner only in meteorological theory". [1])

Another most important contribution to the meteorology of the globe is represented by the 5 volumes of the "Réseau mondial" published by the Meteorological Office, giving monthly values of pressure, temperature and rainfall with normal values for chosen stations on the basis of 2 stations for each 10 degree square. As a single example of the usefulness of such publications I mention the fact, revealed by the first volume, 1911, that this year, believed by many to have been abnormally warm all over the globe, shows about as many and as big negative as positive deviations from the normal.

Indeed, after these empirical and theoretical investigations, you had a right to say: "The time is coming, when it has not already come, that students of meteorology will deal with the earth as a whole on the basis of observation, and will recognize that anything short of that is inadequate for the solution of the more general problems of climate and weather" [2]). It is also with this object in view that you are writing your Manual of Meteorology, which we hope soon to see completed.

With a few words I must mention your contributions to the study of the relations between weather and crops. At one of our committee meetings, I remember your telling us about a farmer, who denied the value of ordinary forecasts for 24 hours and added: if you had told us beforehand that this summer was going to be a dry one, *that* would have meant something! This is the man, you

[1]) The Air and its Ways, p. 89.
[2]) The Air and its Ways, p. 8.

said, whom I have been seeking for a long time; and you asked him what he would have done on such an occasion. There came no reply. That is because, as a rule, agriculturists did not know in which way exactly weather influences the crops, and what varieties of plants are most resistant to special weather influences — your researches have shown them the way.

In the mean time, your office grew in size and importance. If we only look at the weather maps of 1900 and 1923, the first consisting of 4, the latter of 10 pages, showing, beside an important increase of surface observations of the British Isles, Atlantic observations, free air winds, and soundings by aeroplanes and other means at various places in Europe, we understand what amount of national and international cooperation has been necessary to allow of such an extension.

In mentioning this part of your work, I have already entered upon the subject of your role as President of the International Meteor. Committee. It is largely due to your wise policy, that our organisation has survived the war in its old, world-embracing form; and that though not all difficulties have been overcome, the scheme of wireless synoptic reports, drawn up in London 1921, has come into operation all over Europe in 1922. Your work for the "Réseau Mondial" I have already mentioned; only a few months ago you have taken from younger shoulders the task of reconstructing the cooperation in aerology and resuming the compilation and publication of the enormously increased observations. Hence, while I have given this audience a very incomplete bird's eye view of your past work, it is evident that another important task is awaiting you. I end in expressing the earnest wish, that it may be given to you, dear Sir NAPIER, to fulfill that task in the way in which you have earned this medal.

Nadat de Heer SHAW, onder applaus der vergadering, uit handen van den Heer VAN EVERDINGEN de medaille in ontvangst genomen heeft, vraagt hij den Voorzitter verlof eenige woorden te mogen spreken en zegt hij:

Mr. President.

This is an occasion for very few words from me. It would be equally unseemly on my part to spend words in endeavouring to convince you that the very generous address of my friend and colleague Professor VAN EVERDINGEN ought really to be regarded as flattery, or to waste words in commenting upon the action of this

august Academy, in the award of the BUYS BALLOT medal. It is quite equal to its duty — it is indeed famous throughout the world.

But one duty I can discharge not only with becoming modesty but also with unfeigned pleasure and that is to thank you most warmly for the reception which you have given to me this afternoon and to acknowledge the great honour, which the Academy has bestowed upon me by the award of the medal.

And I ask your permission to add that I am particularly pleased to have my name associated with the commemoration of BUYS BALLOT. The name of BUYS BALLOT is held in high esteem by meteorologists all over the world and first for the expression of the relation between wind and the distribution of pressure in the form of the BUYS BALLOT law, which is now one of the axioms of dynamical meteorology. And here let me salute in him, that peculiar faculty of expression which constitutes genius. He might easily have worded his law that, if you stand with your back in the wind, low pressure will be in front of you and high pressure behind you. In that form it might have found universal acceptance: in a sense it would have been true, but the statement would have made no effective addition to the science of meteorology. He chose instead the expression that with your back to the wind the low pressure is on your left, the high pressure is on your right; it did not find immediate acceptance, but it was a vital addition to the science. So delicate is the distinction between genius and the commonplace.

Secondly let me recall the leading part, that BUYS BALLOT took in the advocacy of international cooperation in meteorology and his share in the initial organisation. There again is an expression of genius which even now is not so fully recognized as it must be. Meteorology is preeminently a science in which each worker is dependent upon observations made by others in other parts of the world. No meteorologist can live to himself, he must have fellow workers upon whom he is dependent as they are dependent upon him.

And this leads me to point out that although meteorologists must have all things in common, yet different countries may play different parts in the study of the atmosphere. Some survey the sea, and others the land, mountains and high lands contribute their share but the low lands are not by any means to be neglected. It is an instructive thought, that if BUYS BALLOT had not lived in Holland he could hardly have found out his law because the pressure and the wind in hilly countries belong to different levels. It could never have occurred to a dweller in Switzerland or even in Austria. So, when we think of what mountain peaks and even what aero-

planes may tell us in the future, let us not forget what we have learned from the flat lands in the past.

And finally let me once more lay stress upon the association of the sciences of physics and meteorology. Meteorology can provide the physicist with many problems. The progress of science depends first of all upon the formation of ideas of the physical processes involved-working hypotheses we call them in English. The meteorologist wants the training of a physicist in the identification of the processes and the working out of the details, but the physical training in itself does not convey the power of forming correct ideas about the scheme of working: that must come from experience and from experience alone.

Therefore in recognition of the great honour, which you have done me in associating my name with the commemoration of Buys Ballot, I pay a tribute to the combined scientific force of the Physical Laboratory and the Meteorological Observatory.

De Voorzitter heet — thans in de Duitsche taal — den Heer Tammann welkom en brengt in herinnering dat, na den dood van het lid dezer Afdeeling Prof. H. W. Bakhuis Roozeboom, door een kring van vrienden en vereerders een fonds werd gesticht, welks doel ook is — zoodra uit de renten een daarvoor vastgesteld bedrag kan worden afgezonderd — het toekennen van een gouden medaille aan dengene, die zich door zijne onderzoekingen het meest verdienstelijk zal hebben gemaakt op het gebied der phasenleer. De eerste maal (in 1916) werd de Bakhuis Roozeboom-medaille uitgereikt aan het lid dezer Afdeeling, den Heer F. A. H. Schreinemakers; het verheugt den Voorzitter dat thans de Heer Tammann de uitverkorene is en dat deze geleerde gehoor heeft willen geven aan de uitnoodiging om het eeremetaal zelf in ontvangst te komen nemen. Hierop geeft hij het woord aan het lid der Afdeeling, den Heer Ernst Cohen, die de volgende toespraak houdt:

Meine Herren,

Hochverehrter Kollege Tammann.

Noch heute gedenken wir mit herbem Schmerz des unserer Wissenschaft so überaus verhängnisvollen Jahres 1907.

Beilstein, Berthelot, Mendelejeff, Menschutkin, Moissan, Perkin, Bakhuis Roozeboom, sie alle, Männer, deren Namen bis in die fernsten Geschlechter fortzuleuchten berufen sind, schieden in jenem Schreckensjahre aus dem Kreise der Lebenden und versetzten dadurch

die Ihrigen, ihre Freunde und Fachgenossen, die Wissenschaft, in tiefste Trauer.

Hendrik Willem Bakhuis Roozeboom! Wo immer Naturwissenschaft gepflegt wird, werden auch sie, die nach uns kommen, seinen Namen ehrerbietig nennen; verdankt ihm doch die Chemie die Entwicklung jenes so fruchtbaren Gebietes mit dessen physikalisch-mathematischen Grundlagen der Seherblick eines Willard Gibbs die Menschheit beschenkt hatte.

Bei solcher Bedeutung des Lebenswerkes des Mannes, dessen Stimme in diesen Räumen so häufig erklang, wenn er den Mitgliedern unserer Akademie von den neuesten Errungenschaften seiner Forschungen Kunde gab, ist sein Name nicht ausschliessliches Eigentum eines einzigen Volkes und es liegt nahe, dass bei seinem Heimgange Männer der verschiedensten Nationen mit den Landesgenossen des Dahingeschiedenen Hand anlegten zur Gründung einer Stiftung, welche es sich angelegen sein lassen sollte, in dankbarer Erinnerung an sein Wirken, sein Andenken auch jüngeren Generationen zu überliefern.

Die Bakhuis Roozeboom-Stiftung, welche im Jahre 1908 errichtet wurde, beschloss eine goldne Medaille denjenigen Forschern zu verleihen, die sich um die Phasenlehre im weitesten Sinne des Wortes besonders verdient gemacht haben. Dabei fällt statutengemäss der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Amsterdam das Recht zu, einen Ausschuss zu ernennen, welcher jedesmal zu bestimmen hat, wem diese Ehrung zu Teil werden soll.

Sehr geehrter Kollege Tammann,

Es dürfte Ihnen bekannt sein, dass sich vor sieben Jahren ein Festakt wie der heutige in diesen Mauern vollzog.

Damals war es F. A. H. Schreinemakers, dem wir unsere Huldigung darbrachten in Anerkennung seiner grossen Verdienste auf jenem Gebiete, welches er anfangs unter Leitung seines Lehrers und Freundes Bakhuis Roozeboom, sodann aber als selbständiger Forscher mit solch glänzendem Erfolge durchackert und ausgebaut hat.

Ihnen, der Sie diese Errungenschaften wie wenig andere zu überblicken und zu würdigen im stande sind, wird es zweifelsohne zur freudigen Genugtuung gereichen, zu erfahren, dass auch er der Kommission angehört, welche Ihnen heute die Bakhuis Roozeboom-Medaille verleiht.

Bevor ich mich anschicke, Ihnen dieses Ehrenzeichen aus edlem Stoffe zu überreichen, habe ich mich im Namen der betreffenden

Kommission dieser hohen Akademie gegenüber einer Pflicht zu entledigen: es gilt, die getroffene Wahl zu begründen.

Meine Herren,

Der von der Akademie eingesetzte Ausschuss könnte sich damit begnügen, sein Urteil zusammenzufassen in einem Varianten, den ich nach berühmtem Göttinger Vorbilde so abfassen möchte:

Er ist ein Phasenforscher,
Bekannt in jedem Land;
Fragst Du den besten Namen,
So wird Dir der seine genannt.

Doch möchte ich es vorziehen, Ihnen in flüchtigen Umrissen die Untersuchungen des Forschers, den wir heute in unserer Mitte zu begrüssen die Freude haben, zu zeichnen, wobei sich dann wie von selbst die Leitgedanken ergeben werden, welche zu der getroffenen Wahl geführt haben. Dabei sei TAMMANN selbst unser Mentor: hat er doch die fast zahllosen Arbeiten, seiner Werkstatt entstammend, im Laufe der Jahrzehnte in mehreren Monographien zusammengefasst, welche den Blick über die erforschten Gebiete und die dabei erzielten Erfolge ungemein erleichtern, obwohl sie infolge der gewählten Darstellungs- und Ausdrucksweise nicht geringe Anforderungen an die Fassungsgabe und Unermüdlichkeit ihrer Leser stellen.

So wurden durch seine, die Jahre 1896 bis 1903 umfassenden, Studien, welche er in dem später so bekannt gewordenen Werke „*Kristallisieren und Schmelzen*" sammelte, unsere Kenntnisse über den Uebergang fest-flüssig ganz erheblich erweitert, während die darin entwickelte Versuchstechnik vorbildlich geworden ist.

Ihnen auch nur andeutungsweise einen Einblick in den reichen Inhalt dieser Studien zu bieten, ist leider in dieser kurzen Frist unmöglich.

Fassen wir den Begriff „Phasenlehre" im weitesten Sinne des Wortes auf, so muss hier auch der Beitrag zur Theorie homogener Systeme erwähnt werden, den TAMMANN 1907 unter dem Titel „*Ueber die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen*" den Fachgenossen in Buchform vorlegte. In jenen Blättern wird nicht allein nachgewiesen, wie notwendig es ist, auch diejenigen Eigenschaften der Lösungen zu berücksichtigen, welche die Theorie der verdünnten Lösungen in den Kreis ihrer Untersuchungen nicht ziehen konnte, sie brachten uns überdies eine Zusammenstellung des von TAMMANN und seinen Mitarbeitern in den Jahren 1893—1896

erworbenen, experimentellen Materials, welches auch für andere Gebiete der Chemie von hoher Bedeutung ist.

Sucht man Belege für JOHN TYNDALL's noch heute nicht genügend beachteten Ausspruch: "There exists no category of sciences to which the name of „applied sciences" could be given. We have science and the applications of science which are united as tree and fruit", ein schlagenderes Beispiel als die neueste Entwicklungsgeschichte der Metallographie uns darbietet, dürfte wohl kaum zu finden sein.

Versetzen wir uns in Gedanken in die alte deutsche Kaiserstadt, wo BAKHUIS ROOZEBOOM im September des Jahres 1900 gelegentlich der 72. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zum ersten Male einem grösseren Kreise von Naturwissenschaftlern die Bedeutung der Phasenlehre vor Augen führte. In ihrer Anwendung auf das Studium der Metalle beschreibt er den damaligen Tatbestand mit den Worten: „Die erfolgreichen Untersuchungen von OSMOND, LE CHATELIER, CHARPY, GAUTIER in Frankreich und von ROBERTS AUSTEN, HEYCOCK und NEVILLE u. s. w. in England sind Beweise dafür, welches Licht die Phasenlehre auf dieses dunkle Gebiet werfen kann".

Es fehlt in dieser Aufzählung der Name TAMMANN, und er musste zu jener Zeit fehlen! Dass aber die wenigen Beweise, welche ROOZEBOOM damals zur Verfügung standen, heute fast bis zur Zahllosigkeit gewachsen sind, das verdanken wir zum grossen Teil dem findigen Geiste, dem unermüdlichen Schaffen TAMMANNS, der uns wenige Jahre später mit einem Verfahren beschenkte, welches die Sachlage wie mit einem Schlage änderte.

Dieses, die s.g. *thermische Analyse*, lehrt die Verteilung der Metalle, aus denen eine Legierungsreihe besteht, in ihren Strukturelementen und die Abhängigkeit der Menge und Natur dieser Strukturelemente von der Gesamtzusammensetzung der Legierungen zu bestimmen. Durch die mikroskopische Untersuchung lassen sich die Resultate der thermischen Analyse in erwünschter Weise kontrollieren.

Dem Sachkundigen leuchtet es wohl ohne weiteres ein, welche goldnen Früchte die Erweiterung unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete auch für die Technik der Metalle zu zeitigen berufen ist.

Zu gleicher Zeit aber tritt ihm dabei die Wahrheit von TYNDALL's Worten klar vor Augen.

Nicht eine Zusammenstellung der heute nach hunderten zählenden metallographischen Zustandsdiagramme, welche wir seit dem Jahre 1903 dem TAMMANN'schen Institut verdanken, bildet das 1914 von ihm verfasste, 1921 neu aufgelegte, *Lehrbuch der Metallographie*. Eine Theorie der Metallkunde will es seinen Lesern geben und sie dadurch tiefer in die Vorgänge bei der Kristallisation binärer

Schmelzen einführen, als durch die Interpretation der Zustandsdiagramme allein.

So ist ein Ganzes entstanden, das durch seine Originalität völlig von dem bisher bekannten Typus der Lehrbücher der Metallographie abweicht.

Als eine Ergänzung der Gleichgewichtslehre der Metalle haben wir den Beitrag zur Kenntnis der Legierungen zu betrachten, den unser heutiger Gast unter dem Namen: „*Die chemischen und galvanischen Eigenschaften von Mischkristallreihen und ihre Atomverteilung*" veröffentlichte. Auch hier handelt es sich um eine Zusammenfassung seiner zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiete, und zwar um solche aus den Jahren 1916—1918. Die 1919 publizierte Schrift ist dem Andenken EILHARD MITSCHERLICH's gewidmet, dessen folgenschwere Entdeckung des Isomorphismus in jenem Jahre ihren hundertsten Geburtstag feierte.

Die in diesen Seiten beschriebenen, merkwürdigen Tatsachen, sowie die sich daran knüpfenden, geistreichen theoretischen Betrachtungen, eröffnen ein neues Arbeitsgebiet, welches uns für die Zukunft eine reiche Ernte in Aussicht stellt.

„Stets geforscht und stets gegründet,
Nie geschlossen, oft geründet,
Aeltestes bewahrt mit Treue,
Freundlich aufgefasst das Neue",

mit diesen Worten möchte ich TAMMANN's jüngste Monographie charakterisieren. Hat er uns doch in dem Buche: „*Aggregatzustände. Die Zustandsänderung der Materie in Abhängigkeit von Druck und Temperatur*", seine älteren Forschungen in neuem Gewande, dem Fortschritt der Wissenschaft sowie den eignen, durch die Zeit gereiften Ansichten entsprechend, vorgelegt. Ganz besonders sympathisch berührt uns darin die Art und Weise in der er die glänzenden Untersuchungen von BRIDGMAN bewertet, dem wir auf diesem Gebiete eine Fülle exakten Materials verdanken.

Meine Herren,

So gestaltet sich das Bild des von diesem Phasenforscher in dreissigjähriger, unverdrossener, emsiger Arbeit Erlebten und Erstrebten.

Wer dasselbe genauer betrachtet, erblickt darin unschwer die Leitlinien, welche unsere Kommission einmütig zu dem Beschluss führten, die BAKHUIS ROOZEBOOM-Medaille

GUSTAV TAMMANN,

Professor der physikalischen Chemie in Göttingen, zuzuweisen.

Hochverehrter TAMMANN,

Wir haben bloss das Standardwerk BAKHUIS ROOZEBOOM's aufzuschlagen, in welchem so manche Seite dem von Ihnen und Ihren Mitarbeitern Errungenen gewidmet ist, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass wir heute ganz im Sinne des Verewigten handeln, dessen Bildnis und Name dieses Metall schmücken.

In den Worten „*Sapere aude*", welche der Rückseite desselben eingeprägt sind, erblicken wir nicht allein den Wahlspruch BAKHUIS ROOZEBOOM's, wenn es galt, den Teil seiner Wissenschaft zu pflegen, welcher ihm so nahe an's Herz gewachsen war, sondern ebenfalls den Ihrigen, welcher Ihnen den Mut verlieh, in neue, unbekannte Gebiete einzudringen.

Wenn wir Sie wie heute, in voller Schaffenskraft und Schaffenslust in unserer Mitte erblicken, so dürfen wir wohl der freudigen Zuversicht leben, dass auch die kommenden Dezennien uns noch mit manchem Beitrage aus Ihren Händen beschenken werden, jenem Wissensgebiete gewidmet, in welchem bis in die fernsten Zeiten leuchten wird der Name:

HENDRIK WILLEM BAKHUIS ROOZEBOOM.

Nadat, eveneens onder applaus der aanwezigen, de Heer COHEN de medaille aan den Heer TAMMANN heeft overhandigd, vraagt de bekroonde den Voorzitter verlof zijn dank te mogen betuigen en zegt hij:

Hochansehnliche Versammlung!
Verehrter Herr Präsident!

Die Worte hoher Anerkennung, die Herr COHEN die Güte hatte an mich zu richten, sind sehr reichlich bemessen gewesen, da ich mir nur bewusst bin meiner Pflicht und Neigung, die so glücklich einander parellel laufen, gefolgt zu sein. Forschen und Lehren ist uns allen ein Vergnügen, und dafür dass man seinen Neigungen folgt, noch eine solche Anerkennung zu finden, das scheint mir zu viel.

Die Erinnerung an unseren unvergesslichen, zu früh dahin geschiedenen BAKHUIS ROOZEBOOM wird in der Geschichte der Chemie eine dauernde sein. Er hat uns zuerst Wege gezeigt, die komplizierten Gleichgewichte in heterogenen Systemen systematisch zur Darstellung zu bringen. Unsere Sprache, so kunstvoll sie auch sei, genügt in vielen Fällen nicht die Vorgänge in der Natur abzubilden. In Mechanik und Physik ist daher längst eine volkommenere, die der Analysis, eingezogen. In die Chemie hat sich diese Sprache erst

seit etwa 60 Jahren gewagt, und zwar in die chemische Kinetik, dann aber in erweiterten Mass durch die Anwendung der Thermodynamik in der Gleichgewichtslehre. In dieser Richtung haben VAN DER WAALS und VAN 'T HOFF Unvergleichliches geleistet. Obwohl GIBBS in seinem Buche mit sieben Siegeln die Thermodynamik der Gleichgewichte in heterogenen Systemen entwickelt hatte, blieb dieses weite Gebiet doch noch Jahrzehnte lang unbeackert. Die Gründe liegen in der Darstellung von GIBBS und der Richtung der Chemie jener Zeit, die vorzugsweise präparativen Charakter hatte. Erst ROOZEBOOM hat sich an das systematische Studium der heterogenen Gleichgewichte und die geometrische Methode ihrer Darstellung gewagt. Die Zusammenfassung unserer Kenntnisse über die Zustandsänderungen binärer und ternärer Mischungen in den Zustandsdiagrammen oder in Zustandsmodellen bedeutete für die Chemie einen gewaltigen Schritt nach der exakten Richtung. ROOZEBOOM und vor allen sein langjähriger Mitarbeiter SCHREINEMAKERS haben die typischen Fälle theoretisch und experimentell untersucht. Das war eine grosse Aufgabe, die nur dann gelöst werden konnte, wenn man die neben den Konzentrationen so wichtigen Parameter des Drucks und der Temperatur in engen Grenzen hielt.

Schon zu Beginn der Arbeit ROOZEBOOMS und seiner Schüler besonders über Gleichgewichte zwischen Salzen und Wasser fragten Fernerstehende nach dem Nutzen dieser Arbieten. Vielen schien es sich hier um allzu eingehende niederländische Kleinmalerei zu handeln. Der Niederländer liebt genaue Abbildung der Wirklichkeit, so auch ROOZEBOOM und seine Schüler. Es zeigte sich aber alsbald, dass es sich hier nicht nur um Kleinmalerei handelte, sondern dass es in vielen Fällen recht nützlich war, so genaue und detaillierte Abbildungen des Verhaltens der Stoffe zu einander zu erhalten, wie sie ROOZEBOOM und seine Mitarbeiter brachten.

Den Spuren von ROOZEBOOM folgend, hatten in England ROBERTS AUSTEN das Zustandsdiagram der Kohlenstoffstähle und das des Messings, HEYCOCK und NEVILLE die Bronzen bearbeitet, und damit die praktische Anwendbarkeit der Richtung von ROOZEBOOM dargetan. Dadurch entstand der Wunsch und das Bedürfnis auch über das Verhältnis der anderen chemischen Elemente zu einander in ähnlicher gründlicher Weise unterrichtet zu werden. BERZELIUS hatte seinen Nachfolgern eine Chemie der Sauerstoffe hinterlassen, über das Verhalten der Metalle zu einander wusste man nur sehr wenig. Hier der von ROOZEBOOM eingeschlagenen Richtung zu folgen, schien besonders angezeigt.

Aber auch auf dem Gebiet der Silikatchemie ergaben sich für die

Anwendung der Lehren ROOZEBOOM's neue Möglichkeiten, die bald diesseits und jenseits des Atlantik in Angriff genommen wurden.

Durch diese Arbeiten begann sich das Aussehen der anorganischen Chemie wesentlich zu verändern. Anstelle weitläufiger, vielfach unzutreffender Beschreibungen des Verhaltens zweier Stoffe zu einander traten die Zustandsdiagramme mit ihrer kurzen und bündigen Sprache. Es werden noch Generationen vergehen, bis die anorganische Chemie im Wesentlichen eine Sammlung von Zustandsdiagrammen sein wird, aber ein ansehnlicher Anfang ist gemacht, der den zu früh dahingegangenen Meister lobt.

Leicht hatte ihm das Schicksal seine Anfänge nicht gestaltet.

Er selbst hatte aber noch das Glück die Aufnahme der Arbeit in der von ihm gewiesenen Richtung zu erleben, und an ihrem Fortschreiten sich zu erfreuen.

Hiermede was de plechtigheid geëindigd. De Voorzitter sluit de vergadering, nadat hij eerst nog heeft medegedeeld, dat in de aangrenzende receptiezaal thee zal worden geschonken. Hij noodigt de aanwezige leden en gasten uit zich daarheen te begeven voor een verder gezellig samenzijn, waardoor hun tevens de gelegenheid geboden zal worden met de bekroonden kennis te maken en dezen persoonlijk hunne gelukwenschen aan te bieden.

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 30 JUNI 1923 TOT EN MET 29 DECEMBER 1923

DEEL XXXII
(2DE GEDEELTE)

UITGAVE DER
KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM
1923

INHOUD.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

OP ZATERDAG 30 JUNI 1923.

DEEL XXXII.

N°. 6.

Waarn[d]. Voorzitter: de Heer A. F. HOLLEMAN.

Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Wegens uitlandigheid van den Voorzitter, den Heer F. A. F. C. WENT, wordt het voorzitterschap waargenomen door den Onder-Voorzitter, den Heer A. F. HOLLEMAN.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Schrijven van Prof. N. BOHR te Kopenhagen dd. 24 Mei j.l. met dankbetuiging voor zijne benoeming tot Buitenlandsch Lid.

Voor kennisgeving aangenomen.

2°. Schrijven van den Minister van Buitenlandsche Zaken dd. 1 Juni j.l. N°. 9308 Afd. A.S., met de mededeeling dat de zendingen van het „Bureau des Etalons physico-chimiques" in de diplomatieke mail kunnen worden ingesloten.

Aan den Minister zal een brief van dank worden gezonden.

3°. Schrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 18 Juni j.l. N°. 2760, Afd. K.W. met bericht dat hij zich vereenigt met het voorstel der Afdeeling om den Heer J. KALFF als „Fellow" van het „Ramsay Memorial Fund" uit te zenden.

De Heer KALFF zal hiervan worden in kennis gesteld.

4°. Schrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 22 Juni j.l. N°. 2761, Afd. K.W. met bericht, dat het Rijkssubsidie over 1923 ad *f* 700.— voor de uitzending naar Buitenzorg, is verleend aan den Heer Dr. V. J. KONINGSBERGER.

Aan den Heer KONINGSBERGER zal hiervan bericht worden gezonden met verzoek mede te deelen wanneer hij naar Indië hoopt te vertrekken.

Hierna geeft de Voorzitter het woord aan den Heer H. ZWAARDEMAKER tot het houden van een voordracht, mede namens de Heeren W. E. RINGER en E. SMITS, over: „*Is Caesium radio-actief?*" (Zie blz. 617).

Naar aanleiding hiervan maakt de Heer F. M. JAEGER eenige opmerkingen, welke door den spreker worden beantwoord.

Vervolgens spreekt de Heer W. EINTHOVEN, mede namens den Heer S. HOOGERWERF, over: „*De snaarphonograaf*". (Zie blz. 656).

Ten slotte doet de Heer C. WINKLER eene mededeeling over: „*A partial foetus removed from a child*".

Naar aanleiding van deze mededeeling, welke zal worden opgenomen in „Proceedings" Vol. XXVI, worden eenige opmerkingen gemaakt.

Physiologie. — H. ZWAARDEMAKER, W. E. RINGER en E. SMITS. *„Is caesium radio-actief?"*

In de reeks Li, Na, K, Rb, Cs zijn tot dusverre enkel de elementen kalium en rubidium radio-actief gebleken. Dikwijls heeft men vermoed, dat ook caesium een lichte radio-activiteit zou bezitten, maar zekerheid heeft men dienaangaande nooit kunnen verkrijgen. E. RUTHERFORD [1]) merkt eenvoudig op, dat caesium ternauwernood radio-actief is en St. MEYER en E. v. SCHWINDLER [2]) opperen de veronderstelling, dat misschien activiteit bestaat, doch de uitgezonden straling zoo weinig doordringbaar is, dat zij de materie niet verlaat.

Zeker is het, dat handelspraeparaten van caesium ook bij maandenlange expositie geen photographische werking uitoefenen. Ook heeft een onzer [3]) aan zorgvuldig gereinigde caesium-praeparaten geen ionisatievermogen op de lucht van een platte ionisatiekamer kunnen ontdekken.

Toch oefent caesium biologisch een in menig opzicht aan dien van kalium en rubidium verwanten invloed uit. Reeds aan SYDNEY RINGER [4]) was die bekend en ten overvloede nog door een onzer [5]) opzettelijk nagegaan. Na een aanvankelijk mislukte poging in den winter, gelukte het ons in den zomer van 1917 harten van koudbloedige dieren kloppende te houden op een dosis caesiumchloride, die slechts weinig bij die van het toen noodige kaliumchloride achterstond. Het bleek, dat kalium-, rubidium- en caesiumchloride pro miscue konden worden gebruikt, doch dat van caesium veel grootere doses moesten worden aangewend om een vergiftiging te erlangen. Tegenover uranium, thorium, radium en radium-emanatie verhield het zich antagonistisch, gelijk ten overvloede later nog door Mej. L. KAISER [6]) bevestigd werd.

Er had zich dus allengs een tegenstrijdigheid geopenbaard. Physisch zijn caesium-verbindingen, mits goed gereinigd, als niet-radio-

---

[1]) E. RUTHERFORD in Marx's Hdb. der Radiol. Bd. II S. 531, 1913.

[2]) ST. MEYER und E. v. SCHWINDLER, Radioaktivität, 1916 S. 428.

[3]) W. E. RINGER, Arch. néerl. de Physiol. t. 7 p. 434, 1922.

[4]) S. RINGER, Journal of Physiol. Vol. 4 p. 370, 1883.

[5]) H. ZWAARDEMAKER en C. DE LIND VAN WIJNGAARDEN, K. Akad. v. Wetensch. 27 Oct. 1917, Proc. vol 20 p. 773.

[6]) L. KAISER. Arch. néerl. de Physiol. t. 3 p. 587, 1919.

actief te beschouwen, terwijl het zich bij goede doseering biologisch geheel gedraagt als de radio-actieve elementen kalium en rubidium.

Ter opheldering hebben wij een hernieuwd onderzoek ondernomen met praeparaten van verschillende herkomst. Wij hebben deze zorgvuldig gereinigd en vóór en na de reiniging zoowel physisch als biologisch onderzocht.

De physische beoordeeling had plaats naar het ionisatie-vermogen van het volmaakt droge caesiumzout in een platte hermetisch gesloten ionisatiekamer. Het was gelijkmatig uitgespreid op een met barnsteen geïsoleerde koperen schotel van 30 cM. doorsnee, die door een batterij van kleine accumulatoren volmaakt constant tot 500 volt werd opgeladen. Ter hoogte van 3.5 cM. en parallel er mee bevond zich boven de zoutlaag een koperen schijf van eveneens 30 cM. doorsnee, die met een quadranten-paar van een zeer gevoeligen Thomsonschen quadrantelectrometer verbonden was. De vleugel van dezen electrometer werd constant op 40 volt gehouden.

Een uraaneenheid volgens Mc. Coy van 50 □ mm. oppervlak gaf bij deze gevoelige opstelling in ± 2 min. 100 deelstrepen uitslag; een laag van gedroogd kaliumchloride in 5 min. ± 50 deelstrepen [1]).

Onze caesium-chloride-praeparaten gaven zeer uiteenloopende uitkomsten. Het best verkrijgt men een overzicht, wanneer men ze aan het ionisatie-vermogen van kalium onder overigens gelijke omstandigheden tegenoverstelt.

Activiteit	Vóór de reiniging	Na de reiniging
CsCl v. E. de Haën	1/6 v. d. act. v. kalium	1/37 v. d. act. v. kalium
CsCl v. Merck	1/10 v. d. act. v. kalium	inactief
CsCl v. Kahlbaum	1/37 v. d. act. v. kalium	1/80 v. d. act. v. kalium
CsCl v. Poulenc fr.	1/37 v. d. act. v. kalium	1/77 v. d. act. v. kalium

De biologische beoordeeling had plaats aan het geïsoleerde kikvorschhart (kamer + rechter voorkamer) opgebonden op een canule van Symes met overloop, zoodat de druk nooit hooger kon stijgen

[1]) In deze platte ionisatiekamer werkt alzoo het kalium (beta-straler) 7000 maal zwakker ioniseerend dan uranium (alpha-straler), beide open geexponeerd. In een hooge ionisatiekamer zal deze verhouding geheel anders zijn. Rutherford p. 528 schat het ionisatievermogen in de gewone ionisatie-kamer op $^1/_{1000}$ van de beta-radio-activiteit van uranium. De beta-radio-activiteit van uranium berust op haar beurt weer op het uranium X, waarmee in de gewone praeparaten uranium in evenwicht is.

dan 5 cM. water. Drie naast elkaar geplaatste Mariottesche flesschen met kranenstelsel gaven gelegenheid afwisselend RINGER-soluties van verschillende samenstelling door het hart te laten gaan. Eerst werd de dosis kaliumchloride bepaald, die het individueele hart in minimo verlangde, vervolgens werd het doorstroomd met Ringersche vloeistof zonder kalium, totdat het tot stilstand was gekomen. Dan werd na 10 minuten wachtens, gedurende welke men zich overtuigde, dat geen latente automatie meer bestond, tot caesium doorstrooming overgegaan. Daarbij werden achtereenvolgens de minimum- de optimum- en de maximum-doses bepaald. Men klom zeer voorzichtig en geleidelijk met de doseering omhoog, (door middel van een luchtinjector, zooals ook LOCKE en ROSENHEIM gebruikten, steeds dezelfde ½ à 1 Liter oplossing rondpompend). De vloeistof, die het hart passeerde, was op die wijze steeds maximaal met zuurstof beladen, voor zoover die in een zwakke zoutoplossing oplosbaar is.

Als minimum-doses van kaliumchloride en van caesiumchloride werd die dosis aangemerkt, die voldoende bleek om het hart regelmatig te doen kloppen; als optimumdosis gold die, waarbij de frequentie het grootst was en het grootst bleef. Moeilijk was de maximum-dosis te treffen, daar zich bij stijging in caesium-doseering een hinderlijke negatieve inotropie gaat openbaren. Als hoogst bruikbare dosis werd dan die aangemerkt, waarbij de samentrekkingen lytisch dreigden op te houden. De eigenlijk maximale dosis ligt dan iets hooger. Het caesium is middelerwijl diep in de hartcellen ingedrongen, want het duurt uren voor men door een Ringersche oplossing, die noch kalium noch caesium bevat, een hart van al dat rijkelijke caesium heeft ontdaan en het orgaan tot stilstand komt.

Het gemakkelijkst heeft men weer een overzicht over onze uitkomsten, wanneer men weder caesium en kalium onderling vergelijkt.

Minimum-dosis der ongezuiverde praeparaten.

CsCl v. DE HAËN	8.7 × KCl-dosis
CsCl v. MERCK	5.3 × KCl-dosis
CsCl v. KAHLBAUM	4.9 × KCl-dosis
CsCl v. POULENC fr.	4.1 × KCl-dosis

De minimale, optimale en hoogst bruikbare doses verhouden zich voor de ongezuiverde praeparaten van caesium gemiddeld in milligrammen caesium-chloride per Liter doorstroomingsvloeistof als:

1194 : 1538 : 1998.
min. opt. hoogst brb.

Van de gezuiverde doses moeten de hoeveelheden veel grooter zijn.

Minimum-dosis der gezuiverde praeparaten.

CsCl v. DE HAËN	9.5 × KCl-dosis
CsCl v. MERCK	19.4 × KCl-dosis
CsCl v. KAHLBAUM	7.2 × KCl-dosis
CsCl v. POULENC fr.	12.3 × KCl-dosis

De minimale, optimale en hoogst bruikbare doses verhouden zich voor de gezuiverde praeparaten van caesium gemiddeld in milligrammen caesium-chloride per Liter doorstroomingsvloeistof als:

1678 : 2760 : 4134.
min. opt. hoogst brb.

Als algemeen gemiddelde uitkomst vonden wij bij vergelijking tusschen onzuiver en zuiver caesium het volgende:

	Ongezuiverd CsCl	Gezuiverd CsCl
in minimo	5.5 × min. KCl	10.7 × min. KCl
in optimo	7.1 × „ „	17.7 × „ „
hoogst bruikb.	9.2 × „ „	26.5 × „ „

Van gezuiverd caesium heeft men in minimo alzoo 2 à 3 maal meer noodig dan van ongezuiverd.

Van het praeparaat, dat zoo volledig gezuiverd was, dat in het geheel geen straling kon worden aangetoond, bleek 16 Mei 1923 bij een bepaald hart in minimo 39, optimaal 47, als hoogst bruikbare dosis 58 gram per Liter doorstroomingsvloeistof te moeten worden toegevoegd. Het is duidelijk, dat in zulke gevallen de hoeveelheid NaCl sterk moest worden verminderd om hyper-isotomie te voorkomen.

Een onzer heeft omtrent de radio-actieve vervangers van kalium een empirische wet opgesteld, nl. deze, dat in het algemeen geïsoleerde organen in hun physiologische doorstroomingsvloeistof zooveel van een radio-actief element behoeven als noodig is om per sec. de emissie van een voor alle gelijk groot aantal deeltjes tot stand te brengen. Deze wet laat zich in een logarithmische graphiek aanschouwelijk voorstellen.

In zulk een graphiek kan men zonder meer niet het rubidium en caesium opnemen, omdat men niet weet hoeveel deeltjes deze

stoffen per sec. uitzenden en men ze dus geen plaats kan toewijzen op de as der abscissen. Zoodra men echter de minimale en maximale doseeringen kent, kan men voor hen een plaats op de as der ordi-

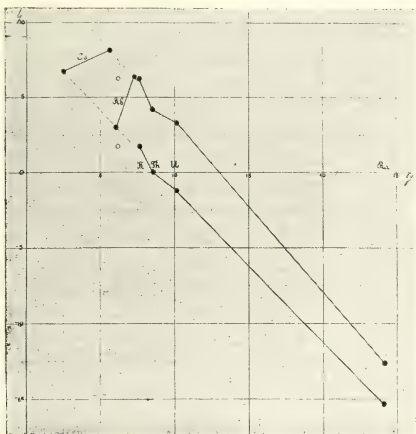


Fig. 1.

naten gaan zoeken en aannemende dat de wet ook voor deze stoffen geldt, door het neerlaten van een loodlijn haar hypothetische plaatsing op de as der abscissen gaan opsporen. Wij hebben dit in de graphiek gedaan en dus èn voor rubidium èn voor caesium een waarde ingevuld. Dan heeft men het vermoedelijk aantal deeltjes leeren kennen, dat onder de genoemde praemissen per gram en per sec. zal worden geëmitteerd. Voor onze gezuiverde praeparaten caesium blijkt het 55 per gram en per sec. te zijn. Bij zulk een gering aantal deeltjes mag men een photographisch effect eerst na 9 jaren verwachten. Het is dus zeer begrijpelijk, dat men tot dusver er niet in slaagde van gezuiverd caesium eenig effect op een gevoelige plaat te zien.

De 55 deeltjes per gram en per sec., die volgens de hypothese der corpusculaire aequi-valentie, aan zuiver caesium zouden toekomen, kunnen natuurlijk niet aan het caesium als zoodanig eigen zijn, doch moeten aan de verontreiniging toebehooren, die uit het handelspraeparaat door de zuivering verwijderd werd.

De zuivering had als volgt plaats:

Toevoeging van kopersulfaat; doorleiding van zwavelwaterstof gedurende ½ uur, affiltratie van het neerslag van kopersulfide, dat zich na 24 uur heeft gevormd, verwijdering van het resteerende zwavel-waterstof door koken van het filtraat.

Een tweede neerslag wordt teweeg gebracht door aan het filtraat eenige druppels ijzerchloride-solutie en daarna overmaat van ammoniak toe te voegen; het aldus gevormde neerslag van ijzerhydroxyde wordt na eenige uren weder afgefiltreerd; deze bewerking 3 × herhaald.

Eindelijk verwekt men een derde neerslag door toevoeging van bariumchloride bij kookhitte, affiltratie van het neerslag den volgenden dag, herhaling der bewerking onder iets overmaat van zwavelzuur, zoodat alle barium is neergeslagen; hierdoor krijgt intusschen het filtraat een klein gehalte aan caesiumsulfaat naast al het oorspronkelijke caesiumchloride.

De hier gevolgde methode is die ter afscheiding van een zwaar radioactief element. Dit laatste moet dus in het praecipitaat zijn achtergebleven.

De caesiumzouten, die wij bezigden, hebben oorspronkelijk iets van deze onzuiverheid bevat, een redelijke hoeveelheid bij de handelspraeparaten, een physisch nauwelijks waarneembare bij de gezuiverde praeparaten. Wanneer de dosis maar hoog genoeg wordt genomen, zal er genoeg van de onzuiverheid zijn om een werking, zooals wij die van radio-actieve stoffen mogen verwachten, zich te zien openbaren.

Deze biologische werkingen hebben het karakter van een betastraler. Dit blijkt uit het antagonisme van ons caesium tegenover uraan, niet slechts in de paradoxen, doch ook bij evenwicht en Mej. L. Kaiser gaf eenige voorbeelden van zulke Cs-U-evenwichten. Hier volgt een recent voorbeeld.

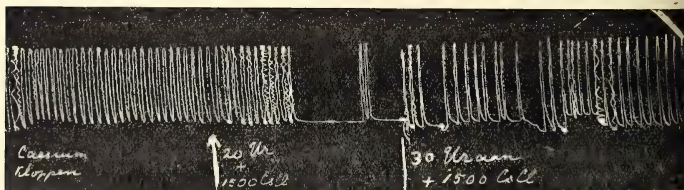


Fig. 2.

Een kikvorschhart klopt aanvankelijk op een Ringersche solutie, waarin zich per Liter in plaats van kalium 10 mgr. uranylnitraat

bevindt. Door toevoeging tot deze vloeistof van 1500 mgr. caesiumchloride ontstaat een radiophysiologisch evenwicht tusschen den alpha-straler uranium en den beta-straler caesium. Aan dit evenwicht beantwoordt een stilstand, waarin zelfs geen latente automatie meer bestaat. Zoodra wij echter de hoeveelheid caesium verhoogen, ontwikkelt zich een caesium-kloppen. Dan laat zich door vermeerdering van de uraanhoeveelheid weer een evenwicht terugroepen, nu op een hooger niveau liggend, omdat van de beide concurreerende bestanddeelen meer is genomen. Ten slotte doet meer uraan de kloppingen terugkeeren.

Daar behalve radio-active paradoxen ook niet-radio-actieve voorkomen (NOYONS, BUSQUET) kan men in de gemakkelijk te voorschijn te roepen, voorbijgaande stilstanden bij overgang van een uraanvloeistof op een caesiumvloeistof en van een caesiumvloeistof op een uraanvloeistof geen beslissende waarde toekennen. Anders echter met de evenwichten. Deze kunnen niet anders dan radium-physiologisch verklaard worden. Het scherpst komt dit uit bij de hoogere evenwichten, waarbij elk der componenten, die gemeenschappelijk in de mengvloeistof aanwezig zijn, in hoeveelheden worden aangetroffen, die zich zeker boven de drempel-concentratie verheffen.

Het blijkt derhalve uit ons onderzoek :

1°. dat de verontreiniging der handelspraeparaten van caesium, die er een zwak stralend vermogen aan geeft, vermoedelijk een zwaar-radio-actief element is.

2°. dat de biologische werking van de verontreiniging in haar aard het karakter van een beta-straler moet hebben.

Bacteriologie. — G. M. KRAAIJ en L. K. WOLFF: *„Over de splitsing van lipoïden door bacteriën."* (1ste mededeeling.)

(Aangeboden door de Heeren C. EIJKMAN en C. H. H. SPRONCK.)

De splitsing van vetten door bacteriën is herhaaldelijk onderzocht en de eigenschappen der lipasen zijn behoorlijk vastgelegd. Daarentegen is ons geen literatuur bekend, die handelt over de splitsing door *bacteriën* van lipoïden. Ook in de algemeene physiologische chemie vindt men maar weinig preciese opgaven over de splitsing van lipoïden (lecithine) door fermenten, afgezien dan van het schoone onderzoek van DELEZENNE en FOURNEAU over de splitsing van lecithine door slangengift. In vele opzichten leek het ons van belang te onderzoeken, in hoever bacteriën in staat zijn lipoïden te splitsen; het zou toch wel kunnen zijn, dat hierbij sterke bloedgiften optreden zooals DELEZENNE en FOURNEAU dit gevonden hebben bij de inwerking van slangengift op lecithine.

Wij hebben allereerst onderzocht of enkele bacteriën, die vet splitsen ook in staat zijn lecithine te splitsen en verder of ook onder de niet-vetsplitsers lecithine splitsers voorkomen.

Wat de methodiek betreft, zoo maakten we meestal gebruik van platen met lecithine-agar, die wij verkregen door gewone neutrale voedingsagar bij ongeveer 50° Celsius te schudden met een geringe hoeveelheid lecithine (ongeveer een halve gram op 100 gr.) Rondom de entstreep vormt zich een hof, indien de lecithine wordt aangetast. Bij microscopisch onderzoek blijkt deze hof per oppervlakte-eenheid meer korrels te bevatten dan overal elders in den voedingsbodem. Platen met eidooier kan men niet gebruiken omdat eidooier ook neutraal-vetten bevat en men dus zoo geen onderscheid kan zien tusschen vet- en lecithine-splitsers. Onze uitkomst ziet men in onderstaande tabel: we kunnen er uit besluiten dat er bacteriën zijn, die vet splitsen maar geen lecithine, vervolgens lecithinesplitsers, die geen vet splitsen, dan bacteriën die geen van beide en eindelijk bacteriën die beide splitsen. (Zie de tabel op p. 625).

De laatste bacterie, die buitengewoon sterk lecithine splitst, echter in het geheel geen vet aantast, hebben wij geisoleerd uit brak water; zij gelijkt veel op de door MATZUSCHITA beschreven bac. piscium pyogenes.

Wij kunnen nog geen antwoord geven op de vraag, hoe de

	Splitsing van	
	Vet	Lecithine
bact. typhi	—	—
„ coli	—	—
„ dysenteriae Shiga	—	—
„ prodigiosus	+	+
„ pyoceaneus	+	+
„ fluor. liquef.	+	+
„ proteus [1]	—	—
Staphylocc. aureus	+	—
spir. El Tor	—	+
„ Dunbar	—	+
spir. cholerae	—	—
Bac. piscium. pyogenes?	—	+

lecithine wordt afgebroken; alleen kunnen wij vermelden dat bij de splitsing door bovengenoemde bacteriën geen haemolysinen optreden. Evenmin hebben wij een samenhang kunnen vinden tusschen haemolyse door bacteriën en lipolyse of lipoïdolyse; zoo hebben we b.v. een staphylococcus aangetroffen die zijn haemolytische eigenschappen had verloren, echter niet zijn lypolytische en aan den anderen kant maakt een onzer colistammen wel haemolyse maar splitst geen vet noch lecithine.

Bij de splitsing van lecithine in bouillon treden geen titreerbare vetzuren voor den dag (Cultuur B piscium pyogenes). Dit gegeven klopt met het ontbreken van haemolytische werking door het gesplitste lecithine, immers bij splitsing van lecithine zóó dat (onverzadigde) vetzuren optreden, moet er ook een haemolytische werking voor den dag komen.

Ten slotte kunnen wij nog meedeelen dat wij uit bovengenoemde bacteriesoorten ook onderzocht hebben op hun splitsend vermogen ten opzichte van cholestearine en lanoline; het laatste werd alleen door een staphylococc. pyogenes aangetast, het eerste alleen door den bac. pyoceaneus.

[1]) Één proteusstam splitste wel vet.

Juni 1923. *Laboratorium voor de Gezondheidsleer der Universiteit van Amsterdam.*

Wiskunde. — G. SCHAAKE: *„De complex der kegelsneden, die vijf gegeven rechten snijden".*

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en JAN DE VRIES).

§ 1. De kegelsneden k^2, die vijf gegeven rechten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 snijden, kunnen we op de punten der ruimte afbeelden door aan elke zoodanige kegelsnede de pool K van haar vlak $\varkappa$ t. o. v. een gegeven kwadratisch oppervlak O toe te voegen. Bij een willekeurig punt K behoort dan de in het poolvlak $\varkappa$ van K gelegen kegelsnede k^2, die door de snijpunten $A_1, A_2, \ldots, A_5$ van $a_1, a_2, \ldots, a_5$ met $\varkappa$ gaat.

Voor deze afbeelding zijn de punten der rechten $a'_1, a'_2, \ldots, a'_5$, die resp. t. o. v. O aan $a_1, a_2, \ldots, a_5$ toegevoegd zijn, singulier. Nemen we immers bijv. K op a'_1, dan gaat $\varkappa$ door a_1 en wordt A_1 dus onbepaald. Bij K behoort nu de bundel van kegelsneden k^2, die door de snijpunten $A_2, \ldots, A_5$ van $\varkappa$ met $a_2, \ldots, a_5$ gaan. Deze zijn dubbelkegelsneden van het door ons beschouwde stelsel S_3 van ∞^3 exemplaren.

Er zijn dus vijf rechten a'_k van singuliere punten van den tweeden graad. Bij een punt van een dezer rechten behoort een bundel dubbelkegelsneden van S_3. Elk dezer rechten is de afbeelding van een stelsel van ∞^2 kegelsneden, wier vlak door een der rechten a_k gaat en die de overige vier dezer rechten snijden.

Nemen we K op een der beide rechten t'_{11} en t'_{12}, die de lijnen a'_2, a'_3, a'_4, a'_5 snijden, bijv. op t'_{11}, dan gaat $\varkappa$ door de toegevoegde rechte t_{11}, die $a_2, \ldots, a_5$ treft en bevat dit vlak ∞^1 aan K toegevoegde ontaarde kegelsneden van S_3, die uit t_{11} en een rechte door het snijpunt A_1 van $\varkappa$ met a_1 bestaan.

Er zijn dus nog tien rechten $t'_{11}, t'_{12} \ldots, t'_{51}, t'_{52}$ van singuliere punten van den eersten graad. Bij een punt van een dezer rechten behoort een bundel van ontaarde kegelsneden, terwijl elk dezer rechten de afbeelding is van een stelsel van ∞^2 ontaarde kegelsneden, waarvan de eene rechte vast is, terwijl de andere rechten een bilineaire congruentie vormen.

§ 2. Doorloopt K een rechte l', dan wentelt $\varkappa$ om de toegevoegde rechte l en zal k^2 dus steeds twee punten met l gemeen hebben.

Bij een rechte l' van punten K behoort dus een stelsel S_1 van ∞^1

kegelsneden, die alle een rechte l *tweemaal en de rechten* $a_1, \ldots, a_5$ *éénmaal snijden.*

Ook het omgekeerde blijkt gemakkelijk.

Wanneer K een vlak π beschrijft, gaat $\varkappa$ steeds door de pool P van π.

Een vlak π *is de afbeelding van een stelsel* S_2 *van* ∞^2 *kegelsneden, wier vlak door een punt* P *gaat en die* $a_1, \ldots, a_5$ *snijden.* Omgekeerd wordt een dergelijk stelsel op een vlak afgebeeld.

Aan de kegelsneden van S_3, die door een bepaald punt P gaan, zijn de punten van een vlakke kromme k_P toegevoegd, die in het poolvlak π van P gelegen is. Om den graad van k_P te bepalen vragen we hoeveel kegelsneden van S_3 door P en door een bepaald punt Q van a_1 gaan. De kegelsneden door P en Q, die a_3, a_4, a_5 snijden, vormen een oppervlak van den vierden graad. Immers bevat een vlak door PQ de niet ontaarde kegelsnede van dit oppervlak, die door P, Q en de snijpunten van dit vlak met a_3, a_4, a_5 gaat, maar bovendien de rechte PQ, die dubbelrechte van het oppervlak is, omdat ze met de beide transversalen van PQ, a_3, a_4 en a_5 twee ontaarde kegelsneden van het oppervlak vormt. Daar a_2 dit oppervlak in vier punten snijdt, gaan er door een punt Q van a_1 vier kegelsneden van het stelsel S_1 der kegelsneden, die $a_1, \ldots, a_5$ snijden en door P gaan. Hieruit volgt, dat een vlak door a'_1 de kromme k_P buiten a'_1 in vier punten snijdt. Verder bezit k_P op a'_1 een dubbelpunt, dat toegevoegd is aan de dubbelkegelsnede van S_1, die in het vlak door P en a_1 gelegen is en door P en de snijpunten van dit vlak met $a_2, \ldots, a_5$ gaat. De beide raaklijnen aan k_P in dit dubbelpunt zijn toegevoegd aan de rechten, die P verbinden met de beide punten, waarin de bijbehoorende dubbelkegelsnede a_1 snijdt. De kromme k_P is dus van den zesden graad. Deze kromme snijdt ook de tien rechten t'_{ik}, bijv. de rechte t'_{11} in het punt, dat behoort bij de ontaarde kegelsnede, welke bestaat uit t_{11} en de transversaal van a_1 en t_{11}, die door P gaat.

Het stelsel der kegelsneden van S_3, *die door een bepaald punt* P *gaan, wordt dus afgebeeld op een vlakke kromme van den zesden graad, welke op* $a'_1, \ldots, a'_5$ *dubbelpunten bezit en de tien rechten* $t'_{11}, \ldots, t'_{52}$ *snijdt.*

Daar k_P dus met een willekeurig vlak zes punten gemeen heeft, gaan van de vlakken der kegelsneden van S_1 *zes* door een willekeurig punt.

Het stelsel S_2' gevormd door de kegelsneden, die een willekeurige rechte l snijden, wordt afgebeeld op een oppervlak O_l. De graad van dit oppervlak, dat is het aantal snijpunten met een willekeurige

rechte m', is gelijk aan het aantal kegelsneden van S_2', wier vlak door een rechte m gaat. Uit het zooeven voor k_P gevonden graadgetal volgt, dat er door een punt P van m zes kegelsneden van S_3 gaan, wier vlakken m bevatten. Alle kegelsneden van S_3, wier vlakken door m gaan, vormen bijgevolg een oppervlak, dat m tot zesvoudige rechte heeft, en daar een vlak door m van dit oppervlak nog een kegelsnede bevat, van den achtsten graad is. Bijgevolg zijn er onder de l snijdende kegelsneden van S_3 *acht*, wier vlak door m gaat en is het aan S_2' toegevoegde oppervlak O_l dus van den achtsten graad. Blijkbaar ligt in den bundel, die aan een punt van een der rechten $a_1', \ldots, a_5'$ toegevoegd is, een dubbelkegelsnede van S_2' en bevat S_2' ook steeds één exemplaar van den aan een punt van een der rechten $t'_{11}, \ldots, t'_{52}$ toegevoegden bundel van ontaarde kegelsneden.

Het stelsel S'_2 *gevormd door de kegelsneden, die een rechte* l *en* $a_1, \ldots, a_5$ *snijden, wordt dus afgebeeld op een oppervlak* O_l *van den achtsten graad, waarvan* $a'_1, \ldots, a'_5$ *dubbelrechten en* $t'_{11}, \ldots, t'_{21}$ *enkelvoudige rechten zijn.* De beide raakvlakken in een punt van een der rechten a' aan O_l zijn de poolvlakken der punten, waarin de bij dit punt behoorende dubbelkegelsnede van S_2' de aan a' toegevoegde rechte a snijdt.

Ten slotte onderzoeken we het oppervlak O_φ, dat de afbeelding is van het systeem S_2'' der kegelsneden van S_3' die een vlak φ aanraken. De graad van O_φ is weer gelijk aan het aantal kegelsneden van S_2'', wier vlak door een willekeurige rechte m gaat. Het achtstegraadsoppervlak der kegelsneden, wier vlakken door m gaan en die $a_1, \ldots, a_5$ snijden, heeft met φ een kromme k^8 van den achtsten graad gemeen, die in het snijpunt (m, φ) van m met φ een zesvoudig punt heeft. Daar elk der kegelsneden van dit oppervlak met k^8 een puntenpaar gemeen heeft, dat op een rechte door (m, φ) ligt, is het aantal exemplaren, dat φ aanraakt, gelijk aan het aantal raaklijnen, die uit (m, φ) aan k^8 getrokken worden kunnen, dat is $8 \times 7 - 6 \times 7 = 14$. Het stelsel S_2'' bevat bijgevolg veertien kegelsneden, wier vlak door m gaat en de graad van O_φ is dus veertien. Nu bezit S_2'' in den bij een punt van een der vijf rechten a' behoorenden bundel twee dubbelkegelsneden en heeft dit stelsel met den bij een punt van een der rechten t' behoorenden bundel van ontaarde kegelsneden één exemplaar gemeen. Dit laatste exemplaar is een dubbelkegelsnede van S_2''. Nemen we nl. een rechte m van zijn vlak, dan telt het tweemaal onder de kegelsneden van S_2'', wier vlakken door m gaan. Immers splitst zich van het stelsel der kegelsneden van S_3, die m tweemaal snijden, de genoemde bundel

van ontaarde kegelsneden af, zoodat er een zevendegraadsoppervlak overblijft, dat φ volgens een kromme k^7 snijdt met vijfvoudig punt in (m, φ). In plaats van 14 zijn nu uit (m, φ) $7 \times 6 - 5 \times 6 = 12$ raaklijnen aan deze kromme te trekken. Een rechte m' door een punt van een rechte t' heeft in dit punt dus twee samenvallende snijpunten met O_φ.

Het stelsel S''_2 gevormd door de kegelsneden van S_3, die een vlak φ aanraken, wordt afgebeeld op een oppervlak O_φ van den veertienden graad, waarvan $a'_1, \ldots, a'_5$ viervoudige rechten en $t'_{11}, \ldots\ldots, t'_{52}$ dubbelrechten zijn.

§ 3. Uit de onderzochte afbeelding kunnen nu in de eerste plaats aantallen van kegelsneden, die vijf rechten snijden en aan een drievoudige voorwaarde voldoen, afgeleid worden [1]).

Van de 48 punten, die een kromme k_P met een oppervlak O_l gemeen heeft, vallen er $2 \times 2 = 4$ in elk der dubbelpunten van k_P en één in elk der tien punten, die k_P met de rechten t' gemeen heeft. De kromme k_P snijdt dus een oppervlak O_l in achttien voor de afbeelding niet singuliere punten.

Er zijn dus achttien kegelsneden, die door een gegeven punt gaan en zes gegeven rechten snijden.

Van de 84 punten, waarin een kromme k_P een oppervlak O_φ treft, vallen er $2 \times 4 = 8$ in elk der vijf dubbelpunten van k_P en twee in elk der tien punten, waarin k_P de rechten t' treft. Hier hebben we dus 24 voor onze afbeelding niet singuliere snijpunten.

Er zijn dus 24 kegelsneden, die door een gegeven punt gaan, een gegeven vlak aanraken en vijf gegeven rechten snijden.

Van de kromme van den graad 64, die twee oppervlakken O_l gemeen hebben, splitst zich elk der rechten a' viermaal en elk der rechten t' éénmaal af. Er blijft dus een kromme over van den graad 34, k^{34}, die de afbeelding is van het stelsel der in S_3 gelegen kegelsneden, die twee gegeven rechten snijden. De kegelsneden van dit stelsel, wier vlak door een willekeurig punt gaat, worden afgebeeld op de snijpunten van k^{34} met het poolvlak van dit punt.

Er zijn dus 34 kegelsneden, die zeven gegeven rechten snijden en hun vlak door een gegeven punt zenden.

In § 2 hebben we gevonden, dat er acht kegelsneden zijn, die zes gegeven rechten snijden en wier vlak door een eveneens gegeven rechte gaat. Hieruit volgt, dat het aan k^{34} toegevoegde stelsel acht

[1]) Vgl. SCHUBERT: „*Kalkül der Abzählenden Geometrie*", p. 95.
JAN DE VRIES, *Verslagen*, X, 1901, p. 192.

dubbelkegelsneden bevat, wier vlakken door een willekeurige der rechten a gaan en dat dus k^{84} op elke rechte a' acht dubbelpunten bezit.

Evenzoo bezit het bij k^{84} behoorende stelsel telkens twee ontaarde kegelsneden, wier beeldpunt op een willekeurige der rechten t' ligt. Zoo behooren bij punten van t'_{11} de beide kegelsneden, die bestaan uit t_{11} en de transversalen van t_{11}, a_1 en de beide van de rechten a verschillende richtlijnen van het beschouwde stelsel kegelsneden. Dus treft k^{84} elk der rechten t' in twee punten.

De kromme k^{34} snijdt een derde oppervlak O_l in 272 punten. Hiervan liggen er vier in elk der 40 dubbelpunten van k^{84}, terwijl er 20 tot rechten t behooren. Er zijn bijgevolg 92 voor de afbeelding niet singuliere snijpunten.

Er zijn 92 *kegelsneden, die acht gegeven rechten snijden.*

Uit het aantal voor de afbeelding niet singuliere snijpunten van k^{84} met een oppervlak O_φ volgt:

Er zijn 116 *kegelsneden, die zeven gegeven rechten snijden en een gegeven vlak aanraken.*

Een oppervlak O_l en een oppervlak O_φ hebben een doorsnijding van den graad 112. Hiervan splitst zich elk der rechten a' achtmaal en elk der rechten t' tweemaal af. Er blijft een kromme van den graad 52 over.

Er zijn 52 *kegelsneden, die zes gegeven rechten snijden, een gegeven vlak aanraken en wier vlakken door een gegeven punt gaan.*

Onderzoeken we nog uitvoeriger de doorsnijding van twee oppervlakken O_φ. Deze is van den graad 196; elk der rechten a' splitst zich zestien-, elke rechte t' viermaal hiervan af. Er blijft dus een kromme over van den graad 76, k^{76}.

Er zijn 76 *kegelsneden, die vijf rechten snijden, twee gegeven vlakken aanraken en wier vlakken door een gegeven punt gaan.*

De kromme k^{76} heeft evenveel dubbelpunten op a'_1, als er kegelsneden zijn, wier vlakken door a_1 gaan, die $a_2, \ldots, a_6$ snijden en de vlakken φ_1 en φ_2 aanraken. Om dit laatste aantal te vinden merken we in de eerste plaats op, dat de kegelsneden door twee punten A en B van a_1, die a_2 snijden en φ_1 en φ_2 aanraken, een oppervlak vormen van den achtsten graad. Immers liggen in elk vlak door a_1 vier kegelsneden, die aan de genoemde voorwaarden voldoen en is a_1 niet bestanddeel van een dergelijke ontaarde kegelsnede. Hieruit volgt, dat er acht kegelsneden door A en B gaan, die a_2 en a_3 snijden en φ_1 en φ_2 aanraken en dat de rechte a_1 dus een achtvoudige rechte is van het oppervlak gevormd door de kegelsneden, die door A gaan, a_1 buiten A nog treffen, a_2 en a_3

snijden en φ_1 en φ_2 aanraken. Dit oppervlak is van den zestienden graad, zooals uit zijn doorsnede met een vlak door a_1 blijkt. Van het oppervlak, dat bestaat uit de kegelsneden, wier vlakken door a_1 gaan, die a_2, a_3 en a_4 snijden en φ_1 en φ_2 aanraken, is a_1 dus een zestienvoudige rechte en dit oppervlak is van den 24^en^ graad. Het aantal kegelsneden, dat we zoeken, is dus 24 en k^{76} bezit bijgevolg 24 dubbelpunten op elk der rechten a'. Daar bijv. de rechte t_{11} niet bestanddeel is van een ontaarde kegelsnede, die $a_1, \ldots, a_5$ snijdt en φ_1 en φ_2 aanraakt, heeft k^{76} geen punt met een der rechten t' gemeen.

Bepalen we nu de aantallen voor de afbeelding niet singuliere snijpunten van k^{76} met oppervlakken O_l en O_φ, dan blijkt resp.:

Er zijn 128 *kegelsneden, die zes gegeven rechten snijden en twee gegeven vlakken aanraken.*

Er zijn 104 *kegelsneden, die vijf gegeven rechten snijden en drie gegeven vlakken aanraken.*

§ 4. Het geslacht van het stelsel der kegelsneden, die door een bepaald punt P gaan en $a_1, \ldots, a_5$ snijden is gelijk aan dat der toegevoegde kromme k_P, die van den zesden graad is en vijf dubbelpunten bezit, dus gelijk aan *vijf*. Volgens de eerste stelling van § 3 vormen deze kegelsneden een oppervlak van den achttienden graad Ω^{18}. Aan een kegelsnede van Ω^{18} voegen we de beide punten toe, waarin ze een vlak φ snijdt en die dus steeds tot de kromme k^{18} behooren, volgens welke Ω^{18} door φ gesneden wordt. Op de zoo verkregen (1,2)-verwantschap tusschen de kegelsneden van Ω^{18} en de punten van k^{18} passen we de geslachtsformule van ZEUTHEN toe:

$$\eta_2 - \eta_1 = 2\alpha_1(p_2 - 1) - 2\alpha_2(p_1 - 1) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dan is $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $p_1 = 5$, $\eta_1 = 0$ en $\eta_2 =$ het aantal kegelsneden van Ω^{18}, die φ aanraken, dat is volgens § 3 24. Door substitutie van deze waarden in (1) vinden we, dat p_2, dat is het geslacht van k^{18}, gelijk is aan 21. De kromme k^{18} bezit dus 115 dubbelpunten. Hieronder moet elk der snijpunten van φ met een rechte a, in welke k^{18} viervoudige punten bezit, zesmaal geteld worden. Verder zijn hierin begrepen de tien snijpunten van φ met de vijf dubbelkegelsneden van Ω^{18}, wier vlakken door een der rechten a gaan en de tien punten, waarin φ gesneden wordt door de dubbelrechten van Ω^{18}, dat zijn de transversalen t_P van twee der rechten a, die door P gaan en telkens door de beide transversalen van t_P en de drie overige rechten a tot een kegelsnede van Ω^{18} aangevuld worden. Er blijven dus 65 dubbelpunten over.

Het oppervlak der kegelsneden, die door een bepaald punt gaan

en vijf rechten snijden, bezit een dubbelkromme van den 65*en graad.*

Een vlak φ door a_1 heeft met Ω^{18} behalve a_1 nog een kromme van den graad 14 k^{14} gemeen, waarvan de punten éénwaardig aan de erdoor gaande kegelsneden van Ω^{18} toegevoegd kunnen worden, zoodat k^{14} van het geslacht *vijf* is en dus $\frac{13 \times 12}{2} - 5 = 73$ dubbelpunten bezit. Hiervan liggen er zes in elk der vier snijpunten van φ met een der rechten $a_2, \ldots, a_5$, terwijl verder ook hieronder begrepen zijn de vier buiten a_1 gelegen snijpunten van φ met de dubbelkegelsneden van Ω^{18}, wier vlakken niet door a_1 gaan en de snijpunten van φ met de zes transversalen door P over twee der rechten $a_2, \ldots, a_5$. Zonderen we deze uit, dan blijven er nog 39 dubbelpunten over. Hieruit volgt, dat de dubbelkromme van Ω^{18} de rechte a_1 in 26 punten treft. Dit zijn punten van a_1, waardoor twee kegelsneden van ons stelsel gaan, die daar een gemeenschappelijk raakvlak hebben, dat door a_1 gaat.

Het oppervlak Ω^{18} heeft in P een twaalfvoudig punt, daar er volgens § 2 zes kegelsneden in ons stelsel voorkomen, die een door P gaande rechte buiten P nog snijden. Een vlak door P snijdt uit Ω^{18} een kromme van den graad achttien en van het geslacht vijf, daar de punten van die kromme weer éénwaardig aan de erdoor gaande kegelsneden toegevoegd kunnen worden. Deze kromme heeft bijgevolg 131 dubbelpunten. Hiervan liggen er 66 in P, zes in elk der snijpunten met de rechten a, terwijl ook de buiten P liggende snijpunten van de vijf dubbelkegelsneden met het vlak moeten meegeteld worden. Er blijven dus 30 dubbelpunten over.

De dubbelkromme van Ω^{18} *treft elke rechte a in* 26 *punten en heeft in P een* 35-*voudig punt.*

Met de 35 takken der dubbelkromme door P komen evenveel paren kegelsneden van Ω^{18} overeen, die elkaar in dit punt aanraken. Ze moet met het vlak (P, a_1) buiten P en a_1 nog vier punten gemeen hebben. Deze liggen in de van P verschillende snijpunten van de in het vlak (P, a_1) gelegen dubbelkegelsnede en de beide rechten, die P verbinden met de punten in welke de transversalen van $a_2, \ldots, a_5$ het vlak treffen. Immers zijn deze beide snijpunten dubbelpunten voor de beschouwde kromme.

Op analoge wijze kunnen de dubbelkrommen onderzocht worden van het oppervlak Ω^{34}, dat bestaat uit de kegelsneden, die zes gegeven rechten snijden en hun vlakken door een gegeven punt zenden en van het oppervlak Ω^{52}, dat gevormd wordt door de kegelsneden, die vijf gegeven rechten snijden, een gegeven vlak aanraken en wier vlakken door een gegeven pnnt gaan.

§ 5. We bepalen nu allereerst het geslacht van de kromme k^{34} die tot de doorsnijding van twee oppervlakken O_l en O_l' behoort. De kegel K^{34}, die k^{34} uit een willekeurig punt K projecteert, heeft met O_l behalve k^{34} nog een kromme gemeen van den graad 238: k^{238}. Deze kromme heeft dubbelpunten in elk der dubbelpunten van k^{34}, omdat de totale doorsnijding van K^{34} en O_l in zoo'n punt een viervoudig punt bezit. Verder snijdt K^{34} elk der rechten a' nog in 18 punten en hier bezit k^{238} dubbelpunten. Echter heeft deze kromme op elk der rechten t' 32 enkelvoudige punten.

Het oppervlak O_l' wordt door k^{238} in

$$238 \times 8 - 5 \times 26 \times 4 - 10 \times 32 = 1064$$

voor de afbeelding niet singuliere punten gesneden. Dit zijn snijpunten van k^{34} en k^{238}; ze vallen gedeeltelijk in de punten, waar een beschrijvende van K^{34} het oppervlak O_l aanraakt, dus in de voor onze afbeelding niet singuliere snijpunten van k^{34} met het pooloppervlak van K t. o. v. O_l. Daar dit pooloppervlak van den zevenden graad is en enkelvoudig door de rechten a' gaat, snijdt het k^{34} in $7 \times 34 - 5 \times 2 \times 8 = 158$ niet singuliere punten. De overige 906 snijpunten van k^{34} en k^{238} zijn de punten, waar de door K gaande bisecanten van k^{34} deze kromme snijden. Er gaan door K dus 453 bisecanten van k^{34}, terwijl in een vlak $\frac{34 \times 33}{2} = 561$ koorden van deze kromme liggen.

Hieruit volgt:

De dubbelraaklijnen van het ontwikkelbare oppervlak, dat omhuld wordt door de vlakken der kegelsneden, die zeven gegeven rechten snijden, vormen een congruentie (561, 453).

Daar K^{34} $453 + 5 \times 8 = 493$ dubbele beschrijvenden heeft, is het geslacht van de kromme k^{34} en dus ook het geslacht van het stelsel der kegelsneden, die de rechten $a_1, \ldots, a_5$, l en l' snijden, gelijk aan: $16 \times 33 - 493 = 35$.

We voegen nu weer aan elke kegelsnede van het oppervlak Ω^{92}, dat bij de kromme k^{34} behoort, het puntenpaar toe, waarin een zoodanige kegelsnede een willekeurig vlak φ snijdt en dat tot de kromme k^{92} behoort, volgens welke Ω^{92} het vlak φ snijdt. De formule:

$$\eta_2 - \eta_1 = 2a_1 (p_2 - 1) - 2a_2 (p_1 - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

passen we toe op de zoo verkregen (1,2)-verwantschap tusschen de kegelsneden van Ω^{92} en de punten van k^{92}. Hier is $\eta_2 =$ het aantal kegelsneden, die zeven rechten snijden en een vlak aanraken, dat is volgens § 3 116. Verder is $\eta_1 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ en $p_1 = 35$.

Uit (1) volgt met behulp van deze waarden, dat het geslacht van k^{92} gelijk is aan 127.

Het aantal dubbelpunten van k^{92} is bijgevolg $91 \times 45 - 127 = 3968$. Daar door een punt van een der richtlijnen van Ω^{92} achttien kegelsneden van dit oppervlak gaan en die richtlijnen dus achttienvoudige rechten van Ω^{92} zijn, heeft k^{92} in de snijpunten van φ met deze richtlijnen achttienvoudige punten en liggen in elk dezer punten dus $\frac{18 \times 17}{1 \times 2} = 153$ uit het genoemde aantal dubbelpunten. De snijpunten van φ met de 70 dubbelrechten van Ω^{92}, dat zijn de transversalen d van vier der richtlijnen, welke telkens door de transversalen van d en de drie overige richtlijnen tot twee ontaarde kegelsneden van Ω^{92} aangevuld worden, zijn evenals de 112 snijpunten van φ met de $7 \times 8 = 56$ dubbelkegelsneden van Ω^{92}, wier vlakken door een der richtlijnen gaan, dubbelpunten van k^{92}. Er blijven dus 2715 dubbelpunten over.

Het oppervlak, gevormd door de kegelsneden, die zeven gegeven rechten snijden, bezit dus nog een dubbelkromme van den graad 2715.

De doorsnede van Ω^{92} met een vlak φ door a_1 bestaat behalve uit a_1 nog uit een kromme van den graad $74 : k^{74}$. Voegen we aan een punt van k^{74} de erdoor gaande kegelsnede van Ω^{92} toe, dan krijgen we een (1,1)-verwantschap tusschen de kegelsneden van Ω^{92} en de punten van k^{74}. Het geslacht van k^{74} is dus 35 en het aantal dubbelpunten $73 \times 36 - 35 = 2593$. De snijpunten van φ met de zes van a_1 verschillende richtlijnen van Ω^{92} zijn achttienvoudige punten van k^{74} en dus elk 153 maal in het genoemde aantal dubbelpunten begrepen. Verder is elk snijpunt met φ van een der dertig dubbelrechten van Ω^{92}, die a_1 niet snijden, evenals elk buiten a_1 gelegen snijpunt met φ van een der 48 dubbelkegelsneden van Ω^{92}, die a_1 slechts éénmaal treffen, een dubbelpunt van k^{74}. We houden dus 1597 dubbelpunten over. Hieruit volgt:

De gevonden dubbelkromme van Ω^{92} treft elk der richtlijnen van dit oppervlak in 1118 *punten.* Dit zijn punten, waardoor twee kegelsneden van ons stelsel gaan, die daar een gemeenschappelijk raakvlak hebben, dat door de richtlijn gaat.

Op analoge wijze kan de dubbelkromme onderzocht worden van het oppervlak Ω^{116}, dat gevormd wordt door de kegelsneden, die zes gegeven rechten snijden en een gegeven vlak aanraken en die van het oppervlak Ω^{128}, dat bestaat uit de kegelsneden, die vijf gegeven rechten snijden en twee gegeven vlakken aanraken.

Wiskunde. — G. SCHAAKE: *„Over de waaiers, die van een gegeven algebraïsche stralencongruentie drie rechten bevatten.”*

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en JAN DE VRIES).

§ 1. In zijn *„Kalkül der Abzählenden Geometrie”*, p. 331 vindt SCHUBERT, dat de toppen der waaiers, die van de congruentie, welke aan twee stralencomplexen van den graad m en m' gemeen is, drie rechten bevatten, een oppervlak vormen van den graad:

$$\tfrac{1}{3}\, mm'\, (mm'-2)\, (2mm'-3m-3m'+4),$$

terwijl de vlakken dezer waaiers een oppervlak van dezelfde klasse omhullen. In deze mededeeling zal afgeleid worden, hoe deze beide uitkomsten voor een willekeurige algebraïsche stralencongruentie luiden. Hiertoe maken we gebruik van de afbeelding van een specialen lineairen complex C op een lineaire driedimensionale ruimte R_3, die in STURM: *„Liniengeometrie”*, I op p. 269 beschreven wordt. Vooraf geven we echter van deze afbeelding een afleiding, die van de t.a.p. voorkomende verschilt.

§ 2. Wanneer we aan een rechte l, die $p_1, \ldots p_6$ tot coördinaten heeft, het in een lineaire vijfdimensionale ruimte R_5 gelegen punt P toevoegen, waarvan genoemde zes grootheden de homogene coördinaten zijn, dan wordt een speciale lineaire complex C afgebeeld op de doorsnijding van de variëteit V, die tot vergelijking heeft:

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

en een harer vierdimensionale raakruimten R_4.

Deze doorsnijding is een quadratische hyperkegel K, die zijn top T heeft in het punt, waarin R_4 de variëteit V aanraakt. Daar de beschrijvenden van K een willekeurige driedimensionale ruimte in de punten van een quadratisch oppervlak snijden, bevat K twee stelsels van vlakken, die elk een der regelscharen van genoemd oppervlak uit T projecteeren. Twee vlakken van hetzelfde stelsel hebben slechts den top T, twee vlakken van verschillende stelsels daarentegen een beschrijvende van K gemeen. De vlakken V_p van het eene stelsel zijn de afbeeldingen der stralensterren van den complex C, die dus haar top op de as a van C hebben en aan de vlakken V_v van het andere stelsel zijn de stralenvelden van C toegevoegd, waarvan de vlakken door a gaan. Bij den top T van K

en bij de beschrijvenden van dezen hyperkegel behooren resp. de as a van C en de waaiers van dezen complex, die a bevatten. Een rechte van K, die in een vlak V_p gelegen is, beeldt een waaier van C af, waarvan de top op a ligt, terwijl aan een rechte van een vlak V_v een waaier van C toegevoegd is, waarvan het vlak door a gaat.

We nemen nu op K een punt S en in de vierdimensionale ruimte R_4 een driedimensionale ruimte R_3 aan. De in § 1 genoemde afbeelding ontstaat dan, als we aan elke rechte l de projectie L van P uit S op R_3 toevoegen, wanneer P het op K bij l behoorende punt is[1]).

§ 3. De rechte s van C, waarvan S het op K gelegen beeldpunt is, is voor de verwantschap $(l—L)$ een *singuliere rechte* van den tweeden rang. Aan deze rechte zijn namelijk in R_3 alle punten van het vlak ϱ toegevoegd, dat de in R_4 gelegen driedimensionale raakruimte R van K in S met R_3 gemeen heeft.

In de ruimte R liggen de twee vlakken V^1_p en V^1_v van K, wier snijlijn de door S gaande beschrijvende b_1 van K is. Bij deze vlakken behooren resp. de ster van C, die haar top heeft in het snijpunt A van s en a, en het veld van C, dat uit de stralen van het vlak α bestaat, dat door s en a gebracht kan worden. De ster A en het veld α hebben den waaier (A, α) gemeen, waaraan op K de rechte b_1 toegevoegd is.

De vlakken V^1_p en V^1_v snijden ϱ resp. volgens de rechten p_1 en v_1, die beide uit voor de verwantschap $(l—L)$ singuliere punten bestaan. Immers behoort bij elk punt L van p_1 op K een door S gaande rechte uit V^1_p, dus in C een s bevattende waaier met top in A. Evenzoo is aan elk punt L van v_1 een waaier in α toegevoegd, die s bevat. Het snijpunt B_1 van p_1 en v_1 is beeldpunt L voor alle stralen l uit den waaier (A, α). Bij de ∞^1 punten van p_1 behooren zoo de ∞^2 rechten van de ster A, bij de ∞^1 punten van v_1 de ∞^2 stralen van het veld α.

Aan een waaier met top op a is op K een rechte toegevoegd, die in een vlak V_p ligt, dus V_{v_1} snijdt; bijgevolg behoort bij zoo'n waaier in R_3 een rechte, die v_1 snijdt. Omgekeerd snijdt het vlak door S en een v_1 snijdende rechte van R_3 uit den hyperkegel K een in V_{v_1} gelegen rechte door S, waarbij de waaier van C behoort, die aan het singuliere snijpunt der aangenomen rechte met v_1 toe-

[1]) De hier toegepaste methode is voor de stralenruimte aangegeven door FELIX KLEIN. Vg. Mathem. Annalen, Bd. 5, p. 257.

gevoegd is, en een V_{v_1} snijdende rechte, die dus in een vlak V_p ligt en bijgevolg bij een waaier van C behoort, waarvan de top op a ligt. Evenzoo blijkt, dat de waaiers van C, wier vlak door a gaat, afgebeeld worden op de rechten van R_3, die p_1 snijden en dat de waaiers, die a bevatten, toegevoegd zijn aan de rechten, die door het snijpunt B_1 van p_1 en v_1 gaan (immers snijdt een vlak door SB_1 den hyperkegel K buiten SB_1 nog volgens een beschrijvende).

Bij een ster van C, waarvan de top dus op a ligt, behoort op K een vlak V_p, dat V_{v_1} volgens een rechte snijdt en waarvan de projectie op R_3 bijgevolg door v_1 gaat. Hieruit volgt, dat aan een ster van C in R_3 een vlak door v_1 toegevoegd is. Even gemakkelijk blijkt, dat ook het omgekeerde geldt en dat de velden van C, wier vlakken dus door a gaan, afgebeeld worden op de vlakken van R_3, die door p_1 gaan.

§ 4. Een congruentie $\Gamma(\alpha, \beta)$ met schoofgraad α en veldgraad β heeft met C een regeloppervlak Ω gemeen van den graad $\alpha + \beta$, dat a tot α-voudige richtlijn heeft. Is Γ verder van den rang r, dan zijn er r waaiers door a, die twee rechten van Ω bevatten.

De in R_3 gelegen kromme γ, waarop Ω afgebeeld wordt, treft p_1 in de α punten, die toegewezen zijn aan de α beschrijvenden van Ω, die door A gaan en v_1 in de β punten, welke bij de β in het vlak (a, s) gelegen beschrijvenden van Ω behooren. Een vlak door p_1 snijdt γ buiten p_1 in de β beeldpunten der rechten die het bijbehoorende veld van C met Ω gemeen heeft en evenzoo blijkt, dat een vlak door v_1 de kromme γ buiten v_1 in α punten treft. Hieruit volgt, dat γ van den graad $\alpha + \beta$ is.

Met de r waaiers door a, die twee rechten van Ω bevatten, komen in R_3 evenveel door B_1 gaande bisecanten van de kromme γ overeen. Bovendien gaan door B_1 de resp. α- en β-voudige snijlijnen p_1 en v_1 van γ. Het aantal schijnbare dubbelpunten van γ is dus gelijk aan:

$$r + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1) + \tfrac{1}{2}\,\beta\,(\beta-1).$$

We wijzen nog even op een toepassing, die STURM in zijn in § 1 aangehaald boek op pag. 271 geeft. De graad van het focaaloppervlak van de congruentie Γ is gelijk aan het aantal schooven met top op a, die twee oneindig dicht bij elkaar gelegen rechten van Γ en dus van Ω bevatten. Deze worden afgebeeld op de vlakken door v_1, die γ buiten v_1 aanraken. Hieruit volgt, dat de graad van het focaaloppervlak van Γ gelijk is aan het aantal buiten γ gelegen snijpunten van v_1 met het raaklijnenoppervlak van γ. De graad van

laatstgenoemd oppervlak, dat γ tot dubbelkromme (keerkromme) heeft, is gelijk aan:

$$2(\alpha\beta - r).$$

Dit vinden we door in de formule $n(n-1) - 2h$ voor n den graad $\alpha + \beta$ van γ en voor h het boven gevonden aantal schijnbare dubbelpunten dezer kromme te substitueeren. Daar v_1 het beschouwde oppervlak op de dubbelkromme γ in β punten snijdt, vinden we voor het aantal buiten γ gelegen snijpunten, dat is den graad van het focaaloppervlak der congruentie Γ:

$$2\beta(\alpha - 1) - 2r.$$

De klasse van het focaaloppervlak van Γ is gelijk aan het aantal vlakken door a, die twee oneindig dicht bij elkaar gelegen rechten van Γ en dus van Ω bevatten of gelijk aan het aantal vlakken door p_1, die γ buiten p_1 aanraken. Daar p_1 de kromme γ in α punten snijdt, vinden we voor de gezochte klasse:

$$2\alpha(\beta - 1) - 2r.$$

§ 5. Ten einde den graad te vinden van het oppervlak gevormd door de toppen der waaiers, die drie beschrijvenden van Γ bevatten, bepalen we het aantal dezer waaiers, die hun top op a hebben. Deze behooren geheel tot C en worden afgebeeld op de trisecanten van γ, die v_1 buiten deze kromme snijden.

De graad van het oppervlak Δ der trisecanten van γ wordt gevonden door in de formule:

$$(n-2)\{h - \tfrac{1}{6}n(n-1)\},$$

die door Cayley hiervoor aangegeven is, voor n den graad $\alpha + \beta$ van γ en voor h het in § 3 gevonden aantal schijnbare dubbelpunten van deze kromme te substitueeren. We vinden dan:

$$(\alpha + \beta - 2)\{r + \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha - 1) + \tfrac{1}{2}\beta(\beta - 1) - \tfrac{1}{6}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)\}$$

of, na een eenvoudige herleiding:

$$(\alpha + \beta - 2)r + \tfrac{1}{3}\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) + \tfrac{1}{3}\beta(\beta - 1)(\beta - 2).$$

Om het aantal beschrijvenden van Δ te vinden, die v_1 snijden, merken we op, dat dit de gemeenschappelijke rechten zijn van Δ en den specialen lineairen complex, die v_1 tot as heeft. Nu is de as van een specialen lineairen complex C als dubbelrechte van C te beschouwen. Dit volgt in de eerste plaats uit de afbeelding van C op een hyperkegel K, die in § 2 beschreven is en door welke de as van C in den top van K overgaat, maar ook uit de bekende eigenschap, dat er $n-2$ beschrijvenden van een regeloppervlak van den graad n zijn, die een rechte van dit oppervlak snijden. Verder

is v_1 als β-voudige snijlijn van γ blijkbaar een $\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}$-voudige beschrijvende van Δ. Het aantal beschrijvenden van Δ, die v_1 snijden, vinden we dus door het boven gevonden graadgetal te verminderen met:

$$\tfrac{1}{3}\beta(\beta-1)(\beta-2).$$

Hieruit volgt, dat er

$$(\alpha+\beta-2)\,r+\tfrac{1}{3}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

rechten van Δ zijn, die v_1 snijden.

Uit te zonderen is in de eerste plaats de rechte p_1 $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}$ maal, want deze is als α-voudige snijlijn van γ een $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}$-voudige beschrijvende van Δ. Verder hebben we de gevonden uitdrukking te verminderen met het aantal der trisecanten van γ, die v_1 op γ snijden. Dit laatste geschiedt in elk der β punten, die γ met v_1 gemeen heeft. Het aantal der door zoo'n punt gaande trisecanten van γ vinden we met behulp van de eigenschap, dat er door een punt van een ruimtekromme van den graad n met h schijnbare dubbelpunten $h-n+2$ rechten gaan, die bovendien nog twee punten van de kromme bevatten, als we er maar rekening mede houden, dat in ons geval voor elk der β genoemde punten v_1 $\frac{(\beta-1)(\beta-2)}{2}$ maal medetelt onder de erdoor gaande trisecanten van γ, daar v_1 buiten het beschouwde punt nog $\beta-1$ punten van γ bevat. Er zijn bijgevolg:

$$\beta\{r+\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)+\tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)-\alpha-\beta+2-\tfrac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2)\}$$

of:

$$\beta\{r+\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\}$$

trisecanten van γ, die v_1 op γ snijden, uit te zonderen.

Wanneer we deze beide aantallen van uit te zonderen rechten aftrekken van het boven gevonden aantal van rechten van Δ, die v_1 snijden, dan vinden we, dat er:

$$\tfrac{1}{6}(\alpha-2)\{6r-(\alpha-1)(3\beta-1)\}$$

trisecanten van γ zijn, die v_1 buiten deze kromme snijden.

Volgens het begin van deze § komen we dus tot de volgende stelling:

De meetkundige plaats van de toppen der waaiers, die met een congruentie $\{\alpha,\beta\}$ *van den rang r drie rechten gemeen hebben, is een oppervlak van den graad*:

$$\tfrac{1}{6}(\alpha-2)\{6r-(\alpha-1)(3\beta-\alpha)\}.$$

§ 6. Om aan te toonen, dat de in § 5 gevonden uitkomst met het in § 1 genoemde resultaat van SCHUBERT in overeenstemming is, hebben we den rang te kennen van de congruentie $\Gamma(mm', mm')$, die gemeen is aan twee complexen C_1 en C_2 van den graad m en m'. We zouden kunnen volstaan met hiervoor te verwijzen naar SCHUBERT, *Kalkül der Abzählenden Geometrie*, waarin op p. 330 een afleiding van dit getal voorkomt. Echter zullen we aantoonen, dat de rang van Γ ook met behulp van de in deze mededeeling gebruikte afbeelding gevonden kan worden.

Het oppervlak Ω, dat uit de rechten van Γ bestaat, die de as a van C snijden, is nu van den graad $2mm'$ en heeft a tot mm'-voudige rechte. Het is de doorsnijding van de twee congruenties $\Sigma_1(m, m)$ en $\Sigma_2(m', m')$, die uit de rechten van C_1 en C_2 bestaan, welke a snijden.

Σ_1 en Σ_2 worden resp. op twee in R_3 gelegen oppervlakken S_1 en S_2 afgebeeld. Daar C_1 en dus Σ_1 van een willekeurigen waaier van Cm beschrijvenden bevat, zijn alle punten van p_1 en v_1 m-voudige punten van S_1 en hebben alle p_1 en v_1 snijdende rechten bovendien nog m punten met S_1 gemeen. Hieruit volgt, dat S_1 van den graad $2m$ is en dat p_1 en v_1 m-voudige rechten van S_1 zijn. Evenzoo is S_2 van den graad $2m'$ en zijn p_1 en v_1 m'-voudige rechten van dit oppervlak. De doorsnede van S_1 en S_2 bestaat uit de rechten p_1 en v_1 elk mm' maal geteld en de kromme γ, waarop Ω afgebeeld wordt. Deze kromme is van den graad $2mm'$ en heeft mm' punten gemeen met elk der rechten p_1 en v_1. We bepalen eerst het aantal schijnbare dubbelpunten van γ.

De kegel Λ, die γ uit een willekeurig punt L van R_3 projecteert, is van den graad $2mm'$ en heeft met S_1 behalve γ nog een kromme ϱ gemeen van den graad $4m^2m' - 2mm' = 2mm'(2m-1)$. De kromme ϱ heeft $(m-1)$-voudige punten in de $2mm'$ punten, waar γ de rechte p_1 of v_1 snijdt, omdat de totale doorsnijding van Λ en S_1 daar m-voudige punten hebben moet. Verder snijdt Λ elk der rechten p_1 en v_1 nog in mm_1 voor ϱ m-voudige punten. Daar al deze punten voor S_2 m'-voudig zijn, heeft ϱ $4mm'^2(2m-1) - 2mm'^2(m-1) - 2m^2m'^2 = 2mm'^2(2m-1)$ snijpunten met S_2, die buiten p_1 en v_1 liggen. Deze behooren tot γ en vallen voor een deel in de punten, waar een beschrijvende van Λ het oppervlak S_1 op γ aanraakt, dus in de buiten p_1 en v_1 liggende snijpunten van het eerste pooloppervlak van L t. o. v. S_1 met γ. Daar dit pooloppervlak van den graad $2m-1$ is en in p_1 en v_1 $(m-1)$-voudige rechten bezit, snijdt het γ buiten p_1 en v_1 in $2mm'(2m-1) - 2mm'(m-1) = 2m^2m'$ punten. De overige $2mm'^2(2m-1) - 2m^2m' = 2mm'(2mm' -$

$-m-m'$) punten, waarin ϱ en γ elkaar buiten p_1 en v_1 snijden, zijn punten, die de door L gaande bisecanten van γ met deze kromme gemeen hebben. Het aantal schijnbare dubbelpunten van γ is dus gelijk aan $mm'(2mm'-m-m')$.

Nemen we L in het snijpunt B_1 van p_1 en v_1, dan vallen van de door dit punt gaande koorden van γ $\frac{mm'(mm'-1)}{2}$ langs elk der lijnen p_1 en v_1. Er gaan door B_1 dus $mm'(m-1)(m'-1)$ bisecanten van γ, die van p_1 en v_1 verschillen. Volgens § 3 zijn dit de afbeeldingen van evenveel a bevattende waaiers, die twee rechten van Ω, dus van Γ, bevatten. *De rang der congruentie Γ, die gemeen is aan twee complexen van den graad m en m' is dus gelijk aan* $mm'\ (m-1)\ (m'-1)$.

Substitueeren we dit getal voor r in de in § 5 gevonden uitdrukking en stellen we daarin α en β gelijk aan mm', dan vinden we inderdaad, dat de graad van het oppervlak, gevormd door de toppen der waaiers, die drie rechten bevatten van de doorsnijding van twee stralencomplexen van den graad m en m', gelijk is aan:

$$\tfrac{1}{3}\, mm'\ (mm'-2)\ (2mm'-3m-3m'+4).$$

Een andere contrôle verkrijgen we door toepassing van onze formule op de stralencongruentie, bestaande uit de rechten, die door een van n gegeven punten gaan. Hiervoor is $\alpha = n$ en $\beta = r = 0$. De meetkundige plaats van de toppen der waaiers, die drie rechten met deze congruentie gemeen hebben, bestaat uit de vlakken, die door telkens drie van de gegeven punten gebracht kunnen worden. Door de aangegeven substituties in de formule van § 5 uit te voeren vinden we inderdaad het aantal dezer vlakken, namelijk:

$$\tfrac{1}{6}\, n\ (n-1)\ (n-2).$$

Aan de in § 5 afgeleide stelling is duaal de volgende toegevoegd: *De vlakken der waaiers, die met een congruentie $\{\alpha, \beta\}$ van den rang r drie rechten gemeen hebben, omhullen een oppervlak van de klasse*:

$$\tfrac{1}{6}\ (\beta-2)\ \{6r-(\beta-1)\ (3\alpha-\beta)\}.$$

Scheikunde. — J. LIFSCHITZ: „*Volta-luminescentie*".

(Aangeboden door de Heeren F. M. JAEGER en E. COHEN).

§ 1. Bij den doorgang van electrische stroomen door *Volta*'sche cellen treden vaak lichtverschijnselen aan de electroden op. Dit „electrolytische" of beter dit „electrodenlicht", kan zoowel aan de anode als aan de kathode optreden en zoowel bij gebruik van gelijk- als van wisselstroom. De aard van het uitgezonden licht is zelden, en dan nog slechts onvoldoende, onderzocht. Dientengevolge kon men ook omtrent het wezen van het proces tot dusverre nog slechts weinig zekers zeggen. Sommige onderzoekers (1, 2, 3) hebben eenige dezer lichtverschijnselen als reactieluminescentie-verschijnselen geïnterpreteerd, — dus als behoorende tot het gebied der chemiluminescentie. Dit zou — indien zulks juist zou blijken — daarom van belang zijn, omdat gelijk bekend is, ionenreacties bijna nooit met luminescentie gepaard plegen te gaan (4, 5). Bovendien zijn de genoemde verschijnselen in spectroscopisch en electrochemisch opzicht van beteekenis. De bedoelde lichtemissies toch zijn stellig niet als van uitsluitend thermischen aard te beschouwen. Want, gelijk ook vroegere proefnemers reeds hebben opgemerkt, is in den regel het lichtverschijnsel des te intensiver, naarmate electrode en electrolyt eene lagere temperatuur hebben. Vaak ook treedt het lichten slechts bij zeer geringe stroomsterkte op. Het spectrum is meest discontinu, of wel het vertoont tenminste een intensiteitsmaximum, zooals bij warmtestraling alleen niet mogelijk is. In ieder geval kan men een gloeien van het electrodenmetaal met volkomen zekerheid van de eigenlijke luminescentie onderscheiden. Wij mogen de verschijnselen in het volgende dus wel als „Volta-luminescenties" onderscheiden; en het zal hier blijken, dat deze onder elkaar van zeer verschillende geaardheid zijn, hoewel zij alle anderzijds in de volgende opzichten weer min of meer overeenkomen:

1°. Het optreden van eene belangrijke vergrooting van den weerstand der cellen, zoolang als de electrode licht uitzendt.

2°. Vorming van vaste of gasvormige, soms volkomen den stroomdoorgang verhinderende lagen aan de lichtgevende electrode.

3°. Vaak kan één abnormaal verloop der electrolyse geconstateerd worden.

Ondanks deze punten van overeenkomst, is het toch wenschelijk, om de kathodische en anodische luminescentie van elkaar gescheiden te behandelen.

(I) *Kathodische luminescentie.* (WEHNELT interruptor, Chromoskoop van v. BOLTON).

§ 2. De eerste gegevens omtrent lichtverschijnselen, en wel aan de anode, zooals zij in den WEHNELT-interruptor optreden, zijn afkomstig van WEHNELT (6) zelve. VOLLER en WALTHER (7) vonden nu, dat men veel sterkere lichteffecten verkrijgt, indien men de kleinere electrode tot kathode maakt, dus de interruptor andersom inschakelt. Men neemt dan een zeer zuiver spectrum van het electrodenmetaal waar naast de waterstoflijnen. De verschijnselen treden ook dan op, wanneer de cel niet als interruptor, dus zonder inductieklos, ingeschakeld wordt.

Zonder met deze waarnemingen voldoende rekening te houden beschreef later v. BOLTON (8) onder den naam van „Chromoskoop" eene op de vorige veel gelijkende inrichting, die voor spectraal-analytische doeleinden geschikt was. Als anode deed een dikke platinadraad dienst of een platina plaatje; als kathode werd een platinadraad gebezigd, of een staafje van het spectraalanalytisch te onderzoeken metaal. De electrolyt (H_2SO_4 of beter HNO_3 1 : 4) bevatte in het eerste geval eene kleine hoeveelheid van de te onderzoeken stof. Sluit men nu den stroom door de kathode voorzichtig in te dompelen, dan verkrijgt men zeer heldere en zuivere spectra van de metalen, die als electrode of in den electrolyt aanwezig zijn, daarnevens H-lijnen (vooral H_α) en de Na-D-lijn. v. BOLTON gebruikte eene spanning van 110 Volt; hierbij bedroeg de stroomsterkte in zijn electrolyt-chromoskoop 0,15—0,3 Amp., in zijn metaalchromoskoop tot 2 Amp.

MORSE (9) onderzocht het licht van den WEHNELT-interruptor nauwkeuriger. Hij gebruikte wisselstroom van vrij aanzienlijke sterkte en vond, dat kathode en anode hetzelfde spectrum geven; evenwel was het kathodische licht veel sterker dan het anodische. H-lijnen nam hij niet waar. De verkregen spectra geleken dan weer eens meer op het boogspectrum, dan weer meer op het vonkenspectrum, zonder dat hij hiervoor eene bevredigende verklaring geven kon. Er zijn echter steeds karakteristieke verschillen tusschen WEHNELT- en vonkenspectrum, resp. WEHNELT- en boogspectrum. Op verdere waarnemingen van MORSE zullen wij later terugkomen.

Voor het onderzoek van de kathode-spectra is de opstelling

van v. Bolton het meest geschikt; deze werd voor experimenten van langeren duur nog eenigszins gewijzigd. In fig. 1 is een eenvoudig model van een electrolyt-chromoskoop afgebeeld, waarmede zonder bezwaren geëxperimenteerd kan worden. Binnen een koelmantel is een U-buis geplaatst; de beenen van deze buis zijn afgesloten door twee gummistoppen, waarin de electroden bevestigd zijn. De beide beenen zijn door een aanzetstuk met elkaar en met de waterstraalzuigpomp verbonden, die het bij de electrolyse gevormde knalgas direct verwijderd. Door het indompelen van de kathode wordt het lichten ingeleid en tegelijk sluit men de cel luchtdicht af. Bij den metaal-chromoskoop komt in de plaats van de U-buis, de buis, die in fig. 2 afgebeeld is.

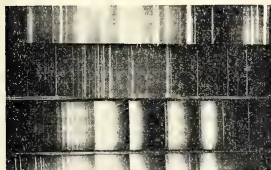
Ten einde de spectra te fotografeeren, werd het licht door middel van een kleinen condensor met geringen focusafstand op de spleet



Fig. 1 Fig. 2

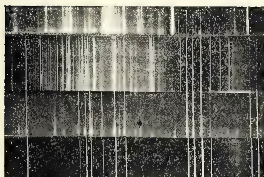
van een Hilger-spectrograaf afgebeeld. Bij gebruik van Viridin-Inalo platen moest soms gedurende 40 tot 150 minuten worden belicht,

Al spectra.

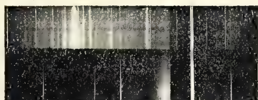


Vonk.
Electrolytchromoskoop.
Metaalchromoskoop.
Boog.

Cu-spectra.

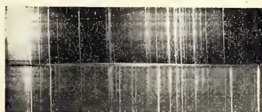


Vonk.
Electrolytchromoskoop.
Boog.
Metaalchromoskoop.



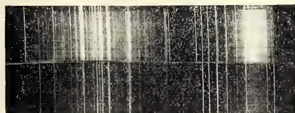
Mg-spectrum in d. electrolytchromoskoop.
Mg-boogspectrum.

Strontium.



Sterk oplossing.
Verdund oplossing

Koper.



160—180 V. 68 min.
< 100 V. 136 min.

Spectra verkregen met den electrolytchromoskoop.

Fig. 3.

omdat verstuiving optrad. Als electrolyt werd meest HNO_3 1 : 4 gebruikt; men kan echter even goed andere electrolyten nemen, b.v. verdund of geconcentreerd H_2SO_4, KOH enz., aan den aard der verschijnselen verandert dit principieel niets.

§ 3. In tegenstelling met hetgeen MORSE vond, traden in het uitgezonden spectrum H-lijnen (vooral H_α) op; voorts aan platinakathoden Pt-lijnen. *Bovendien bleken echter electrolyt- en metaalchromoscoop totaal verschillende spectra te geven,* — een feit dat zoowel door v. BOLTON als door MORSE geheel over het hoofd gezien is. Indien het aan te toonen metaal namelijk alleen in den electrolyt voorkomt, dan komt het spectrum in hooge mate overeen met dat van het vonkenspectrum van het metaal.

Is ditzelfde metaal echter als kathode in zuiver zuur gedompeld dan verkrijgt men een spectrum, dat zeer veel op het boogspectrum gelijkt. Ter illustratie van deze herhaaldelijk geconstateerde feiten, zijn hier eenige fotogrammen (fig. 3) weergegeven.

Dat hier van een algemeen gedrag gesproken mag worden, volgt overigens, behalve uit eigen waarnemingen (met Mg, Pb, Fe, Wo, Mo, Ta, Al, Cu enz.) ook uit opgaven van v. BOLTON en MORSE zèlve. Bevindt zich het metaal te gelijk in electrolyt en electrode, dan neemt men begrijpelijkerwijze eene superpositie van beide spectra waar. Aangezien echter de metaalchromoskopen lichtsterkere verschijnselen leveren, is het begrijpelijk, dat MORSE constateerde, dat een sterk boogspectrum meestal door een zwak vonkenspectrum vergezeld werd.

Voor een normaal functioneeren der chromoskopen is in beide gevallen eene bepaalde stroomsterkte noodzakelijk, die, ofschoon afhankelijk van de afmetingen van het apparaat, steeds binnen de door v. BOLTON aangegeven grenzen bleef. Met Cu-zout in den electrolytchromoskoop (fig. 1) bleek b.v. 0,4—0,5 Amp. noodig te zijn. Eene grootere stroomsterkte veroorzaakte gloeien van den draad en het verdwijnen van de luminescentie; zwakkere stroom deed omgekeerd de totale lichtsterkte belangrijk kleiner worden. Gelijk uit nevenstaande fotogrammen blijkt, treedt echter ook eene selectieve verzwakking op: enkele lijnen verliezen daarbij nl. veel meer aan intensiteit dan de overige. Hetzelfde effect kon men ook verkrijgen door de concentratie van het metaalzout sterk te verminderen.

In vele gevallen, vooral bij gebruik van aard-alkalizouten, verkrijgt men den indruk alsof de geheele vloeistof aan de kathode mee licht. Dit effect treedt echter niet altijd op; bovendien werd er

het spectrum niet door veranderd. Het mee-lichten schijnt door nog onbekende nevenomstandigheden veroorzaakt te worden.

Wat het mechanisme van het emissie-proces betreft, mag als vaststaand ondersteld worden, dat de kathode door een gasmantel omgeven is. Dit wordt b.v., gelijk reeds VOLLER en WALTER opmerkten, aldus duidelijk: schakelt men een goed lichtende chromoskoop eerst uit, dan direct weer in, dan licht deze opnieuw rustig voort, zonder dat men de electrode uit de vloeistof behoefde te halen en weer in te dompelen. Wacht men echter gedurende korten tijd na het uitschakelen, dan hoort men na ca 2—3 sec. een sissend geruisch en de chromoskoop licht nu na het inschakelen niet direct weder. De waarneming bij proeven zooals RIESENFELD en PFÜTZER (11) beschreven hebben, spreekt nog meer ten gunste van het bestaan van een gaslaag. Daarbij wordt tusschen kathode en vloeistof een kleine lichtboog gevormd, en men verkrijgt dan, zooals kon worden vastgesteld, dezelfde spectrale verschijnselen als bij den chromoskoop. Bij gebruik van Pt- of Ir-kathoden, terwijl het aan te toonen metaal in de vloeistof voorhanden is, verkrijgt men een vonkenspectrum; als het metaal echter als kathode gebezigd wordt met zuiver zuur, een boogspectrum.

§ 4. Van het ontstaan van deze kathodische luminescentie-verschijnselen kan men zich wellicht het volgende beeld vormen. Tusschen electrode en electrolyt vormt zich een gasmantel, die waterstof, waterdamp en wat zuurstof bevat; binnen deze laag ligt bijna de geheele potentialsprong van de cel. Daar nu de kationen deze laag niet kunnen passeeren, vormt zich hier een stroom van snelle kathodenstralen, die deze kationen ontladen. De ontladen metaalatomen komen nu in de gaslaag en worden door botsing met soortgelijke voortvliegende electronen tot het uitzenden van een vonkenspectrum opgewekt.

De verstuiving van de kathode wordt door het invallen van positieve deeltjes sterk begunstigd. Indien, gelijk in den metaalchromoskoop, de stroomdichtheid en stroomsterkte relatief hoog zijn, dan komen, — hetzij omdat de verstuiving primair in een wegslingeren van molekulaire deeltjes bestaat, of omdat plaatselijk eene voldoend hooge temperatuur ontstaat, — ook ongeladen atomen van het electrodenmetaal in de gaslaag, en er ontstaat dan een lichtboog en dus een boogspectrum.

Bevat de electrolyt gelijktijdig een voldoend aantal ionen van het electroden- of een ander metaal, dan kan er natuurlijk naast het boogspectrum van het eene, tevens een vonkenspectrum van het

tweede metaal optreden. Dit is echter niet noodzakelijk. Al naar den aard van het electrodenmetaal, komt het boogspectrum daarvan meer of minder duidelijk voor den dag. Zoo toonde reeds MORSE aan, dat het spectrum van eene platinakathode in oplossingen van zuren en alkalien sterk, in oplossingen van aardalkalien slechts zeer zwak is; terwijl met eene aluminiumelectrode in bijna iederen electrolyt een zeer duidelijk aluminium (boog-)spectrum ontstaat. De hierbij geldende betrekkingen moeten echter nog worden onderzocht; wellicht dat de meer of mindere neiging tot verstuiving van het electrodenmateriaal hier in de eerste plaats eene rol speelt. Dat smeltpunt of verdampingspunt van het metaal niet beslissend zijn, is reeds door MORSE opgemerkt.

(II). *Anodische luminescenties.*

§ 5. Gelijk verwacht kon worden zijn de verschijnselen aan de anode veel talrijker en gecompliceerder dan die aan de kathode. Behalve gaslagen kunnen zich hier ook lagen van vaste stof tusschen electrolyt en electrode inschuiven, en aldus luminescentie veroorzaken. De vonken, die bij de grensspanningen in ventielcellen optreden (10), zijn in het volgende niet onderzocht.

Men kan al naar den aard van het uitgezonden licht en de oorzaak van het lichten aan de anode, de volgende typische gevallen van luminescentie onderscheiden:

1°. Lijnen- en bandenspectra; ten deele gelijken deze veel op die aan de kathode, doch zijn meestal veel zwakker.

2°. Boogspectra, gelijk aan die aan de kathode, maar die slechts zelden, en dan onder bepaalde voorwaarden, te verkrijgen zijn.

3°. Meest een geelachtig lichten, — dat, voor zoover dat vast te stellen is, spectroscopisch continu is, zonder vorming van eene laag van oxyde of iets dergelijks. Het anode-metaal (of de als anode gebezigde koolstof) wordt blank of glanzend.

4°. Voor zoover dat na te gaan is, eene continue emissie, met intensiteitsmaximum in een bepaald spectraalgebied; steeds treedt in dit geval de vorming van vaste lagen aan de anode op.

Wij willen allereerst van de verschijnselen in ieder dezer vier klassen voorbeelden en eenige nadere bijzonderheden meedeelen.

§ 6. 1°. Reeds VOLLER en WALTER geven op, dat zij aan een interruptor-anode uit platina in zwavelzuur 1 : 40, — naast de Na-D-lijn — een zwak bandenspectrum verkregen. Bevatte deze cel zwavelzuur en ook metaalzouten, dan traden ook de lijnen van deze metalen

op. De gegevens van deze onderzoekers konden volkomen bevestigd worden; het gelukte mij echter evenmin als hun, om den aard van het zwakke, in het groen gelegen bandenspectrum nauwkeuriger vast te stellen. De intensiteit van het verschijnsel was namelijk, hoewel het altijd duidelijk waarneembaar was, ook in kaliloog 1 : 10 en bij gebruik van andere anodemetalen voor spectroscopisch onderzoek te zwak. Bijzondere verschijnselen werden verkregen bij gebruik van platina-anoden in zwavelzuur 1 : 40, die metaalzouten bevatten.

Om anodische metaallijnen te verkrijgen, moet men in het algemeen grootere hoeveelheden metaalzout in het zuur oplossen. Zelfs dan treden meestal slechts enkele karakteristieke lijnen sterk op (bv.: de groene Tl-lijn, de drie groene Cu-lijnen). Bevat het zuur twee soorten metaalionen, dan is dikwijls slechts een van deze ionensoorten spectroscopisch aantoonbaar. Een voorbeeld hiervan levert de volgende proef:

Eene platina-anode werd gedompeld in zwavelzuur 1 : 40, hetwelk voldoende natriumsulfaat en kopersulfaat bevatte. Er werd nu eerst zooveel stroom doorgezonden, dat de anodedraad in gloeiing geraakte, vervolgens werd zooveel weerstand ingeschakeld, dat dit gloeien ophield en de karakteristieke goudgele luminescentie optrad. In den spectroscoop werd dan alleen eene zeer heldere Na-D-lijn waargenomen. Werd nu langzamerhand nog meer weerstand ingeschakeld, dan werden het gele lichten en de Na-D-lijn steeds zwakker, terwijl de Cu-lijnen (in het groen) begonnen te verschijnen. Bij eene bepaalde klemspanning waren ook direct groene vonkjes waar te nemen, naast het gele vonkenspel aan de anode.

Het is buitengewoon moeilijk, om het totstandkomen van deze lichtzwakke verschijnselen, door proefneming op te helderen. Op te merken is slechts, dat de luminescentie door tallooze vonkjes blijkt te worden veroorzaakt en dat er ongetwijfeld ook hier een gasmantel aanwezig is, zooals reeds Voller en Walter constateerden. Zeer waarschijnlijk moet hier een soortgelijk mechanisme ondersteld worden als bij den „fulgurator" van Lecoq de Boisbaudran. Bij dit apparaat hebben wij tusschen anode en electrolyt eene laag van gas of damp, waardoor de vonken heendringen.

§ 7. 2°. Een fraai en zeer lichtsterk anodisch boogspectrum kan met behulp van ijzer in heet geconcentreerd of verdund zwavelzuur (s. gew. 1,80 en H_2SO_4 1 : 4) verkregen worden; minder gemakkelijk ook wel met behulp van wolfraam-anoden in hetzelfde medium. De temperatuur van de anoden is hierbij vrij hoog; de kleur van het geëmitteerde licht schitterend blauw. De spanning bij deze

proeven bedroeg 225 Volt. De emissie trad pas op nadat gedurende korteren of langeren tijd het sub. 3) beschreven lichten was waargenomen. Wij zullen daarom op het genoemd verschijnsel straks nog moeten terugkomen.

3°. Een zeer eigenaardig lichtverschijnsel wordt waargenomen, wanneer de stroom gesloten wordt door indompelen van een kool- of metaalanode in geconcentreerd of verdund zwavelzuur. De kool bedekt zich hierbij met een fraai gelen lichtmantel, die langen tijd blijft bestaan; tevens wordt haar oppervlakte glad, en laat geen koolpoeder meer los. Metaalanoden vertoonen een analoog gedrag, zooals reeds v. BOLTON (8) opmerkte, aan wien men eene methode volgens dit procédé voor het polijsten en reinigen van koolelectroden te danken heeft. (14).

De resultaten van dezen proefnemer kon ik in alle opzichten bevestigen, — zoowel bij gebruik van geconcentreerd als van verdund zwavelzuur. Afwijkend gedrag vertoonen alleen typische ventielmetalen (bv. Al en Ta). Bij deze wordt een wit of blauwachtig licht uitgezonden.

Het spectrum van het gele licht is, voor zooverre zulks kon worden vastgesteld, continu; dikwijls is nog de Na-D-lijn waar te nemen. De electroden blijken na de proef blank en glad te zijn, maar zijn meestal iets in diameter afgenomen. Ook het witte licht van ventielmetalen is continu, maar op de grens electrode-electrolyt-lucht treden daarbij dikwijls randvonken op, die zeker lijn-spectra uitzenden.

De klemspanning bij het gele lichten (bij Cu, Fe, Mo, Wo, Ni, C) bedraagt ca 100 Volt, de stroomsterkte enkele tienden van een Amp., namelijk bij gebruik van draadelectroden van eenige mm. diameter, die 1—2 cM. diep ingedompeld werden. De temperatuur van geconcentreerd zwavelzuur stijgt daarbij zeer snel, van verdund (kleinere stroomsterkte) iets langzamer tot aan het kookpunt. Is de kooktemperatuur eenmaal bereikt, dan verandert bij ijzer- en wolfraamelectroden de kleur plotseling van goudgeel in zuiver blauw; de stroom daalt tevens op minder dan 0,1 Amp., terwijl de klemspanning tot de totale beschikbare (225 Volt) stijgt. In den spectroscoop ziet men dan het bekende boogspectrum van ijzer of wolfraam. Deze proef is zeer geschikt ter demonstratie. Hoogst waarschijnlijk kunnen analoge verschijnselen, zij het ook minder gemakkelijk, ook bij andere metalen verkregen worden.

§ 8. Het optreden van een anodischen lichtboog in het bijzonder aan heete anoden, is zonder meer wel begrijpelijk; minder gemak-

kelijk te verklaren is de gele luminescentie. Eene zuiver thermische emissie van het metaal kan niet worden ondersteld. Evenmin kan hier aan eene reactieluminescentie gedacht worden, daar het licht altijd, onverschillig welk anodemateriaal gebezigd wordt, dezelfde kleur bezit. v. BOLTON meent, dat de anode zich met een „geelgloeiende" zuurstofmantel bedekt. Inderdaad kan zuurstof bij hoogeren druk langs electrischen weg tot emissie van een geel continu licht worden gedwongen (13). Bij lageren druk treedt in dit continu spectrum een maximum van intensiteit in het groen of geelgroen op. Als zeer waarschijnlijk kan dus worden ondersteld, dat onze electroden zich met een mantel van electrolytisch ontwikkelde zuurstof omgeven, waarin het gas onder vrij hoogen druk electrisch tot lichtemissie wordt gebracht. Bij hoogere temperaturen moet de druk in deze zuurstoflaag dalen, misschien ook de laag geheel instabiel worden, en tenslotte wordt een toestand bereikt, waarin een metaallichtboog kan ontstaan.

§ 9. 4°. Vaak is anodische lichtemissie bij electrolysen constateerd, wanneer aan de anode een onoplosbaar of moeilijk oplosbaar reactieproduct gevormd wordt. Dit produkt kan dan of eene dichte, stevig aan de anode vastzittende laag, of wel een meer of minder gemakkelijk loslatend laagje vormen.

Het eerste is vaak bij ventielcellen waar te nemen. Reeds beneden de grensspanning is aan de ventielanode een vaal wit licht te zien (10), dat onder bepaalde omstandigheden vrij sterk wordt, (bv. bij Al-anoden in boraxoplossing, Ta in verdunde alkaliloog of carbonaatoplossing). Onder deze lichtemissies behoort ook het lichtuitgeven van magnesiumanoden in loog (15) gerangschikt te worden. De spanning stijgt bij deze verschijnselen tot op het maximaal beschikbare bedrag, het doorgaan van stroom wordt bijna volkomen verhinderd. Het lichten begint zeer vlug na de stroomsluiting, dikwijls onder periodieke schommelingen van de intensiteit gedurende de eerste minuten, en blijft dan bestaan tot de stroom verbroken wordt. Weliswaar wordt het lichtverschijnsel meestal spoedig verhinderd, wanneer door den zwakken stroom, die steeds nog doorgaat, electrode of electrolyt verwarmd worden. Bij langdurige proeven moet daarom voor goede koeling zorg gedragen worden.

Het bijna altijd vaal-witte, soms meer groen- of blauwachtige licht blijkt bij spectroscopisch onderzoek continu te zijn.

Nog dient te worden opgemerkt, dat met magnesiumanoden het optimum van lichtsterkte in natronloog 1 : 100 wordt bereikt; zeer sterk lichten verkrijgt men ook door in plaats van loog een

ammoniakale oplossing van dinatriumphosphaat te gebruiken. In dit medium leveren ook zinkanoden een bijzonder fraaie lichtemissie, terwijl bij aluminium, een boraxoplossing de meest geschikte electrolyt is. Maar ook bij aluminium en bij tantaal kunnen verdunde loog, carbonaatoplossing enz. worden gebruikt.

De electrode bedekt zich bij deze processen met eene vastzittende laag van het oxyde of van een ander onoplosbaar anodeproduct, gelijk dit reeds door andere proefnemers aangetoond werd. Hoe algemeen soortgelijke verschijnselen zijn, blijkt wel uit het feit, dat nog steeds nieuwe waarnemingen van de beschreven soort medegedeeld worden (v. bv. 1a).

Maar ook indien geen directe ventielwerkingen op te merken zijn, treden soortgelijke lichtverschijnselen toch nagenoeg altijd dan op, wanneer aan de anode een moeilijk oplosbaar product gevormd wordt. O. a. behooren hiertoe de volgende, ten deele reeds langer bekend zijnde luminescentie-verschijnselen :

Electrolyt	Verschijnsel
KJ aq, verzadigd	een helder lichten aan anoden van Cd, Hg, Pb.
H_2SO_4 geconc.	„ „ „ „ „ „ Pb, Al, Ta; Mg geeft een korte „flash"; aan Cd-anoden treedt een lichtring op, die zich op en neer beweegt.
KOH aq, sterk	Fe (een helder lichten, maar dat ten gevolge van sterk schuimen niet goed te onderzoeken is), Ni (zeer kleine stroomsterkte).
Na_2HPO_4 NH_3aq	Cu geeft een krans van vonkjes.

Bijzonder intensief is het lichten aan een Hg-anode in verzadigde KJ-oplossing bij voldoende stroomdichtheid. De blanke anode-oppervlakte bedekt zich direct na het sluiten van den stroom met eene dunne laag van kwikjodide en begint dan een goudgeel licht uit te zenden. De intensiteit van dit licht bereikt na korten tijd een maximum en daalt vervolgens weer. Door vernieuwen van het kwikoppervlak, hetzij door roeren of door het kwik te laten overstroomen uit een trechtervormig anodenvat, enz., kan het lichten met volle intensiteit hersteld worden.

Het spectrum van het geëmitteerde licht werd, in overeenstemming met vroegere proefnemers (2), altijd continu gevonden, met een maximum der intensiteit in een bepaald spectraalgebied. WILKINSON (2) heeft er op gewezen, dat de kleur van dit licht tevens overeenstemt met die van het licht, dat het betreffende anodeproduct uitzendt, wanneer het door kathodenstralen gebombardeerd wordt.

§ 10. Zeer vaak heeft men juist deze soorten van luminescentie als reactieluminescentie (chemiluminescentie) beschouwd. Vorming of ontleding van de anodeproducten dacht men vergezeld te gaan met eene luminescentie, die bij voldoende reactiesnelheid eene aanzienlijke intensiteit kon bereiken [1]). BANCROFT (1) en zijne leerlingen, ook WILKINSON (2) hebben moeite gedaan om aan deze opvatting steun te verleenen. In den loop van eigen waarnemingen bij vergelijking met die van andere onderzoekers, blijkt echter, dat deze opvatting geen stand kan houden.

In de eerste plaats kan men vaststellen, dat alle in dit hoofdstuk beschreven verschijnselen met elkaar in verband staan. Dit niet alleen, omdat ze spectroscopisch van gelijke geaardheid blijken te zijn, maar ook, omdat hun optreden steeds gebonden blijkt te zijn aan het ontstaan van moeilijk oplosbare of onoplosbare anodeproducten.

Dit vooropgesteld, kan men nu vrij wat redenen aangeven waarom eene opvatting dezer luminescentie-verschijnselen als reactieluminescentie-verschijnselen als onjuist beschouwd moet worden.

In de eerste plaats laat zich bij deze opvatting der zaak niet verklaren, waarom alleen de formatie van onoplosbare producten tot luminescentie aanleiding geeft. Men kan immers toch met zekerheid voorspellen, dat een anodische luminescentie en hare intensiteit des te grooter zullen zijn, naarmate het anode-product moeilijker oplosbaar is. In het bijzonder blijkt namelijk dat bij formatie van gemakkelijk oplosbare anode-producten, luminescentie nooit waar te nemen is.

Ook de aanmerkelijke versterking van het lichten bij lage temperatuur, (dus bij kleinere reactiesnelheid) is op grond van bedoelde opvatting niet te verklaren. Met ventiel-anoden treedt het lichten toch geenszins het meest geprononceerd op bij bijzonder sterke anode-reactie, doch eerst dan, wanneer de afsluitende laag zoo stabiel en homogeen mogelijk is, en zoo weinig mogelijk door den electrolyt wordt aangetast. Zoo zendt b.v. magnesium het meest heldere licht uit in verdunde loog, aluminium in boraxoplossing, hetgeen zeker bij ware „chemiluminescentie" onverklaarbaar zou zijn. Een magnesium-anode wordt door verdund zwavelzuur buitengewoon sterk aangetast, terwijl er van lichten desnietaltemin niets te bespeuren valt.

Verder blijft het dan onbegrijpelijk, hoe anoden, die snel door eene onoplosbare laag bedekt worden, toch voortdurend licht blijven uitzenden. Het ware in dit geval immers veeleer te verwachten,

---

[1]) Over deze opvatting zie (5).

dat het licht na de vorming van eene bedekkende laag zou ophouden. Maar dit wordt in de meerderheid der gevallen absoluut niet waargenomen.

Tenslotte is het stijgen van de lichtintensiteit na de stroomsluiting, zooals bijzonder duidelijk met kwikanoden in KJ-oplossing wordt waargenomen, bij eene reactieluminescentie niet te verklaren. Want, hoe eene zekere hoeveelheid reactieproducten een directe chemiluminescentie zou kunnen verhoogen is vrijwel raadselachtig. Evenmin kunnen periodieke en rythmische lichtemissies (Cd in KJ-opl., Mg direct na stroomsluiting) op deze wijze worden verklaard.

§ 11. De eenige opvatting, die met alle experimenteele feiten in overeenstemming te brengen is, is, in tegenstelling met de zoo juist besprokene, m. i. de volgende: direct na de stroomsluiting wordt aan de anode eene laag van reactieproducten gevormd, die het passeeren van de ionen naar de anode belemmert of onmogelijk maakt. De electrische ontlading van deze ionen gebeurt dan, (bij voldoende hooge spanning) onder den invloed van afgesplitste anionische electronen, die onder sterke versnelling door de anodelaag heenvliegen. Hierbij wordt de materie in deze laag op dezelfde wijze, dus onder emissie van hetzelfde spectrum, tot luminescentie gebracht, als zulks door middel van kathodestralen zou geschieden. Wordt de laag te dik, dan zullen er steeds hoogere spanningen toe noodig zijn, om een stroomdoorgang te bewerken, en tenslotte zou in zekere gevallen slechts dán nog stroom kunnen doorgaan wanneer de laag door vonken doordrongen wordt (grensspanning bij ventielanoden). Wanneer anderzijds echter de laag door den electrolyt op de eene of andere manier wordt aangetast, dan is het zeer wel mogelijk, dat ook de lichtemissie aan de anode lokaal veranderen kan, en worden in het bijzonder de periodieke schommelingen van de intensiteit langs de anode mogelijk. Verhooging van temperatuur zal altijd de luminescentie belemmeren, hetzij omdat de oplosbaarheid van het anodeproduct daardoor in het algemeen verhoogd wordt, hetzij omdat de laag in mechanisch opzicht daardoor minder stabiel wordt. Is de anode-laag uit zich zelf mechanisch weinig stabiel, (zooals bij kwikjodide) dan zal eene zekere minimale stroomdichtheid noodig zijn, om eene samenhangende laag met genoegzame snelheid te vormen en, niettegenstaande voortdurende ontleding, deze te laten voortbestaan.

Samenvattend kunnen wij dus zeggen, dat ook bij deze anodische luminescentie-verschijnselen, gelijk zulks vroeger voor gewone chemiluminescentie aangetoond werd, niet de anode-*reactie* op zich zelf

onder lichtemissie afloopt. Er worden veeleer eerst reactieproducten gevormd, die tot emissie gebracht worden, en wel in dit geval door middel van de electrische energie van een stroombron buiten het onderzochte systeem. Er is dus geen sprake van eene ionenreactie, die onder lichtemissie afloopt en van eene afwijking van den algemeenen regel, dat juist deze, practisch oneindig snel verloopende reacties nooit door eene lichtemissie worden vergezeld.

De bovenstaande beschouwingen leeren verder, dat *Volta*-luminescentie zeer vaak optreedt, maar ook, dat deze van zeer verschillenden aard kan zijn. Bij verder onderzoek dezer verschijnselen zal het noodig zijn, om deze soorten van *Volta*-luminescentie zorgvuldig uit elkaar te houden. Een eerste orienteering in dit opzicht is door dit onderzoek misschien gebracht.

Anorganisch en Physisch-Chemisch Laboratorium
der Rijks Universiteit.

Groningen.

LITERATUUR.

1) WILDER D. BANCROFT en zijn leerlingen in Journ. of Physic. Chemistry **18**; 213, 281, 762 (1914). **19**; 310 (1915).
2) WILKINSON, ibid. **13**; 695 (1909).
3) KATALINIC, Zeitschr. f. Physik., **14**; 14, (1923).
4) J. LIFSCHITZ, Helv. Chim. Acta, **1**; 472, (1917).
5) J. LIFSCHITZ u. O. E. KALBERER, Zeitschr. f. physik. Chem. **102**; 393, (1922).
6) WEHNELT. Wied. Ann. **68**; 233, (1899).
7) VOLLER u. WALTER, ibid. 539, (1899).
8) W. v. BOLTON, Zeitschr. f. Electrochem. **9**; 913, (1903).
9) H. N. MORSE, Astrophys. Journ. **19**; 162, (1904), **21**; 223, (1905).
10). A. GÜNTHER SCHULZE, talrijke mededeelingen in de Annalen d. Physik.
11) RIESENFELD u. PFÜTZER, Ber. **46**; 3140, (1913).
12) LECOQ DE BOISBAUDRAN, Spectres lumineux, (Paris 1874), zie ook de opgaven bij URBAIN, Introduction à l'étude de la Spectrochimie (Paris 1911).
13) Zie H. KAYSER, Handbuch der Spectroscopie.
14) D. R. P. v. SIEMENS & HALSKE.
15) BABOROVSKY, Zeitschr. f. Electrochem. **11**; 474, (1905).

Physiologie. — W. EINTHOVEN en S. HOOGERWERF: *„De snaarphonograaf".*

Ofschoon er een aantal inrichtingen bestaan om geluiden te registreeren, is men er tot nog toe niet in geslaagd om de frequente luchttrillingen der zeer hooge en hoogste nog hoorbare tonen op bevredigende wijze graphisch te reproduceeren. SCRIPTURE [1]) meent zelfs, dat een onderzoek naar de juiste verschillen, die de onderscheidene klinkers aanbieden, heden ten dage nog buiten het bereik der wetenschap ligt. Het hier te beschrijven instrument is geconstrueerd met de bedoeling om te trachten ons een stap nader tot de oplossing van het vraagstuk te brengen.

Wij zijn uitgegaan van het verschijnsel, dat een fijne, vrij opgehangen of tusschen 2 punten uitgespannen draad, door betrekkelijk zwakke luchtstroomingen reeds in beweging wordt gebracht. Bij een goed geconstrueerden snaargalvanometer bevindt zich de snaar in een ruimte, die van de buitenlucht is afgesloten. Kan deze tot de snaar toetreden, dan wordt haar evenwichtsstand door de grovere bewegingen der kamerlucht verstoord, terwijl geluiden in de omgeving van het instrument de snaar in trilling brengen.

Het denkbeeld ligt voor de hand om met behulp van de snaar de luchttrillingen direct te registreeren en ongetwijfeld zal menig onderzoeker, die met den snaargalvanometer heeft gewerkt, reeds gepoogd hebben, dit denkbeeld te verwezenlijken. De voortreffelijke onderdirecteur van het „Institut Marey" te Parijs, Dr. LUCIEN BULL, toonde mij een kromme, die hij had geregistreerd met behulp van een eenvoudigen toestel, die aan de objecttafel van een ZEISS-microscoop was bevestigd, en waarin een glasdraad ter dikte van $1.2\,\mu$ was uitgespannen. Deze nam de trillingen over van een harmonium, waarmede een toon van 65 perioden per sec. werd voortgebracht. In de kromme worden de grondtoon en eenige boventonen van den klank uitstekend weergegeven.

Onze eigen pogingen dateeren reeds van den tijd, toen wij begonnen den snaargalvanometer te construeeren. Zij zijn toenmaals opgegeven om dezelfde reden, die ook BULL er toe had gebracht, zijn onderzoek te staken, en wel omdat een vooruitgang in het

---

[1]) *Nature*, 13 en 20 Januari 1921, p. 632 en 664.

registreeren van geluiden, in 't bijzonder van hooge tonen, op de door ons bedoelde wijze niet mogelijk is, wanneer men niet over zeer lichte, dat is dus zeer dunne draden beschikt.

Eerst nadat wij er in geslaagd waren draden met een diameter van 0,1 μ en dunner [1]) te vervaardigen, kon het werk met meer kans op succes worden voortgezet.

De fijne draad wordt tusschen twee verticaal boven elkaar liggende punten zoodanig bevestigd, dat hij slechts van éène zijde kan worden bereikt door de luchttrillingen, waaruit een geluid is samengesteld. Zijn bewegingen worden bij sterke vergrooting gephotographeerd.

In verslapten toestand neemt hij den vorm van een kettinglijn aan; is de verslapping voldoende, dan zakt hij naar onderen in een lus door, alsof hij zonder eenige stijfheid ware. Wij vergelijken den draad in deze omstandigheden met een vrij in de lucht zwevend voorwerp.

Neem aan, dat de luchtgolven, die den draad treffen, sinusoïdaal zijn en een amplitude hebben $= A$, terwijl zij, den draad gedeeltelijk meeslepende, hem een amplitude u mededeelen. Dan kunnen wij de nauwkeurigheid, waarmede de draad de luchtbeweging overneemt, uitdrukken door $\frac{u}{A}$.

Noem de massa van den draad per centimeter m gram en den weerstand, dien hij per centimeter van de lucht ondervindt, wanneer hij met de snelheid van 1 cm. per sec. loodrecht op zijn lengterichting wordt bewogen, r dynen. Noem verder het aantal luchtgolven per sec. N, dan is de nauwkeurigheid, waarmede de draad de luchtbeweging overneemt,

$$\frac{u}{A} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (2\pi Nm)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Deze formule komt overeen met die voor de stroomsterkte in een keten, waarin een sinusoïdaal wisselende electromotorische kracht werkzaam is en die behalve weerstand ook zelfinductie bezit. Onze r komt in de plaats zoowel van de electromotorische kracht als van den weerstand.

Wij schrijven formule (1) in den vorm

$$\frac{u}{A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi N.\frac{m}{r}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

[1]) W. EINTHOVEN, „Ueber die Beobachtung und Abbildung dünner Fäden." Pflüger's Archiv. f. d. ges. Physiologie. Bd. 191, S. 60.

De waarde van $\frac{m}{r}$ kan op verschillende wijzen worden bepaald [1]). De waarde van m neemt af met het kwadraat van den diameter d van den draad, terwijl r in geringere mate wordt verkleind. Onder de omstandigheden, waaronder wij werken, is r ongeveer evenredig aan $\sqrt{d}$, hetgeen wij door metingen, die bij een aantal draden van verschillende dikte in den snaargalvanometer werden verricht, experimenteel hebben kunnen constateeren. Ook theoretische gronden pleiten er voor, dat bij de geringe snelheden, die in aanmerking komen, r aan $\sqrt{d}$ evenredig mag worden gesteld.

Maakt men den draad zóó dun, dat d klein wordt ten opzichte van de vrije weglengte der moleculen en maakt men deze laatste zóó groot, dat in vergelijking daarmede ook de afmetingen van het vat, waarin zich de draad beweegt, klein zijn, dan kan een ander uiterste ontstaan en wordt r evenredig aan d. In werkelijkheid zal bij onze proeven de exponent van d slechts weinig grooter zijn dan 0,5 met dit gevolg, dat $\frac{m}{r}$ des te kleiner wordt, al naarmate de draad dunner wordt genomen.

Neemt men voor het trillingsgetal N . . . 20.000, dan kan de draad zóó dun worden genomen, dat $2\pi N \times \frac{m}{r} = 1$ en dat dus

$$\frac{u}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.$$

Deze nauwkeurigheid kan worden bereikt door een draad, die wel is waar zeer dun moet worden genomen, maar die toch dik genoeg kan zijn, om een doelmatige behandeling en voldoend scherpe afbeelding mogelijk te maken.

De graad van nauwkeurigheid neemt voor grootere frequenties dan 20.000 per sec. af, terwijl zij voor geringere frequenties toeneemt en tot 1 nadert.

Spant men den draad als een snaar, dan verandert de toestand. Een snaar van 15 m.m. lengte kan zonder te breken zóó strak gespannen worden, dat zij, in het luchtledige onderzocht, een eigen frequentie van meer dan 30.000 perioden per sec. heeft. Spant men haar minder, b.v. zoo, dat haar eigen trillingsgetal in het luchtledige 20.000 of minder bedraagt, dan zal zij zich — als zij slechts dun

---

[1]) Zie hierover: „Weitere Mitteilungen über das Saitengalvanometer. Analyse der saitengalvanometrischen Kurven. Masse und Spannung des Quarzfadens und Widerstand gegen die Fadenbewegung". Annalen der Physik. 4. Folge. Bd. 21, S. 483 und 665.

genoeg is — in de lucht òf aperiodisch bewegen òf met zóó groot decrement, dat de verschijnselen van resonnantie wel buiten beschouwing kunnen worden gelaten. Nemen wij aan, dat zij zich volkomen aperiodisch beweegt, dan zal zij de luchttrillingen van alle frequenties met een te geringe amplitude weergeven, maar, terwijl de hierdoor teweeggebrachte onnauwkeurigheid voor de grootere frequenties slechts gering is, zullen langzame luchtgolven sterk verkleind en de langzaamste zoo goed als in 't geheel niet worden overgenomen.

Door de snaarspanning te regelen heeft men het in de hand, om de mate, waarin luchtgolven van lage frequentie in het phonogram worden onderdrukt, willekeurig te wijzigen.

Laat men een GALTON-fluit in den phonograaf klinken, dan trilt de kwartsdraad in de frequentie, die met de toonshoogte van het voortgebrachte geluid overeenstemt. De hooge tonen vormen voor elk registreerend instrument de moeilijkheid, terwijl de lage gemakkelijker kunnen worden weergegeven. Stelt men de fluit geleidelijk op hooger tonen in, dan volgt de kwartsdraad deze trouw, totdat de bijgeruischen, — die bij het aanblazen der fluit steeds te voorschijn komen en bij de hoogere tonen sterker worden en meer hinderen, — zóó zeer gaan overwegen, dat de reactie der snaar op den toon zelf niet duidelijk meer te voorschijn komt.

Evenwel konden wij tonen van 15.000 trillingen per seconde nog registreeren. Deze waren reeds zóó hoog, dat zij voor den jongeren van ons beiden de grenzen van het hoorbare naderden, terwijl zij voor den ouderen onhoorbaar waren. Ter vergelijking mag dienen, dat a_4, die gewoonlijk den hoogsten toon van een piano vormt, 3480 trillingen per sec. heeft.

De beschreven toestel is gevoelig genoeg, om op zwakke geluiden te reageeren. Zoo kan hij bijv. de hartstonen in beeld brengen. In de vergadering werden eenige photographische opnemingen van menschelijke hartstonen vertoond, waarop behalve de systolische en diastolische ook de 3e hartstoon zichtbaar was.

Verder werden ook krommen gedemonstreerd van klinkers, die in den phonograaf waren gezongen. De vorm der kromme, die voor elken klinker karakteristiek is en de hoogte der boventonen, die den klank daarvan samenstellen, werden kort besproken, terwijl een nauwkeurige analyse tot een lateren datum moest worden uitgesteld.

De uitvoerige beschrijving van den toestel en de reproducties van eenige der geregistreerde krommen zullen elders verschijnen.

Natuurkunde. — W. TUIJN en H. KAMERLINGH ONNES: „*Verdere proeven met vloeibaar helium. S. Over den electrischen weerstand van zuivere metalen, enz.* XII. *Metingen betreffende den electrischen weerstand van indium in het temperatuurgebied van vloeibaar helium*". (Mededeeling N°. 167*a* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

§ 1. *Doel van het onderzoek. Methode van vervaardiging der weerstanden.* Voor de verdere opsporing van supra-geleidende metalen lijkt het wenschelijk, het gedrag dier elementen te onderzoeken, welke zich in het periodiek systeem bij reeds bekende supra-geleiders aansluiten. Indium — boven thallium en naast tin — kwam in aanmerking.

Het chemisch zuiver indium (4 gram) was geleverd door E. DE HAËN, G. m. b. H.[1]). Uit hiervan, ter dikte van $0{,}1_7$ m.m. gespoten draad vervaardigden wij op de wijze, als beschreven in Comm. N°. 160*a*, de weerstanden *In*—1922—*I*, $W_0 = 4{,}704_7\ \Omega$, *In*—1922—*II*, $W_0 = 3{,}708_7\ \Omega$ en *In*—1922—*III*, $W_0 = 3{,}799_7\ \Omega$; de weerstanden werden echter niet opgesloten in heliumgas. Een vierde weerstand, *In*—1922—*A*, $W_0 = 4{,}609_6\ \Omega$, werd verkregen door een ander stuk van denzelfden draad eveneens bifilair op een glazen buisje te wikkelen; zijden draad diende hier tot isolatie[2]). De waarden W_0 zijn bepaald 22 December 1922 op de wijze, in Comm. N°. 160*a* beschreven.

§ 2. *Metingen in vloeibaar helium.* De vier weerstanden werden gebracht in den van eene roerinrichting voorzienen cryostaat, afgebeeld in Comm. N°. 124*c*, fig. 4. De metingen geschiedden door compensatie van den potentiaal aan de uiteinden van een bekenden en onbekenden weerstand, in serie geschakeld, met behulp van het thermokrachtvrije compensatie-apparaat N°. 4915 volgens DIESSELHORST,

---

[1]) Het hooge bedrag van $\left(\dfrac{W}{W_0}\right)_{T=4°,2\text{ K.}}$ van *alle* hieruit vervaardigde weerstanden deed ons aan de zuiverheid van het geleverde indium twijfelen. Bij navraag deelde de firma bij schrijven d.d. 22 Maart 1923 mede, „chemisch zuiver Indiummetaal geleverd te hebben, dat vrij van verontreinigingen was."

[2]) Oude indiumdraden laten zich ter verkrijging der vier benoodigde uiteinden moeilijk aaneensmelten; behandeling met HCl heft deze moeilijkheid op.

geleverd door O. WOLFF; de stroomsterkte door de weerstanden was 4 m.A. Voor de bepaling der temperaturen werden de dampdrukkingen van het heliumbad gemeten, beneden 400 m.m. Hg met den kathetometer; de bijbehoorende temperaturen leidden wij dan af met de formule van Comm. N°. 147*b*, p. 33[1]).

De resultaten der metingen volgen in de tabellen I, II, III en IV. Dicht bij het sprongpunt, waar de opvolgende temperatuurverschillen klein zijn, geven wij alleen de dampspanningen. Soms wordt hier de weerstand in minder decimalen opgegeven dan elders;

TABEL I. Indium—1922—I.

Datum.	p_{helium} in m.m. Hg.	T.	$w = \left(\frac{W}{W_0}\right)_{In-1922-I.}$ [2])
8 December 1922	775.4	4°.23 K.	0.1373_2
20 December 1922	394.4_9	3.60	$0\ 1372_3$
	339.3_9	3.48	0.1371_4
	310.1_1	3.41	0.1370_8
	308.8_3		0.1370_7
	307.4_0		0.1367_8
	306.8_9		0.1367_2
	305.4_5		0.1364_0
	304.0_0		0.1363_6
	301.5_9		0.1359_7
	299.5_9		0.132
8 December 1922	299.4_6		0.120
20 December 1922	298.1_8		0.016
	295.4_8	3.38	0.0000_3
8 December 1922	12.4_0	1.87	0.00000

1) Deze formule is berekend uit metingen, verricht in 1913. Neemt men naast deze metingen die van 1911 in aanmerking en interpoleert grafisch, dan krijgt men temperaturen, welke van die, berekend met de formule, soms aanzienlijk afwijken. De sprongpunttemperatuur van thallium b.v., op deze wijze grafisch afgeleid in Comm. No. 160*a*, is 2,°32 K; de formule geeft 2,°47 K. Zoolang de dampspanningskromme van helium niet nauwkeuriger bekend is, geven wij de afgelezen dampspanningen op en vermelden tevens, hoe wij hieruit de temperaturen berekend hebben.

2) Beneden het sprongpunt zijn de gemeten potentiaalverschillen omgerekend tot weerstanden, alsof de wet van OHM gold.

TABEL II. Indium—1922--II.

Datum.	p_{helium} in m.m. Hg.	$T.$	$w = \left(\frac{W}{W_0}\right)_{In-1922-II.}$
20 December 1922	394.3_7	$3\overset{\circ}{.}60$ K.	0.03392
	339.5_5	3.48	0.03387
	309.8_4	3.41	0.03387
	308.7_4		0.03385
	307.4_0		0.0202
	306.8_9		0.0067
	305.9_9		0.00000
	304.0_0		0.00000

TABEL III. Indium—1922--III.

Datum.	p_{helium} in m.m. Hg.	$T.$	$w = \left(\frac{W}{W_0}\right)_{In-1922-III.}$
8 December 1922	775.4	$4\overset{\circ}{.}23$ K.	0.03390
	333.7	3.46	0.03380_5
	310.5_4	3.42	0.03380_5
	309.0_5		0.03377
	307.6_9		0.0207
	305.9_0		0.00018
	304.7_8		0.00000
	12.4_0—12.5_8	1.87	0.00000

TABEL IV. Indium—1922—A.

Datum.	p_{helium} in m.m. Hg.	$T.$	$w = \left(\frac{W}{W_0}\right)_{In-1922-A.}$
20 December 1922	759.7	$4\overset{\circ}{.}21$ K.	0.03420
	394.3_7	3.60	0.03418
	339.5_5	3.48	0.03415
	309.6_6	3.41	0.03392
	308.9_3		0.0297
	307.1_4		0.0013_4
	307.0_2		0.00014
	306.2_3		0.0000_3
	304.0_0		0.00000

de geringste verandering in aanwijzing van den in Comm. N°. 119 beschreven olieregulateur is oorzaak, dat de galvanometer in het gebied der groote weerstandsafneming niet tot rust komt.

De tabellen wijzen uit (zie ook fig. 1), dat de restweerstand van

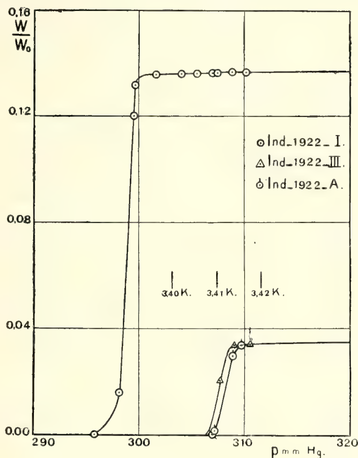


Fig. 1.

In—1922—*I* boven zijne sprongpunttemperatuur veel grooter is dan die der andere draden, dat voor *In*—1922—*I* de temperatuur, waarbij de weerstand het sterkst valt, ongeveer 0,02 graad is verschoven ten opzichte van het overeenkomstige punt voor *In*—1922—*II* en —*III* en dat de val over een grooter temperatuurgebied plaats grijpt. Berekeningen met de ten dienste staande gegevens aan de hand der hypothese van SILSBEE[1]) of met behulp van stroomdichtheden maken onwaarschijnlijk, dat genoemde verschuiving wordt veroorzaakt door oxydatie van *In*—1922—*I* over zijn geheele lengte in zulk eene mate, dat slechts een kleine kern indium bleef[2]); de verhouding der W_0's van *In*—1922—*I*, —*II* en —*III* laat dit niet toe[3]). Sterke aantasting van een kort deel van den draad is

[1]) F. B. SILSBEE. Scient. Pap. Bur. of Stand. No. 307 (1917).

[2]) *In*—1922—*I* vertoont in tegenstelling met de andere draden een dof, oxydeachtig oppervlak. Na de vervaardiging in Juli 1922 werd de weerstand in benzine bewaard; hoewel deze gedistilleerd heette te zijn, schijnt zij verontreinigingen te hebben bevat, die den draad hebben aangetast.

[3]) Metingen met *In*—1922—*A* over de afhankelijkheid der magnetische drempelwaarde van de temperatuur geven voor indium ruw een benoodigd veld van 1,4

onwaarschijnlijk, omdat dan de vraag rijst, waarom de weerstand van het betere deel van *In*—1922—*I* niet verdwijnt bij de sprongpunttemperatuur der beide andere indiumweerstanden. Dit leidt tot de opvatting, dat de groote restweerstand van *In*—1922—*I* uniform over den geheelen draad verdeeld is. De onderlinge gelijkheid dezer grootheid over de drie andere draden maakt dit voor hen vrijwel zeker[1]). Vooralsnog lijkt eene uniforme distributie van den grooten restweerstand van *In*—1922—*I* vreemd.

Uit de tabellen blijkt (zie ook fig. 2), dat een verschil van 0,002

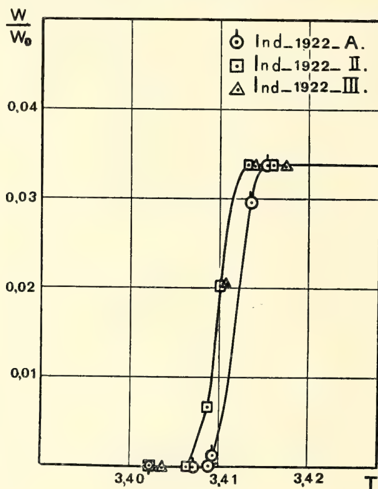


Fig. 2.

gauss voor eene sprongpuntverschuiving van 0,02 graad. i is steeds 4 m. A. Wil in aansluiting aan de hypothese van SILSBEE het eigen magneetveld van *In*—1922—*I* 1,4 gauss grooter zijn dan dat van *In*—1922—*II*, dan moet door oxydatie de straal van *In*—1922—*I* tot ongeveer 0,005 m.m. zijn verminderd, hetgeen onvereenigbaar met de verhouding der W_0's is, indien men er op let, dat beide weerstanden in lengte niet veel verschillen.

De verandering van den weerstand met verschillende stroomsterkten is bij de proeven met indiumdraden niet gemeten. Een 10-maal grootere stroomdichtheid gaf bij eenen tindraad volgens Comm. 133*d*, tabel IX een sprongpuntverschuiving van ongeveer 0,02 graad. Met deze getallen voor indium zou de doorsnede van *In*—1922—*II* 10-maal die van *In*—1922—*I* moeten zijn, hetgeen ook eene wanverhouding der W_0's geeft.

[1]) De groote waarde en gelijkheid van dezen restweerstand voor alle drie draden deed ons juist twijfelen aan de zuiverheid van het geleverde indium.

graad in sprongpunttemperatuur bestaat tusschen *In*—1922—*A* ter eener en *In*—1922—*II* en —*III* ter anderer zijde. Verklaring door het aannemen van temperatuurverschillen in het heliumbad lijkt onwaarschijnlijk. Wat den invloed van het eigen magneetveld betreft, bij *In*—1922—*A* liggen de windingen op 0,4, bij *In*—1922—*II* en —*III* op 2,2 mm. afstand; in bepaalde deelen van doorsnede en oppervlak eener winding wordt het eigen magneetveld verzwakt door dat der naastgelegen windingen en meer, naarmate deze nauwer aaneenliggen. Bij berekening[1]) blijkt deze verzwakking te klein, om volgens de veronderstellingen van SILSBEE het gevonden verschil in sprongpunttemperatuur van *In*—1922—*A* en *In*—1922—*II* en —*III* te kunnen verklaren.

§ 3. *De supra-geleidende metalen in het periodiek systeem der elementen.* De vraag rijst, of de sprongpunttemperatuur een periodiek karakter heeft. In het periodiek systeem ligt *In* boven *Tl*, *Sn* boven *Pb*; opmerkelijk is dat genoemde temperatuur stijgt, zoowel van *In* naar *Sn*, als van *Tl* naar *Pb* gaande. Naar links, van *Tl* naar *Hg*, gaat zij ook omhoog; zet deze stijging zich voort, dan zou de sprongpunttemperatuur van *Au* hooger dan die van *Hg* liggen. Daar nu *Au* bij afkoeling tot 1°,5 K. niet supra-geleidend werd[2]), zou men de gevolgtrekking kunnen maken, dat *Au* — met meerdere metalen misschien — dit nooit kan worden[3]).

---

1) Zie noot 3, pag. 4.

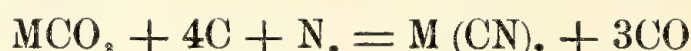
2) Zie Comm. No. 120*b*, § 2.

3) In Comm. Suppl. No. 44, pag. 35 wordt daarentegen juist de mogelijkheid vermeld, dat de sprongpunttemperatuur van *Au* bij afkoeling tot 1,°5 K. nog niet bereikt is.

Scheikunde. — L. HAMBURGER: *„Stikstofbinding volgens het cyanide-procédé en atoombouw."*

(Aangeboden door de Heeren P. EHRENFEST en J. BÖESEKEN).

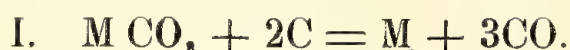
a. *Inleiding.* Gelijk men weet vormt de reactie



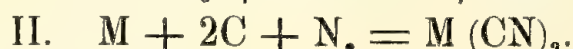
$$MCO_3 + 4C + N_2 = M\,(CN)_2 + 3CO$$

den grondslag voor de stikstofbinding volgens het z.g. cyanide-procédé. Voor deze omzetting blijkt de temperatuur, waarbij de stikstofbinding met practisch merkbare snelheid verloopt, zeer uiteen te loopen, al naar gelang voor het metaal M een ander element wordt gekozen. H. LUNDÉN [1]) heeft ook Rb. en Cs. in de onderzoekingen betrokken en meent, dat er een verband bestaat tusschen kookpunten en atoomgewichten der betreffende metalen en de „cyaneeringstemperatuur". Het is echter niet mogelijk een quantitatief verband op dezen grondslag af te leiden.

b. *Reactie-stadia.* Om tot een nader inzicht te komen, moge men bedenken, dat men, blijkens verschillende onderzoekingen (zie in het bijzonder die van J. E. BUCHER [2]) in het reactieverloop allereerst twee stadia dient te onderscheiden:



$$\text{I.}\quad M\,CO_3 + 2C = M + 3CO.$$



$$\text{II.}\quad M + 2C + N_2 = M\,(CN)_2.$$

Van deze reactie's is I van een uiterst endotherm karakter, II daarentegen sterk exotherm; II verloopt (event. bij toevoeging van een katalysator) practisch momenteel. Of een practisch merkbare reactie-snelheid tot stand komt, zal dus van I afhangen. Het sterk endotherme karakter van I echter heeft tengevolge, dat de totaalreactie I en II eveneens nog in belangrijke mate endotherm is, zoodat bij intreden der reactie de temperatuur tamelijk wel constant blijft tot de reductie van MCO_3 beëindigd is. De daarbij benoodigde energiehoeveelheden zijn zoo groot, dat onder vergelijkbare condities factoren als verdeelings-, verdunnings-, oplos-, smelt- en verdampingsenergieën van ondergeschikte beteekenis blijven. Evenzoo kan de afhankelijkheid der reactie-energie van de temperatuur binnen wijde grenzen verwaarloosd worden. De mogelijkheid van al deze benaderingen stempelt de cyaneeringsreactie tot één der weinige

[1]) Cf. TH. THORSELL. Zeitschr. f. angew. Chemie **33**, 251 (1920).

[2]) J. E. BUCHER. Jl. of Ind. & Eng. Chem. **9**, 233 (1917).

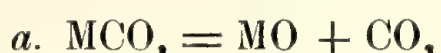
chemische omzettingen, welke evenals de zeldzame, ideale photochemische reacties experimenteel aantoonbare aanwijzigingen ten gunste der weliswaar fundamenteele doch tevens simplistische grondtheorieën vermogen te geven (vergel. bijv. F. WEIGERT [1]).

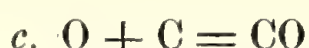
Tengevolge der aangegeven factoren heeft men, ondanks het ingewikkelde karakter der reactie, te doen:

1°. met tamelijk karakteristieke reactietemperaturen;

2°. met den beslissenden invloed van de metaalvormingen.

Wij kunnen I voorts splitsen in de volgende meer elementaire processen:


a. $MCO_2 = MO + CO_2$


c. $O + C = CO$


b. $MO = M + O$


d. $C + CO_2 = 2CO$

waarbij *c* en *d* voor alle metaalcyanide-synthesen dezelfde reactievergelijking volgen, terwijl voor alles *b* de reactie is, welke het leeuwendeel van den energie-toevoer opeischt.

c. *De primaire reactie*. Vanuit het standpunt van W. KOSSEL [2]) beteekent het verloop van *b* niets anders dan dat onder invloed der toegevoerde energie in het metaaloxyde de zuurstof het aan het metaal ontnomen negatieve electron weer afstaat. Deze opvatting leidt echter in ons geval tot de moeilijkheid, dat de teruggave gemakkelijker zou moeten plaats vinden bij metaalatomen met relatief groote affiniteit tot het terugkeerend electron dan bij meer electro-positieve elementen. In werkelijkheid echter blijkt de reactie bij toenemende electro-positiviteit der elementen gemakkelijker in te treden.

Het is evenwel niet noodig aan te nemen, dat bij iedere metaal-metalloïde-verbinding één of meer der metaal-electronen geheel naar het metalloïde is overgegaan. Men zal in menig geval met een gedeeltelijken overgang te maken kunnen hebben, d. w. z. met toestanden, waarbij slechts gedeeltelijke losmaking („Lockerung"; dislocatie) van het metaal-(valentie-)electron ten opzichte van het metaalatoom kan worden aangenomen. Wij kunnen dit in verband met de spectrale interpretaties van BOHR ook zoo uitdrukken, dat het electron in kwestie zoowel het zuurstofatoom als het metaalatoom slechts in een kenmerkende „abnormale" baan ter beschikking zal staan.

De dalende reactietemperatuur bij toenemende electro-positiviteit van het metaal brengt er ons voorts toe aan te nemen, dat primair niet het electron geheel tot het metaalatoom terugkeert, doch dat omgekeerd met een volledige verwijdering van het valentie-electron

[1]) F. WEIGERT. Zeitschr. f. Phys. **14**, 383 (1923).

[2]) W. KOSSEL, Ann. d. Phys. **49**, 229 (1916).

van de metaalrest moet worden rekening gehouden. Het is dit proces, dat wij in het volgende nader onder de oogen willen zien en kortheidshalve met de uitdrukking „primaire reactie" mogen aanduiden. Hiermede wordt dus de consequentie onder oogen gezien, dat de dissociatie van het metaal-oxyde niet geschiedt langs den directen splitsingsweg $MO = M + O$, doch dat onder energie-opneming eerst een *activeering* intreedt, zich manifesteerend als ionenvorming. Vanuit dien geactiveerden toestand heeft dan het verdere reactieverloop plaats.

Wij komen hiermede geheel op de basis van die theorieën van reactie-snelheden, welke, althans in bepaalde gevallen, getoond hebben opmerkelijke geldigheid te bezitten; in het bijzonder tot den het eerst door Sv. ARRHENIUS [1]) en later o.a. door J. PERRIN [2]) in zijn „Lumière et Matière" als algemeen geldig voor elke reactie gestelden „activeerings"-grondslag.

In het verdere deel wordt een enkele grond aangevoerd voor het aannemen, dat het afgescheiden electron aan de zuurstofrest zoude worden gebonden. Dit kan men echter als een tweede stadium beschouwen, hetwelk wij in het nadere onderzoek der primaire reactie buiten beschouwing laten (zie ook p. 670 onderaan).

Wij weten uit de onderzoekingen van J. FRANCK omtrent de botsingen van langzame electronen in electro-positieve- en edel-gassen, dat negatieve electronen door zuurstof worden gebonden, daarentegen bij voldoenden energie-toevoer door het electropositieve atoom kunnen worden afgestaan. Evenzoo is het denkbaar, dat een gedeeltelijk gebonden electron, hetwelk door „critische" energie-toevoer [waarmede kortheidshalve moge aangeduid worden de onderste grens van energie-toevoer, noodig om de primaire reactie tot stand te brengen] met geringe snelheid ter beschikking komt, aan het zuurstof-atoom wordt gebonden.

d. *Ioniseeringspotentiaal*

Voor de losmaking van een electron uit een vrij metaalatoom is, zooals men weet, de ioneeringspotentiaal van den damp een beslissende grootheid. Waar er nu reden is om aan te nemen, dat de primaire reactie in de gasphase plaats vindt [3]), willen wij, in verband met de sub *c* gegeven opvatting omtrent de primaire reactie, aller-

[1]) Sv. ARRHENIUS. Zeitschr. f. phys. Chem., **4**, 226 (1889).

[2]) J. PERRIN, Ann. d. Phys. **11**, 5 (1919).

[3]) Alle metaalcarbonaten of oxyden der alkaliën en aardalkaliën zijn bij de aangegeven reactietemperaturen sterk of merkbaar vluchtig. De verdamping wordt bij de dissociabele carbonaten bevorderd door het ontstaan der oxyden in moleculaire verdeeling (vorming in „statu nascendi" en meevoering door den gasstroom). De paralleliteit tusschen cyaneeringstemperatuur en vluchtigheid der carbonaten resp. oxyden is opvallend.

eerst beproeven in hoeverre de ioniseeringspotentiaal ook in de cyaneerings-reactie tot uitdrukking kan worden gebracht. Wij berekenen daartoe volgens onderstaande tabel de waarden der grootheid $\frac{V}{T}$, waarin V de ioniseeringspotentiaal der vrije alkali- resp. aardalkali-atomen voorstelt, terwijl voor T de reactietemperatuur der cyaneering is ingevuld[1]). Men ziet uit rij 4 der tabel, dat men voor $\frac{V}{T}$ overal dezelfde orde van grootte vindt.

Rij 1	Metaal	Li.	Na.	K.	Rb.	Cs.	Mg.	Ca.	Sr.	Ba.
2	Reactie-temp. in °K(T)	1370	1200	1100	970	870	2100?	1900	1670	1320
3	Ionisatie-potent. in volts (V)	5.4	5.1	4.3	4.2	3.9	7.6	6.1	5.7	5.2
4	$\frac{V}{T} \cdot 10^3$	4.2	4.2	4.0	4.2	4.3	3.2?	3.2	3.4	3.9
5	Aanslagspanning V'' in volts	1.84	2.09	1.60	1.55	1.38	2.70	1.88	1.79	1.56
6	$\frac{V-V''}{T} \cdot 10^3$	2.5+	2.5	2.5—	2.7	2.86	2.3?	2.2	2.3	2.7

Gezien de zeer uiteenloopende omstandigheden moet de overeenstemming zelfs merkwaardig genoemd worden, te meer waar ook op theoretischen grond een scherp gedefinieerde reactietemperatuur niet mag worden verwacht.

e. *Dislocatie-potentiaal.*

Door den ioniseeringspotentiaal wordt de energie bepaald, welke noodig is om een „buitenste" electron van een metaalatoom uit een normale baan volledig af te scheiden. Waar wij sub c tot de opvatting kwamen, dat in de verbinding het betreffende electron in een abnormale baan aanwezig is, ligt de conclusie voor de hand, dat niet V, maar een kleinere grootheid $V - V'$ een maatstaf kan geven voor de critische energie-toevoer, waarin V' het energieverschil bepaalt van het electron in de abnormale baan der verbinding ten opzichte van het in het vrije metaalatoom in de normale baan verkeerend electron. Noemen wij V' kortheidshalve dislocatie-potentiaal, het in de abnormale baan verkeerend electron gedisloqueerd electron.

[1]) De opgave van de reactietemperatuur van CaO is ontleend aan een mededeeling van P. SCHLÄPFER (Schweiz. Chem. Ztg. 1919, Heft 29/30), de waarden der ioniseeringspotentiaal zijn aan een samenvattende mededeeling van J FRANCK (Phys. Zeitschr. **22**, 413 ('21) ontleend.

De losmaking van het gedisloqueerd electron van de metaalrest moet dan volgens onze opvatting een hoeveelheid energie vereischen, welke evenredig is met $e(V-V')$ (waarin e de lading van het electron voorstelt) en welke aan de beschikbare thermische energie van het medium wordt ontleend. Stellen wij de laatste bij benadering evenredig met T, dan vinden wij:

$$e(V-V') = kT,$$

zoodat de relatie gevonden wordt:

Voor alle cyaneerings-reacties moet $\dfrac{V-V'}{T}$ constant zijn.

f. *Aanslagspanning.*

Het is bij den analogen bouw van de „buitenste electronen-schalen" der homologe elementen waarschijnlijk, dat in de metaaloxyden het gedisloqueerde electron als regel gemiddeld in een gelijksoortig abnormale baan verkeert. Wij kunnen echter met den ons ten dienste staande gegevens niet aangeven, welke. Beschouwen wij echter de waarden der aanslagspanning V'' der verschillende elementen, [welke grootheid beslissend is voor den energie-toevoer, noodig om een „buitenste" electron in het metaalatoom uit de normale in de eerste abnormale baan over te voeren (rij 5 der tabel)] met den ioniseeringspotentiaal (rij 3), dan valt het onderling analoge verloop daarvan met toenemende electropositiviteit der elementen op. Wanneer wij dus in plaats van $V-V'$ de grootheid $V-V''$ invoeren, dan zullen wij in het kader onzer opvatting niet alleen tot bruikbare uitkomsten kunnen komen voor die gevallen, waarin de abnormale baan van het valentie-electron in de verbinding identisch zoude zijn met de eerste abnormale baan, doch ook wanneer de positie van het gedisloqueerde-electron met een andere abnormale baan zou overeenkomen. Een belangrijk verschil tusschen V'' en V' is echter naar onze meening daarom niet aannemelijk, omdat dan de waarde der grootheid $V-V''$ niet meer in overeenstemming zoude zijn met den aanzienlijken energie-toevoer, welke voor het tot stand komen der primaire reactie noodig is. Dit klemt te meer, omdat bij de volledige additie van het „buitenste" electron aan de zuurstofrest bovendien energie vrij komt. Wij hebben deze niet nader beschouwd, omdat deze energiewinst ten opzichte van de zuurstofrest voor alle beschouwde metaaloxyden gelijk gesteld kan worden en dus niet tot karakteristieke verschillen aanleiding kan geven.

In rij 6 vindt men de waarden van het quotiënt $\dfrac{V-V''}{T} \cdot 10^3$ medegedeeld. Men ziet, dat de afwijking tusschen de alkaliën en

aardalkaliën geringer is dan in rij 4. Overwegingen voor een verdere correctie mogen te anderer plaatse volgen.

g. Tenslotte merken wij op, dat wij met het bovenstaande — aan de hand van het atoom-model RUTHERFORD-BOHR — een voorbeeld hebben willen geven van de opvatting, dat tenminste in bepaalde gevallen, ionisatie- en dislocatie-potentialen niet alleen beslissend zijn voor reactie-mogelijkheid, maar ook voor reactie-snelheid en reactie-temperatuur.

PERRIN wil in elke chemische werking photo-chemische werking zien. Ons inzicht in den bouw van het atoom leert ons, dat fundamenteel is de verplaatsing der electronen daarin. Deze verplaatsing kan tot stand gebracht worden door straling, doch ook op tal van andere wijzen. Het is dan ook niet aannemelijk, bij de verklaring van de chemische werking, aan het licht een eenzijdige rol toe te kennen; andere energievormen laten zich evenzeer gelden. Wel zal men in verband met de opvatting eener wisselwerking tusschen de verschillende energie-vormen, de mogelijkheid onder oogen kunnen zien eener, zij het ook formeele, afleiding uit de stralingswetten van de betrekking $\frac{\text{critische energie-toevoer}}{\text{reactie-temperatuur}} = \text{constant}$, in welk geval dan met de door R. C. TOLMAN[1]) en E. K. RIDEAL[2]) gegeven richtlijnen dient rekening gehouden te worden. Hiervan wordt te anderer plaatse mededeeling gedaan.

Dordrecht, 26 Juni 1923.

Opmerking bij de correctie.

Uit recente bepalingen omtrent de „electronen-affiniteit" van eenige electronegatieve elementen, alsmede uit bekende electrochemische data, kan men — gelijk elders worde toegelicht — afleiden, dat de additie-potentiaal van een electron aan een zuurstofatoom ten hoogste twee volt kan bedragen. Deze waarde bevestigt wat sub *f* als aangenomen gegeven is en rechtvaardigt de verwaarloozing van den additie-potentiaal van het valentie-electron aan de zuurstof, welker waarde in de behandelde gevallen als regel slechts gering kan zijn. 4 Juli 1923.

---

1) R. C. TOLMAN, Journ. Amer. Chem. Soc. **42**. 2506 (1920).

2) E. K. RIDEAL. Phil. Mag. **42**, 156 (1921).

Natuurkunde. — H. W. J. DIK en P. ZEEMAN: *„Over een verband tusschen de spectra van geïoniseerd kalium en argon"*. (Tweede mededeeling).

Thans is de voortzetting van de waarnemingen over het spectrum van kaliumdamp onder den invloed van de ontlading zonder electroden gereed gekomen. Deze metingen loopen nu tot λ 2342,3 Å. Ze zijn eveneens met een kwartsspectrograaf genomen. Wij laten Tabel IV beginnen met 3514.0, zoodat Tabel I van onze vorige mededeeling [1]) en Tabel IV voor een klein gedeelte over elkaar vallen. De waarden van Tabel IV zijn de nauwkeurigste, en zijn verkregen door directe vergelijking met de ijzernormalen.

TABEL IV. Kaliumlijnen bij ontlading zonder electroden.

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
—	1		9	3514.0	28458	
—	—	1	9	3490.8	28647	
1	1		10	3480.9	28728	
1	1		10	3476.4	28765	
—	1		9	3468.3	28833	
—	—	—	3	3457.4	28923	
—	—	—	2	3447.8	29003	
10 }	2		—	3447.5		booglijn
	3		—	3446.5		booglijn
6	3		20	3439.9	29070	
1	2		15	3433.2	29128	
—	—	—	2	3427.0	29180	

[1]) Deze Verslagen. Deel 31. 141. 1922.

TABEL IV (*Vervolg*).

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
1	1		15	3421.9	29223	
—	—	—		3421.0	29231	
—	—	—	1	3417.0	29266	
2	2		15	3404.2	29376	
—	1		9	3392.6	29476	
6	4		15	3384.6	29545	
6	4		15	3380.3	29583	
1	3		15	3373.5	29643	
—	6		20	3363.9	29727	
1	8			3362.5	29739	
—	2		2	3358.6	29774	
—	2		2	3356.2	29796	
8	5	6	15	3345.0	29895	
—	—	—	2	3338.0	29958	
—	—	3	2	3336.1	29975	
1	—	—	—	3326.4		
—	—	3		3324.7		
1	4	—	15	3322.2	30101	
3	4	5	15	3311.9	30194	
—	—	3	15	3301.2	30292	
3	3	5	15	3289.8	30397	
—	—	—	1	3285.5	30437	
—	3	3	10	3278.6	30501	
—	2	3	10	3261.9	30657	
—	—	3	3	3258.6	30688	
—	—	—	3	3253.9	30732	
—	—	3	—	3244.5		
—	2	—	10	3241.2	30853	
—	—	—	4	3237.8	30885	

TABEL IV (*Vervolg*).

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
—	—	—	1	3226.9	30989	
1	1	1	8	3224.2	31016	
2	2	0	10	3220.2	31054	
—	1	—	3	3218.5	31071	
2	1	—	—	3217.5		
—	—	0	—	3213.0		
1	4	—	10	3209 0	31162	
—	—	4	—	3205.6		
1	3	—	10	3201.8	31232	
2	2	5	10	3190.0	31348	
—	2	—	10	3187.7	31371	
—	—	2	3	3171.8	31528	
1	1	4	9	3169.6	31550	
1	1	3	6	3157.0	31676	
—	—	2	—	3148.6		
—	—	—	1	3145.1	31795	
3	—	—	4	3142.7	31820	
4	2	4	15	3128.8	31961	
—	—	—	5	3109.7	32157	
5	4	—	15	3104.9	32208	
1	1	6	4	3102.9	32228	
1	1	2	8	3074.7	32524	
1	—	—	—	3067.3		
6	5	5	20	3061.7	32661	
1	2	0	10	3056.5	32717	
1	3	2	15	3051.9	32767	
—	—	2	3	3047.0	32819	
1	1	3	9	3030.4	32999	
1	2	3	10	3023.5	33074	

TABEL IV (*Vervolg*).

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
4	3	3	15	2992.4	33418	
1	1	2	9	2986.3	33487	
—	—	2	4	2965.1	33726	
—	1	—	—	2963.4		
—	—	1	4	2954.3	33849	
—	—	—	1	2950.9	33888	
—	—	—	1	2942.9	33980	
1	1	2	10	2938.6	34030	
—	—	—	3	2927.9	34154	
—	—	1	4	2925.8	34179	
—	—	2	8	2903.4	34442	
—	—	—	1	2898.9	34495	
—	—	—	1	2893.9	34555	
—	—	—	3	2880.2	34720	
—	—	—	1	2877.5	34753	
—	—	—	2	2872.5	34813	
1	1	2	10	2854.4	35034	
—	—	—	4	2851.7	35066	
—	—	—	1	2847.7	35117	
—	—	3	2	2834.7	35277	
1	1	—	—	2833.3		
—	—	2	3	2824.3	35408	
—	—	—	3	2821.9	35437	
1	1	3	10	2819.3	35469	
—	—	—	5	2809.0	35600	
—	—	—	9	2806.3	35634	
—	—	—	5	2804.6	35656	
—	—	5	—	2803.5		
—	—	—	3	2800.3	35711	

TABEL IV (*Vervolg*).

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
1	1	—	—	2780.2		
—	—	1	5	2777.9	35998	
—	—	—	1	2776.1	36022	
—	—	1	—	2768.1		
—	—	—	1	2763.4	36187	
—	1	2	9	2743.5	36450	
1	1	4	5	2736.2	36547	
—	—	1	—	2732.0		
1	1	3	9	2690.0	37175	
1	—	3	3	2662.8	37555	
—	—	1	1	2657.1	37636	
1	1	4	10	2635.1	37950	
—	—	0	—	2630.0		
1	1	2	1	2613.8	38259	
—	—	—	3	2572.4	38874	
—	—	1	—	2569.8		
—	—	—	3	2561.3	39043	
—	—	2	—	2559.2		
2	1	4	10	2550.0	39215	
—	—	—	1	2542.0	39339	
—	1	—	—	2538.7		
—	—	3	5	2536.4	39425	
—	—	—	5	2504.6	39927	
—	—	2	—	2502.4		
—	—	—	1	2485.5	40234	
—	1	3	8	2473.2	40434	
—	—	3	—	2470.4		
—	—	2	1	2452.7	40771	
—	—	—	1	2448.9	40834	

TABEL IV (*Vervolg*).

Intensiteit.				λ	ν	Opmerkingen.
EV	S	McL	D			
—	—	4	1	2447.2	40864	
1	1	2	7	2440.0	40984	
—	—	4	1	2436.7	41039	
—	—	—	2	2431.1	41134	
—	—	—	1	2415.4	41401	
—	—	—	1	2414.4	41417	
—	—	3	—	2410.4		
—	—	—	1	2404.5	41588	
—	—	3	—	2402.0		
—	—	3	—	2393.4		
—	—	—	1	2389.1	41857	
1	1	—	2	2379.2	42031	
	—	4	—	2376.3		
	—	5	2	2369.6	42202	
	—	2	—	2365.8		
	—	7	—	2362.6		
1	1	—	—	2358.9		
1	1	3	—	2350.3		
—	—	4	—	2348.3		
1	—	—	—	2344.7		
1	1	3	1	2342.3	42693	

Het schijnt dat de constante verschillen beneden λ 3000 spoedig ophouden. Misschien hangt dit samen met het optreden van het tweede vonkspectrum van het kalium.

Wij zijn echter ook begonnen met een onderzoek naar de lijnen, die aan formules met viervoudige en negenvoudige Rijdberg-constante voldoen. Langs dezen weg zou het bewijs geleverd kunnen worden, dat het waargenomen spectrum van éénmaal geioniseerd kalium afkomstig is en tevens misschien een quantitatieve vergelijking met het roode argonspectrum mogelijk zijn.

Geologie. — W. F. GISOLF: *„Over een accessorisch mineraal in door den G. Roeang (Sangir-eilanden) uitgeworpen olivijn-anorthiet-bommen".*

(Aangeboden door de Heeren EUG. DUBOIS en G. A. F. MOLENGRAAFF).

Door Dr. G. L. L. KEMMERLING werden van den G. Roeang medegebracht dichte zwarte tot olijfgroene en dan grofkorrelige gesteenten, doorgroeid met glasheldere veldspaat tot in centimeter groote kristallen. Zij werden door hem aan mij ter bewerking toevertrouwd.

De dichte zwarte met plagioklaas doorgroeide gesteenten bleken sterk magnetische eigenschappen te bezitten; met de loupe was blauw-aangeloopen magnetiet zichtbaar; onder het microscoop bleken zij te bestaan uit een maaksel van dicht opeengedrongen magnetietkorreltjes, waartusschen met moeite sterk pleochroïtische hyperstheen en groene monokliene pyroxeen herkend kon worden.

Gesteenten armer aan deze dicht opeengedrongen magnetietkorrels bleken te bestaan uit gecorrodeerde olivijn, die door een zoom van sterk pleochroïtische hyperstheen was omzoomd en waarbuiten fleschgroene monokliene pyroxeen gelegen was; de plagioklaas behoort tot de meest basische deelen der groep.

In enkele dier gesteenten trad accessorisch een mineraal op in minutieuze korrels in vrij groot aantal. Het fraaist treden zij op in monster 285 A, waarin de olivijn ook macroscopisch te herkennen is, en hetwelk ook nog een omkorsting vertoont van het effusief gesteente van den G. Roeang, een basalt met fleschgroene augiet en zeer basische plagioklaas. De plagioklaas is vertweelingd volgens albiet- en Karlsbadwet; één dier sneden gaf drie lamellen te zien: de eerste lamel vertoonde uittreding der optische *c*-as met een uitdooving van 65°, de tweede lamel gaf uittreding der *a*-as te zien met een uitdooving van 32°, terwijl de derde lamel een uitdooving van 85° toonde. Daarmede is een zéér anorthietrijke plagioklaas onweerlegbaar bepaald.

De hypersthee is in hooge mate pleochroïtisch van bleekgroen tot bruinrose en voor een rhombische pyroxeen sterk dubbelbrekend. Zij is veelal gemengd met grillig gevormde magnetietkorrels.

De olivijn is o. h. m. kleurloos, hoog dubbelbrekend, en overal

gecorrodeerd. Het bewuste mineraal dan treedt op in fraai kristallografisch begrensde korrels, welke het meest schijnen te duiden op een octaëdervorm met en zonder opgezette vlakken (triakisoctaëder); zij zijn uiterst klein, in vele gevallen dunner dan het praeparaat, hetwelk vrij moeilijk te vervaardigen was. Zij zijn isotroop, verlagen wel de polarisatiekleur van den gastheer, maar zijn ook donker als het gastheerkristal tusschen gekruiste nicols uitdooft. Zij vertoonen een zeer breeden zwarten rand (ook in olivijn), zoodat in vele gevallen slechts in of nabij het midden een lichtkegel uittreedt, welke door het op- en neer bewegen van den microscooptubus vervolgd kan worden. Het mineraal treedt op in de olivijn, maar ook in de plagioklaas en legt zich dan gaarne op groeivlakken, welke zich door den zonairen bouw verraden. Ook komen enkele willekeurig begrensde uitgerekte vormen voor met overigens gelijke eigenschappen.

Het meest treedt dit accessorisch mineraal op in de olivijn en in den anorthiet. De hyperstheen is er òf vrij van òf omsluit het in mindere mate.

Gekozen werd nu een fragment van het gesteente, waaraan een vlakke zijkant voorkwam; eerst werden onder druk op topaas krassen verkregen, maar daarna ook op korund. Die druk moest toegepast worden, omdat bij het slijpen der praeparaten bleek, dat het mineraal in kwestie spoedig werd uitgewipt, zoodat in het praeparaat dan alleen holten te zien zijn. Het mineraal in kwestie is dus isotroop, heeft een octaëdrischen habitus, een zéér hoogen brekingsindex en een hardheid grooter dan korund, indien men althans de krassen op de korund aan dit mineraal toeschrijft, waaraan wel geen twijfel kan bestaan. Op grond dezer gegevens meen ik te mogen besluiten tot den naam diamant, ook zonder verdere contrôleproef, waartoe zich de uiterste fijnheid van het mineraal slecht leent.

Indien dit echter juist is, dan werpt deze vondst een ongemeen gelukkig licht op de ontstaanswijze van dit mineraal. Evenals elders ter wereld is het moedergesteente van een peridotietische natuur, maar hier kan geen sprake zijn van doorbroken kolen- of kleisteenlagen, waaraan de diamant zijn koolstof ontleend kan hebben. De diamant blijkt hier volkomen primair en is zelfs ouder dan de olivijn.

Er blijft nog de vraag over om te beantwoorden hoe het komt, dat de hyperstheen vrij of haast vrij is van dit mineraal, terwijl zoowel olivijn als plagioklaas het omsluiten en de vorming van hyperstheen tusschen die van olivijn en plagioklaas inligt.

Het heeft er allen schijn van, dat het oorspronkelijke gesteente geheel olivijn is geweest, en dat eerst later in door resorptie

44

geschapen holten de anorthiet is uitgekristalliseerd; bij de resorptie van olivijn is dan de diamant zwevend gebleven, de eerst later afgezette hypersthëen heeft door oppervlaktespanning de kleine deeltjes van zich afgestooten, waardoor zij tenslotte in de anorthiet werden verzameld. Inderdaad vindt men vrij veel diamant in de anorthiet.

Tevens zou hieruit volgen, dat de reactie olivijn → hypersthëen + magnetiet zich niet in vasten toestand voltrokken heeft, omdat dan immers geen reden voor het verdrijven van den diamant zou hebben bestaan.

Kolloidchemie.— J. R. KATZ. „*Onderzoekingen over het wezen van het zoogenaamde adsorptie-vermogen van fijn verdeelde koolstof*". I. *De binding van water door dierlijke kool.*

(Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en F. M. JAEGER).

I. *Inleiding.*

Het vermogen van fijn verdeelde koolstof om allerlei stoffen te binden hangt klaarblijkelijk met den fijnen verdeelingsgraad samen; immers, in niet-fijnverdeelden toestand vertoont de koolstof dit vermogen niet. Tegenwoordig beschouwt men het verschijnsel vrijwel algemeen als een typisch voorbeeld van echte oppervlakte-adsorptie, d.w.z. als de ophooping eener stof in de grenslaag enkel tenvolge der oppervlakte-krachten.

Deze oppervlakte-adsorptie wordt meestal in scherpe tegenstelling gebracht tot de vorming eener vaste oplossing. In dit laatste geval bevindt zich de gebonden stof niet alleen in de grenslaag vast-vloeibaar, maar dringt zij door diffusie gaandeweg door tusschen de moleculen der vaste stof, zoodat tenslotte de hoofdzakelijke hoeveelheid opgenomen stof zich niet in de grenslaag, maar homogeen verdeeld door het vaste lichaam heen bevindt.

Klare experimenteele vraagstellingen over het wezen dezer binding aan kool dateeren pas uit den tijd der physische chemie. BANCROFT [1]) e. a. hebben aan de mogelijkheid gedacht, dat de stoffen door de kool in vaste oplossing opgenomen zouden worden; maar de nadere uitwerking dezer gedachte stootte af op den vorm der bindings-isotherme. Hadden wij met een vaste oplossing te doen, dan moesten — meende men voor omstreeks twintig jaren — de wetten van HENRY en NERNST gelden, dus de hoeveelheid opgenomen stof moest recht evenredig zijn aan de concentratie der damp- of vloeistofphase, waarmede zij in evenwicht is. Men krijgt echter een curve, die bijna horizontaal begint en dan de bolle zijde naar onderen keert. Dit zou zich laten verklaren door aan te nemen, dat de opgenomen stof zich in de kool in vele (b.v. vier of tien) molekulen dissocieert. Bij de meeste der door koolstof gebonden stoffen heeft een dergelijke hypothese geen zin. Bovendien wordt niet duidelijk, waarom

1) The Phase Rule.

de kool des te beter werkt, naarmate zij fijner verdeeld is; dit moet dan als een gevolg der gemakkelijkere diffusie verklaard worden.

FREUNDLICH toonde toen in 1907 aan [1]), dat de bindingsisotherme door de formule

$$\frac{x}{m} = a \cdot c^{\frac{1}{n}}$$

voorgesteld kan worden, voor niet te groote waarden van c (m is de hoeveelheid kool, x de door haar gebonden stof, c de concentratie dezer stof in de oplossing, die met de kool in evenwicht is, a en n constanten). Hij toonde aan, dat wij hier met *echte* evenwichten te doen hebben, die zich in zeer korten tijd instellen. De mate waarin een vaste stof bindt, is zeer verschillend naar gelang der opgenomen stof, maar weinig afhankelijk van den aard der vaste phase. FREUNDLICH toonde aan, dat deze feiten nog het best begrijpelijk worden, als men aanneemt, dat de binding op oppervlakte-adsorptie berust, op een verdichting aan het oppervlak der vaste phase. Maar hijzelf sluit in 1909 de mogelijkheid niet uit, dat het verschijnsel op de vorming eener dissocieerbare chemische verbinding of eener vaste oplossing berust; alleen noemt hij deze verklaringen ,,wesentlich unvorteilhafter" [2])

Gaandeweg echter heeft, — bij het ontbreken van nieuwe argumenten voor de andere opvattingen — deze opvatting zoozeer in aanhang gewonnen, dat men thans vaak den indruk krijgt, als zou het vaststaan, dat de sorptie door kool op een echte oppervlak-adsorptie berust.

Nu gelukte het mij [3]) in 1910 aan te toonen, dat een afwijking van de wetten van HENRY en NERNST bij vaste oplossingen nog een andere oorzaak hebben kan dan de dissociatie der gebonden stof in meerdere molekulen, n.l. wanneer de menging in vaste oplossing *voornamelijk* tot stand komt door de *aantrekking* tusschen de molekulen van oplosmiddel en opgeloste stof; terwijl bij de gewone verdunde oplossingen de menging vooral door den *diffusie-drang* tot stand komt (omdat de menging een waarschijnlijker toestand is, éene die onder entropie-toeneming plaats vindt, — ook als de aantrekking te verwaarloozen is). In dit geval is de afneming der vrije energie ongeveer gelijk aan het warmte-effect, dat bij de binding plaats vindt. Is de differentiale bindingswarmte groot en neemt zij af bij

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **57**, p. 385 (1907).

[2]) Kapillarchemie, 1ste Aufl. p. 289, Akadem. Verlagsgesellschaft Leipzig 1909.

[3]) Deze Verslagen, Nov. 1910; Voordracht op de vergadering der Bunsen-Gesellschaft, Kiel, 1911; Gesetze der Quellung, Kolloidchem. Beihefte Bd. 9.

opneming der stof, dan volgt uit de gelijkheid der veranderingen van vrije energie en van bindingswarmte, dat de bindings-isotherme een beloop moet hebben, zooals FREUNDLICH dat gevonden heeft, n.l. dat zij vrijwel horizontaal begint en daarna de bolle zijde naar onderen keert. Dit blijkt bij waterige oplossingen van zwavelzuur en phosphorzuur en bij de opzwellende eiwitstoffen en polysacchariden het geval te zijn. In alle deze gevallen blijkt de formule van FREUNDLICH als benaderingsformule voor kleine concentraties te gelden, bij waterige oplossingen van zwavelzuur en phosphorzuur zelfs bizonder goed, hoewel wij hier zeker niet met echte oppervlakte-adsorptie te doen hebben, maar met echte menging.

Het is derhalve duidelijk, dat de geldigheid der formule van FREUNDLICH *niet het bewijs levert, dat men met oppervlakte-adsorptie te doen heeft.* Omgekeerd is ook de gelijkheid in de verandering van vrije energie en van warmte-effect geen bewijs, dat een ideale geconcentreerde oplossing bestaat. Het lijkt mij niet onwaarschijnlijk, dat deze gelijkheid *ook* bij de zuivere oppervlakte-adsorptie bestaat, en wellicht bij vele der gecompliceerde tusschen beide gelegen verschijnselen, die men tegenwoordig *sorptie* noemt. Bij het opnemen van water door ferrocyankoper, waarbij een krasse kleurverandering van violetzwart tot lichtbruin optreedt, vond ik haar bevestigd [1]). De eerstvolgende stap is nu — lijkt mij — deze betrekking bij een aantal typische voorbeelden van echte oppervlakte-adsorptie en van sorptie te toetsen. Immers, blijkt zij overal te gelden, dan is dit een gewichtige bijdrage tot de kennis der sorptie-verschijnselen; en geldt zij nu eens wel en dan weer niet, dan is te bestudeeren, waar dit van afhangt. Maar afgezien daarvan voert zij tot een betere methode, om sorptie- en adsorptie-verschijnselen te analyseeren: *de gelijktijdige bepaling der sorptie-isothermen en der sorptie warmten.* Deze methode levert een veel dieper inzicht dan de thans gebruikelijke, die zich beperkt tot de enkele bepaling der sorptie-isotherme voor kleine concentraties. Dat de formule van FREUNDLICH zoo algemeen bij deze kleine concentraties geldig is, zal waarschijnlijk blijken te beteekenen, dat (bij een systeem, waarin de veranderingen van vrije energie en van warmte-effect bij benadering gelijk zijn) de differentiale sorptie-warmte eerst zeer groot is en gaandeweg bij het opnemen afneemt; hoe langer het (bijna) asymptotische horizontale beginstuk der isotherme is, des te langer zal de differentiale sorptie-warmte een groote waarde behouden. Het gewichtige van deze methode tot onderzoek der sorptie-verschijnselen is nu verder, dat

[1]) Deze Verslagen, Deel XXXI. N⁰. 9 en 10.

zij niet enkel het beloop bij kleine concentraties, maar het geheele beloop der isotherme in aanmerking nemen kan. Eindelijk heeft zij het voordeel, dat zij zich niet van te voren vast legt in een vooropgevatte meening over de heden ten dage meest nog niet zeker op te lossen vraag, van welken aard het sorptie-verschijnsel is (vaste oplossing, echte oppervlakte-adsorptie, dissocieerbare chemische verbinding; of twee of drie dezer mogelijkheden tegelijkertijd). Wel verzamelt de gelijktijdige bepaling der beide curven een voor de beantwoording dezer vraag gewichtig feitenmateriaal, waarmede elke theorie rekening te houden heeft.

2. *Proefnemingen.*

De zuiverste dierlijke kool van MERCK werd voor het onderzoek gebruikt. Deze werd in luchtdrogen toestand in een wijdmondsstopflesch gebracht; haar watergehalte werd door 3 uur drogen bij 230° C. bepaald. Het is niet buitengesloten, dat op deze wijze het watergehalte iets te hoog gevonden wordt, daar de kool wellicht door oxydatie iets aan gewicht verloren heeft. Als bij alle hygroskopische stoffen van dezen aard blijft het eenigermate arbitrair, *wat* men als „droge" stof aanneemt.

Voor de bepaling der *sorptie-warmten* werden hoeveelheden van 5 tot 12 gram kool in *luchtdrogen* toestand afgewogen, wat gemakkelijk nauwkeurig geschieden kan, daar in dezen toestand de stof niet bijzonder hygroscopisch is; geheel droog laat de kool zich niet goed nauwkeurig afwegen. In kristalliseerschalen werden deze monsters kool in exsiccatoren boven zwavelzuurwater-mengsels van verschillende sterkte gebracht en gewacht tot bij benadering evenwicht was ingetreden. Op deze wijze werden monsters kool verkregen, waarin het water zeer gelijkmatig verdeeld is. Waar het watergehalte der luchtdroge kool bekend was, levert de gewichts-toename of afname van het monster kool zijn watergehalte bij de bekende dampspanning.

Deze kool werd in een glazen buis gebracht, die met een nauwsluitenden caoutchouc stop gesloten en in een met water gevuld calorimetervat geplaatst werd. De proeven geschiedden in een kamer, waarin de temperatuur bijzonder constant was. Nadat temperatuursevenwicht ingetreden was, werd de gang van den thermometer gevolgd; dan werd de inhoud van de buis in het water van het calorimetervat geledigd en werd wederom de temperatuur vervolgd. De warmte-ontwikkeling nam na 2—4 minuten niet aantoonbaar meer toe.

Noemen wij *i* den sorptie-graad (gr. water per 1 gr. droge stof) en *W* de sorptie-warmte (warmteontwikkeling in cal. als 1 gr. droge stof 1 gr. water opneemt), dan vond ik:

i	Hoeveelheid warmte bij maximale sorptie per 1 gr. droge kool	*W*
0.—	20.91	0.—
0.049	17.66	3.25
0.090	15.34	5.57
0.218	11.79	9.12
0.350	7.90	13.01
0.437	6.05	14.86
0.563	3.12	17.79
0.659	1.59	19.32
0.718	1.09	19.82
0.753	0.29	20.62
sorptie-max. 0.93	0.—	20.91

Dit is de integrale sorptie-warmte. Daaruit bereken ik de differentiale sorptie-warmte voor $i = 0$

$$\left(\frac{dW}{di}\right)_{i=0} = 75 \text{ cal.}$$

Deze waarde is belangrijk kleiner dan bij opzwelbare stoffen gevonden werd (250 à 400 cal.). Bij de mengwarmte van zwavelzuur (met water) bedroeg zij 550 cal., van phosphorzuur 100 cal., van glycerine 20 cal.

De curve der integrale sorptie-warmten is afgebeeld in fig. 1; zij begint als de gewone curve der imbibitie-warmten en mengwarmten, als een hyperbool, krijgt dan een afgeplat, bijna rechtlijnig aanstijgend stuk en eindigt weer als een hyperbool. Zij is derhalve duidelijk verschillend van de vroeger door mij voor opzwelbare lichamen beschreven curven.

Het is mij nog niet gelukt, uit deze metingen de differentiale sorptie-warmte in haar geheele beloop te berekenen. De curve der integrale sorptie-warmte is zóó gecompliceerd van vorm, dat men een formule met een groot aantal parameters noodig heeft om haar

eenigermate te beschrijven. Hoe grooter het aantal parameters, des te meer willekeur is er in de berekening van het differentiaalquotient



Fig. 1.

$\frac{dW}{di}$. Maar dit laat zich voorloopig al wel zeggen, dat de curve begint met $\frac{dW}{di} = 75$ cal., dan vrij sterk afneemt, en wel op een wijze, die vrijwel overeenkomt met het beloop dezer grootheid bij de mengwarmten (van zwavelzuur of phosphorzuur met water). Bij $i = 0{,}10$ à $i = 0{,}15$ begint zij een eenigermate constante (zij het ook langzaam afnemende) waarde aan te nemen, die ongeveer 23 cal. bedraagt, om dan voorbij $i = 0.65$ weer sterk te dalen en naar nul te convergeeren.

Het ware zeer belangrijk ook de voluumcontractie bij de wateropneming te vervolgen; immers, waar bij opzwelbare en bij mengbare stoffen de verhouding $\left(\frac{c}{W}\right)_{i=0}$ altijd van dezelfde grootte-orde bleek te zijn (tusschen 10 en 30×10^{-4}), ware het gewichtig na te gaan, welke de grootte-orde van dit quotient bij dierlijke kool zou wezen. Ongelukkigerwijze is het niet mogelijk deze voluumcontracties te bepalen, daar kool vermoedelijk wel op *elke* pyknometervloeistof adsorbeerend werkt, althans in watervrijen toestand.

De *vrije energie* bij de sorptie berekent men het beste uit de dampspanning van het water bij verschillende sorptie-graden. Deze dampspanningen heb ik niet direct bepaald, maar indirect, volgens de methode GAY LUSSAC-VAN BEMMELEN (door de stof tot gewichtsconstantie met zwavelzuur-water-mengsels van bekende sterkte in evenwicht te laten komen). Daarbij bleek het opnemen en het verlies van

water een evenwichtsverschijnsel te zijn, dat met *hysterese* bezwaard is. Dit resultaat is in opvallend contrast met de ervaring van FREUNDLICH, dat de absorptie van *opgeloste stoffen*, als jodium, kleurstoffen en organische zuren, een evenwicht is, dat zich glad instelt onafhankelijk van den toestand, waarvan men uitgaat en binnen weinige minuten; deze waarneming van FREUNDLICH werd voor *opgeloste* stoffen door vele onderzoekers bevestigd.

Om den invloed der hysterese onschadelijk te maken, moest het evenwicht van twee kanten bepaald worden; de benaderde waarde van den evenwichtstoestand werd dan door middelen uit de beide zoo gevonden waarden berekend. Er werden dus tweemaal 13 monstertjes luchtdroge kool, elk ongeveer één gr. zwaar, in kristalliseerschaaltjes afgewogen. De eene helft dezer schaaltjes werd één à twee weken lang in een vacuumexsiccator boven zwavelzuur gedroogd; zij bevatten dan nog slechts 1 à 2 deelen water op 100 gew. deelen droge kool. De andere helft werd gedurende even langen tijd in een vacuumexsiccator boven water gesteld; zij bevatten dan omstreeks 90 deelen water per 100 deelen droge kool. Dan werden dertien kleine exsiccatoren met zwavelzuurwater-mengsels van bekende dampspanning ingericht; in elken exsiccator werd een gedroogde en een bevochtigde koolstof geplaatst. Deze zuren werden eenige malen ververscht. Na 40—90 dagen, als de schaaltjes reeds geruimen tijd zoo goed als gewichtsconstant waren geworden, werd aangenomen dat zij hun eenzijdig evenwicht bereikt hadden. Alle proeven geschiedden bij een temp. van 16—20° C. in een kamer, waarin de temperatuurswisselingen bijzonder klein zijn (kamer speciaal voor thermochemie gebouwd).

De waterdampspanning h werd uitgedrukt als fractie van de maximumspanning van water bij dezelfde temperatuur; de gesorbeerde hoeveelheid i als grammen water per één gram droge kool. De vrije energie bij de sorptie van één gram vloeibaar water wordt gevonden uit de betrekking $A = \frac{1252}{18} \log^{10} h$.

Fig. 2 vertoont de istotherme. De curve begint als een echte adsorptie-curve (of als de isotherme van een geconcentreerde oplossing), maar met een *zeer* kort horizontaal beginstuk [1]), krijgt echter ter halver hoogte ($h = 0.40$ à 0.65) een bijna horizontaal stuk; bij $h = 0.65$ en $i = 0.57$ begint dan een nieuw stuk der curve (dat echter zonder eenigen scherpen over-

[1]) Waarschijnlijk is dit te lang geteekend; heeft de kool door drogen bij 200° C. niet door oxydatie eenigermate aan gewicht verloren? Waarschijnlijk is het horizontale begin, *als* het bestaat, slechts zwak uitgesproken.

h	*i*			Verschil tusschen de beide valsche evenwichten
	na bevochtigen	na drogen	in evenwicht	
0.010	0.009	0.022	**0.016**	—
0.083	0.033	0.021	**0.027**	—
0.176	0.039	0.038	**0.039**	—
0.278	0.062	0.052	**0.057**	0.010
0.410	0.172	0.141	**0.157**	0.031
0.517	0.458	0.266	**0.362**	0.192
0.596	0.570	0.411	**0.491**	0.159
0.721	0.649	0.572	**0.631**	0.077
0.788	0.673	0.631	**0.652**	0.021
0.853	0.698	0.676	**0.687**	0.022
0.914	0.730	0.715	**0.723**	0.015
0.962	**0.800**	0.814	**0.807**	—
0.997	—	0.929	**0.929**	—

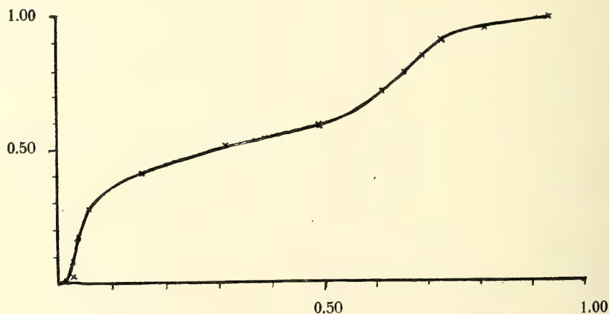


Fig. 2.

gang uit het vorige stuk ontstaat), dat wederom een S-vorm heeft. Opmerkelijk is, hoe groot de hoeveelheid water is, die deze vorm van amorphe kool opnemen kan; boven een zwavelzuur met een $h = 0.997$ nam de stof 0.929 deelen water per 1 deel droge stof op! Dus een wateropneming van dezelfde groote-orde als bij *sterk*

opzwellende stoffen. BACHMANN[1]), die vóór mij reeds een isotherme van kool en water bepaalde, vond bij kokoskool een maximale wateropneming $i = 0.25$. BERL en ANDRESS[2]) vonden bij hunne kool ook een belangrijk kleiner getal dan ik bij de mijne.

De verkregen dubbel-S-vormige curve der isotherme is praktisch van denzelfden vorm als die, welke VAN BEMMELEN bij gelen van kiezelzuur en van ijzerhydroxide waargenomen heeft. Het vlakke stuk komt *daar* overeen met het stuk der curve, waarin het anders doorzichtige gel opaak wordt.

3. *Vergelijking van vrije energie en warmte-effect.*

Een eenvoudige vergelijking der curven fig. 1 en fig. 2 toont, dat $\frac{dW}{di}$ en $log\, h$ een analoog beloop als functie van i moeten hebben. Beide curven hebben een bijna horizontaal, bijna rechtlijnig (langzaam dalend) stuk tusschen $i = 0.10$ en $i = 0.60$ à 0.65; beide curven hebben daarvoor en daarna het beloop als bij vloeistoffen, die zich onder sterk warmte-effect met water mengen. Door graphische bepaling van het differentiaalquotient $\frac{dW}{di}$ laat zich dit schatten voor eenige waarden van i, waarvoor $log\, h$ bekend is. Zoo vind ik:

i	h	$\frac{1252}{18} log^{10} \frac{h_1}{h_2}$	$\left(\frac{dW}{di}\right)_1 - \left(\frac{dW}{di}\right)_2$
0.027	0.083		
		37 cal	11 cal
0.057	0.278		
		12 „	20 „
0.157	0.410		
		7 „	8 „
0.362	0.517		
		4 ,	4 „
0.491	0.596		
		6 „	4 „
0.631	0.721		
		5 „	5 „
0 687	0.853		
		3.5 „	6 „
0.867	0.962		

Dat zijn slechts grove schattingen. Maar zij laten toch met voldoende waarschijnlijkheid zien, dat in het groote middenstuk der curve (van $i = 0.05$ tot $i = 0.80$) de verandering der vrije energie

[1]) Zeitschr. f. anorgan. Chemie **100**, p 32 (1917).
[2]) Zeitschr. f. angewandte Chemie 1921. Bd. I.

van dezelfde grootte-orde is als het warmte-effect. Maar bij kleine i is het warmte-effect veel kleiner dan de verandering der vrije energie. Dit laatste hangt waarschijnlijk samen met de geringe waarde der eerste differentiale sorptie-warmte bij deze stof. Zeer waarschijnlijk bestaat ook in het middenstuk geen gelijkheid, maar enkel overeenstemming in de grootte-orde. De proeven zijn echter niet nauwkeurig genoeg om dit verschil tot uiting te brengen.

4. *De analogie der curven met die voor niet-oudgeworden kiezelzuur; en de verklaring van* Zsigmondy en Anderson.

De isotherme heeft, — gelijk ik reeds opmerkte, — denzelfden typischen vorm als die, welke van Bemmelen en later Anderson voor kiezelzuur-gel gevonden hebben. De „omslag", het punt waar de tweede S-vormige curve begint, ligt bij kool bij $i = 0.57$ en $h = 0.65$. Ook Bachmann vond een curve met een horizontaal stuk bij de door hem onderzochte kokoskool (wellicht zelfs met twee zulke stukken). En Berl en Andress vonden een curve van denzelfden vorm als de mijne bij de door hen onderzochte kool.

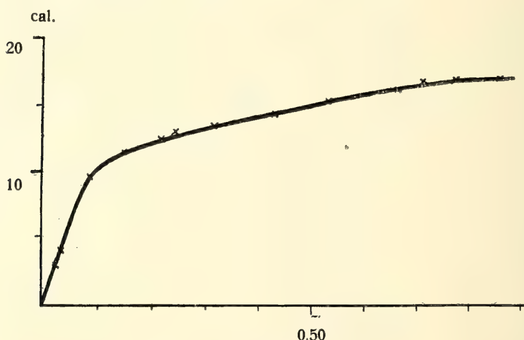


Fig. 3.

Dat ook de curven der sorptie-warmten overeenstemmen, toont fig. 3, waarin ik de resultaten van Bellati en Finazzi [1]) bij niet-oudgeworden kiezelzuur weergegeven heb (temperatuur 12°—20° C.). Deze zorgvuldig verrichte onderzoekingen zijn ongelukkigerwijze tot nu toe aan de aandacht der schrijvers van de boeken over

---

[1]) M. Bellati en L. Finazzi, Atti d. R. Instituto Veneto, Serie VIII, Tomo **4**, p. 518.

kolloïdchemie ontgaan, en hebben daardoor niet de beteekenis gekregen, die zij verdienen. De curve vertoont typisch hetzelfde beloop als de door mij voor kool gevondene; het begin als de curve voor een mengwarmte, het bijna rechtlijnige middenstuk, het einde in een curve met de concaviteit naar onderen. Jammer genoeg hebben wij geen reden te gelooven, dat het kiezelzuur, dat BELLATI en FINAZZI onderzochten, precies dezelfde constanten bezit als dat, waaraan VAN BEMMELEN en ANDERSON hunne dampspanningsbepalingen uitgevoerd hebben, daar de eigenschappen sterk van de bereiding afhangen. Bij de boven beschreven proeven met kool is dit *wel* het geval.

Wij hebben dus hier bij de opneming van waterdamp door kool met een stelsel te doen, waarvan de isotherme en de curve der sorptie-warmten geheel overeenstemmen met dezelfde curven bij die kiezelzuur-gelen, welke een zoogenaamden „omslag" vertoonen.

Bij kiezelzuur is het zeer waarschijnlijk, dat in het vlakke stuk zeer fijne kapillairen zich met water vullen; want opneming van water doet de opake stof weer doorzichtig worden. ZSIGMONDY en ANDERSON [1]) wezen erop, dat men uit de dampspanning van het water in het vlakke stuk den radius dezer fijne kapillairen berekenen kan; zij kwamen daarbij tot waarden van de grootte-orde 1.3×10^{-6} mM. voor het begin, en 2.6×10^{-6} mM. voor het einde van het vlakke stuk. En zij toonden verder aan, dat als men hetzelfde kiezelzuurgel in een alkohol- of benzol-gel overvoert en uit de dampspanning van den alkohol of het benzol den radius der kapillairen berekent, men voor dien radius getallen van dezelfde grootte krijgt als bij water. Dit spreekt zeer sterk voor de opvatting, dat het vlakke middenstuk op de vulling van gaandeweg iets wijder wordende kapillairen berust, dus op mikroporositeit.

PATRICK [2]) herhaalde deze proeven met vloeibaar koolzuur en vloeibaar zwaveldioxyde bij kiezelzuurgel. Hij vond toen echter veel minder goede overeenstemming voor de grootte der kapillairen; hij trachtte dit te verklaren door de grootere dikte der kapillaire laag dicht bij het kritische punt.

BACHMANN,[3]) in ZSIGMONDY's laboratorium werkend, verklaarde ook het vlakke middenstuk in de isotherme van kool en water door een stelsel van zulke fijne kapillairen. Daar de stof opaak is, laat zich niet vaststellen of deze eigenschap in het middenstuk sterker wordt.

---

[1]) Zeitschr. f. physikal. Chemie, 88, p. 191 (1914); ZSIGMONDY, Lehrbuch der Kolloidchemie, 4e druk, p. 219—234.

[2]) PATRICK, Diss. Göttingen, 1914.

[3]) BACHMANN, loc. cit.

Mijne proeven voeren dan tot de volgende getallen voor dezen radius:

$i_1 = 0.157$ (begin van het vlakke stuk)	$h_1 = 0.410$	$r_1 = 1.24 \times 10^{-6}$ mM.
$i_2 = 0.362$	$h_2 = 0.517$	$r_2 = 1.67 \times 10^{-6}$ mM.
$i_3 = 0.491$	$h_3 = 0.596$	$r_3 = 2.13 \times 10^{-6}$ mM.
$i_4 = 0.57$ (einde van het vlakke stuk)	$h_4 = 0.65$	$r_4 = 2.57 \times 10^{-6}$ mM.

De gevonden waarden voor den radius der mikrokapillairen stemmen zoo sterk overeen in grootte-orde met de getallen van ZSIGMONDY en ANDERSON en met die van BACHMANN, dat men zich verwonderen moet, telkens weer *deze* grootte-orde aan te treffen. (Het tweede stelsel kapillairen, dat BACHMANN uit zijne curven meent te mogen afleiden, schijnt mij dubieus).

De overeenstemming in den vorm der curven voor de sorptie-warmten met hun typisch afgeplatte stuk bevestigt, dat het vlakke stuk der isotherme bij kool en bij kiezelzuur dezelfde oorzaak heeft.

Des te opvallender is het onder deze omstandigheden, dat BERL en ANDRESS gevonden hebben, dat dezelfde kool, die met water een vlak middenstuk in de isotherme geeft, *met organische vloeistoffen* (zooals benzol of methylalkohol) *een curve zonder eenig vlak middenstuk geeft*, en met een veel langer horizontaal beginstuk (voor kleine 1). Deze proeven leveren, als haar juistheid bevestigd wordt, het bewijs, dat de verklaring van ZSIGMONDY, ten minste voor kool, niet de juiste kan wezen. Ik ben daarom ermee bezig deze proeven te herhalen en ook de curven der sorptie-warmten te bepalen.

Schiet de verklaring van ZSIGMONDY voor het vlakke stuk in de isotherme en voor het afgeplatte stuk bij de sorptie-warmten te kort, dan ligt het — dunkt mij — voor de hand, den afwijkenden vorm der isotherme van water in verband te brengen met het feit, dat *water vaste lichamen, zooals kool, veel moeilijker bevochtigt dan organische vloeistoffen,* zooals benzol of methylalkohol doen. Wij zouden dan bij water en kool te doen hebben met oppervlakte-adsorptie aan een oppervlak, dat moeilijk bevochtigd wordt, een verschijnsel waarvan tot nu toe slechts één voorbeeld eeniger mate uitgewerkt is [1]), nl. de adsorptie van waterdamp aan te voren scherp gedroogde glaswol, welke TROUTON onderzocht heeft [2]). De glaswol was door

[1]) FREUNDLICH, Kapillarchemie, 2e druk, p. 223. Wellicht is ook hier vaste oplossing in de grenslaag als complicatie aanwezig.

[2]) FREUNDLICH, loc cit.

drogen bij 162° boven phosphorpentoxyde voorbehandeld en gaf nu een isotherme met een vlak middenstuk (wellicht zelfs met een zwak retrograde stuk), welke een groote analogie vertoont met den vorm der isotherme voor water aan kool. Was de glaswol te voren goed bevochtigd geweest, dan gaf zij een S-vorm, zooals die bij mengsels van zwavelzuur en water en bij opzwelbare lichamen met water als imbibitie-vloeistof gevonden zijn; karakteristiek is daar het begin met een sterk uitgesproken horizontaal stuk voor kleine i, in welk gebied de adsorptie-formule van FREUNDLICH geldt. Dergelijke curven vonden nu BERL en ANDRESS voor de adsorptie van die vloeistoffen, welke de kool goed bevochtigen.

Deze opvatting zou ook verklaren kunnen, waarom de adsorptie aan kool van water zoo sterke hysterese vertoont, terwijl die van organische dampen zonder hysterese schijnt te verloopen. Mogelijkerwijze is daarbij echter ook vaste oplossing in de grenslagen in het spel [1]).

De proeven worden voortgezet.

5. *Conclusies.*

1. Bij het onderzoek van sorptie-verschijnselen is het onvoldoende de bindings-isotherme te bepalen; men moet te gelijkertijd aan *hetzelfde* materiaal de sorptie-warmte als functie van de hoeveelheid opgenomen stof bepalen.

2. De onderzochte dierlijke kool bleek een isotherme te bezitten met een nagenoeg vlak middenstuk, analoog aan de isotherme van niet-oud-geworden kiezelzuur. De sorptie-warmte had een daarmee overeenstemmend beloop, een afgeplat middenstuk.

3. Door aan te nemen, dat dit beloop verklaard wordt door een stelsel van mikrokapillairen, bereken ik uit de isotherme den radius dezer kapillairen (evenals bij kiezelzuur) op 1.2 à 2.6 $\mu\mu$. Dat deze grootte zoo nauwkeurig met die bij kiezelzuur overeenstemt, is eenigermate vreemdsoortig en opvallend.

4. Het is echter twijfelachtig of deze verklaring door het aannemen van een stelsel van mikrokapillairen juist is. Waarschijnlijk lijkt mij dat de moeilijke bevochtiging der kool door water de verklaring levert.

5. Opvallend is de sterke hysterese in de isotherme. [2])

---

[1]) Bij het zoeken naar mogelijke verklaringen voor het afwijkend gedrag van *water* aan kool werd mij veel klaar in gesprekken met Dr. M. POLANYI.

[2]) Op de gecompliceerde resultaten van B. GUSTAVER (Kolloidchem, Beihefte, 1922) en op de proeven van HÄLLSTRÖNO (Diss. Helsingfors, 1920) kom ik in een volgend stuk terug. Om deze mededeeling kort te houden, beperk ik er mij thans toe ze te vermelden.

Natuurkunde. — G. Breit: „*Transients of magnetic field in supraconductors.*"

(Aangeboden door de Heeren H. A. Lorentz en P. Ehrenfest).

(Deze mededeeling zal worden opgenomen in „Proceedings" Vol. XXVI).

Voor de boekerij der Akademie biedt de Heer E. D. Wiersma, namens den Heer Dirk Wiersma, ten geschenke aan een ex. van diens dissertatie: „*Over de psychologie van dementia praecox. Een histories, krieties en experimenteel onderzoek.*"

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 29 SEPTEMBER 1923.

DEEL XXXII.

N°. 7.

Waarn^d. Voorzitter: de Heer A. F. HOLLEMAN.

Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Wegens uitlandigheid van den Voorzitter, den Heer F. A. F. C. WENT, wordt het Voorzitterschap waargenomen door den Onder-Voorzitter, den Heer A. F. HOLLEMAN.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

De Voorzitter verwelkomt Prof. A. EINSTEIN uit Berlijn en Prof. A. S. EDDINGTON uit Cambridge (Eng.) die, de eerste als buitenlandsch lid, de tweede als gast, de vergadering bijwonen.

Ingekomen zijn:

1°. Mededeelingen van de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES, dat zij den 70 jarigen leeftijd hebben bereikt en mitsdien tot de rustende leden overgaan.

Naar aanleiding hiervan richt de Voorzitter zich allereerst tot den Heer LORENTZ en zegt:

Hooggeachte collega Lorentz,

Op 18 Juli ll. toen gij Uw 70sten verjaardag in Uw familiekring vierdet, hebt gij aan collega BOLK en mij wel permissie gegeven om U namens de Akademie te komen gelukwenschen maar met het vriendelijk verzoek, dat er geen toespraak zou worden gehouden. Wij hebben ons natuurlijk daaraan gehouden; maar thans mag ik toch zeker wel aan U, die zoo lange jaren Voorzitter waart, zeggen hoezeer de Akademieleden er zich in verheugen U met nog onverzwakte geestkracht in hun midden te zien. Namens hen spreek ik den innigen wensch uit, dat dit nog menig jaar zoo mag blijven. Meer dan 40 jaar heeft de Akademie het voorrecht gehad U onder hare leden te tellen. Moge het haar gegeven zijn, U over eenige jaren met Uw 50-jarig lidmaatschap geluk te wenschen, kan het zijn, met dezelfde frischheid van geest en hart, die wij heden in U bewonderen en zoo hoogelijk waardeeren.

Hierna vervolgt de Voorzitter:

Het toeval wil, dat ook nog een ander onzer physische leden dezer dagen den 70-jarigen leeftijd heeft bereikt en dus tot de rustende leden is overgegaan. Zooals U bekend is, is het geen gebruik, dat de Akademie bij dergelijke herinneringsdagen door haar Bestuur zich doet vertegenwoordigen, behalve bij oud-Bestuursleden. Maar zeker stemt gij allen met mij in, als ik hier collega ONNES onze hartelijke gelukwenschen aanbied met het feit, dat ook hij in onverminderden arbeidslust dezen dag heeft mogen beleven. Ook collega ONNES is reeds 40 jaren lid dezer Akademie geweest en ik herhaal namens U allen mijn wensch, dat het ook hem moge gegeven zijn,

zijn 50-jarig lidmaatschap onzer Afdeeling in het volle bezit zijner geestvermogens te mogen vieren.

2°. Voorts is ingekomen een schrijven van den Heer C. U. Ariëns Kappers dd. 8 Augustus j.l. mededeelende, dat hij door verblijf buitenslands de vergaderingen gedurende dit jaar niet zal kunnen bijwonen.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 6 Juli j.l. N°. 3231, Afd. K. W. houdende mededeeling dat aan den Directeur van het Herseninstituut buitenlandsch verlof is verleend tot 10 Juni 1924.

Voor kennisgeving aangenomen.

4°. Mededeeling van het Uitvoerend comité van het Zoölogisch Insulinde-fonds, dat het een bedrag van *f* 400.— ter beschikking wenscht te stellen van de Nederlandsche Entomologische Vereeniging, met verzoek dat de vergadering der Afdeeling deze beschikking bekrachtige.

Op voorstel van den Voorzitter besluit de vergadering het voorstel van het Comité aan te nemen.

5°. Schrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 13 September 1923 N°. 4096 Afd. K. W., ter begeleiding van een afschrift eener ministeriëele beschikking, waarbij de Wetenschappelijke Advies-commissie wordt benoemd, en waarin de Minister zich bereid verklaart de Commissie te installeeren in de 2e helft van September. Aan den Minister is bereids verzocht deze installatie te willen uitstellen tot na terugkeer van den heer Went.

6°. Kantschrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 28 Augustus j.l. N°. 3577, Afd. K. W. ter begeleiding van een van het Ministerie van Buitenlandsche Zaken ontvangen afschrift eener mededeeling, dat de 13e „London Medical Exhibition" van 1 tot 5 October a.s. gehouden zal worden.

Ter kennisneming aan de leden medegedeeld.

7°. Spoedschrijven van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 30 Augustus j.l. N°. 3992, Afd. K. W. met verzoek om bericht en raad inzake een af te vaardigen Regeeringsvertegenwoordiger naar het van 7—14 October e.k. te Rome te houden Congres voor vergelijkende Pathologie, met een

8°. daarop gevolgd schrijven van genoemden Minister dd. 12 Sep-

tember ll. N°. 4062, Afd. K. W., dat hij Prof. Dr. D. A. DE JONG te Leiden tot regeeringsvertegenwoordiger, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, ter benoeming zal voordragen.

9°. Apostille van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 30 Augustus ll. N°. 3773 Afd. K.W. ter begeleiding van een door tusschenkomst van den Minister van Buitenlandsche Zaken ontvangen afschrift van een tot Hr. Ms. Gezant te Londen gericht schrijven der ,,Trustees" van het ,,Ramsay Memorial Fund", inzake toelage aan Dr. VAN DUIN. Deze stukken zijn gesteld in handen der desbetreffende Nederlandsche Commissie ter fine van prae-advies. Namens de Commissie brengt nu de Heer KAMERLINGH ONNES advies uit (zie blz. 699). Dit advies waarmede de vergadering zich vereenigt zal ter kennis van den Minister worden gebracht.

10°. Schrijven van den Minister van Waterstaat dd. 27 September ll. N°. 303, Afd. Waterstaat, houdende verzoek hem een voordracht te willen doen toekomen van drie personen, ten einde daaruit eene keuze te doen voor de benoeming van een lid van de Commissie van Toezicht op den Geologischen dienst in eene te verwachten vacature, die ontstaan zal wegens het door Prof. Dr. G. A. F. MOLENGRAAFF aangevraagd eervol ontslag. Op voorstel van het Bestuur wordt besloten aan den Minister het volgende drietal voor te dragen:
1. Prof. Dr. EUG. DUBOIS te Haarlem; 2. Prof. Dr. L. RUTTEN te Utrecht; 3. Prof. Dr. J. F. VAN BEMMELEN te Groningen.

Hierna geeft de Voorzitter het woord aan den Heer J. VAN WIJHE tot het doen eener mededeeling over: ,,Thymus, Spiraculair zintuig, Fenestra vestibuli en andere organen bij een 63 m.M. lang embryo van Heptanchus cinereus".

Vervolgens doet de Heer L. BOLK eene mededeeling over ,,De Menarche bij de Nederlandsche vrouw, en de vervroeging ervan bij de jongste generatie". Naar aanleiding hiervan stellen de Heeren HERTZSPRUNG en BLAAUW eenige vragen, welke door den spreker worden beantwoord.

Ten slotte doet de Heer J. VAN DER HOEVE eene mededeeling, mede namens den Heer FLIERINGA, over: ,,Bepaling van de kracht van de accommodatiespier", naar aanleiding waarvan de Heeren EHRENFEST, JULIUS en BOEKE eenige inlichtingen vragen, welke door den spreker worden gegeven.

Groningen
Leiden } September 1923
Utrecht

Aan het Bestuur van de Afdeeling Natuurkunde van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen

Wij hebben de eer het Bestuur te adviseeren aan de Regeering te schrijven:

Dat naar de meening van de Afdeeling de welwillendheid van de Trustees van het „Ramsay Memorial Fund" ten zeerste te waardeeren is en dat de Afdeeling de Regeering verzoekt wel haar instemming te willen betuigen met de opvatting, dat de Heer VAN DUIN houder van het „fellowship" blijft en de uitkeering, aan dat „fellowship" verbonden, blijft ontvangen ook gedurende den tijd van zijne ziekte en onafhankelijk daarvan of hij ter genezing in Engeland of in Holland verblijft, alsmede met het voornemen der „Trustees" hem alvast het door hen bedoeld bedrag ad circa 42 p. st. uit te keeren, alleen met dien verstande, dat het gezamenlijk aan Dr. VAN DUIN uit te keeren bedrag ten laste van het Nederlandsch „fellowship" de voor hem uitgetrokken *expensegrant* voor twee jaren fellowship", samen ad 600 p. st. niet overschrijdt.

H. KAMERLINGH ONNES
ERNST COHEN
F. M. JAEGER
F. A. H. SCHREINEMAKERS

Plantkunde. — TH. WEEVERS: „*Ringwondproeven met bonte takken.*"

(Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en J. C. SCHOUTE).

Het vraagstuk van het transport der koolhydraten en eiwitten in de plant, dat langen tijd vrijwel opgelost scheen, is in de laatste jaren weer actueel geworden.

De bekende ringwondproeven vooral de uitgebreide waarnemingen van J. HANSTEIN[1]) op dit gebied hadden geleid tot de opvatting, dat dit transport geschiedde langs de elementen van het phloeem. Daarbij liet men nog in 't midden of de elementen van het cribrale systeem (zeefvaten en geleidende cellen), dan wel die van het parenchymatische phloeemsysteem (cambiformcellen) de hoofdrol zouden spelen. CZAPEK[2]) had getracht aan te toonen, dat de beslissing ten gunste van de zeefvaten moest uitvallen, maar de lijnrecht tegenovergestelde conclusies van DELEANO[3]) maakten, dat eene beslissing in deze nog niet mogelijk was.

Het primair en secundair phloeem werd echter algemeen beschouwd als de weg voor den sapstroom der organische producten, die in de blaren gevormd, naar de vegetatiepunten en reserve-organen moeten vervoerd.

Op 't voetspoor van TH. HARTIG[4]) was 't echter de gangbare opvatting geworden, dat in 't voorjaar bij het uitloopen der houtige gewassen dit transport der organische stoffen van de reserveplaatsen naar de uitloopende deelen zou gaan door 't xyleem. Dit laatste berustte ten deele op de resultaten van HARTIG's ringwondproeven, ten deele op A. FISCHER's[5]) waarnemingen aangaande het voorkomen van koolhydraten in de houtvaten. Hoe de toedracht bij de uitloopende kruidachtige planten zou zijn, liet men gewoonlijk in 't midden.

Van verschillende kanten ondervindt nu 't bovenstaande in de laatste jaren bestrijding.

---

1) J. HANSTEIN, Jahrb. f. Wiss. Botanik, 1860.

2) CZAPEK, Jahrb. f. Wiss. Botanik, 1897.

3) N. DELEANO, Jahrb. f. Wiss. Botanik, 1911.

4) TH. HARTIG, Bot. Ztg., 1858.

5) A. FISCHER, Jahrb. f. Wiss. Botanik, 1890.

Eenerzijds is 't OTIS CURTIS [1]), die door zijn enkele en dubbele ringwondproeven tot de conclusie komt, dat het transport der koolhydraten en eiwitten naar de ontspruitende deelen evengoed door 't secundair phloeem gaat, als dat transport in omgekeerde richting, wanneer de deelen hun overmaat aan assimilaten gaan afvoeren. Zijne meening wordt echter m. i. nog niet voldoende gesteund door 't onmisbare quantitatieve onderzoek.

Anderzijds zijn 't in Engeland ATKINS [2]) en DIXON [3]), in Duitschland LUISE BIRCH HIRSCHFELD [4]), die de beteekenis van het phloeem voor 't stofvervoer nagenoeg geheel ontkennen. Hun argumenten zijn grootendeels indirecte bewijsgronden. ATKINS wijst op 't feit, dat de bloedingssappen niet alleen in 't voorjaar, maar ook in andere jaargetijden meer of minder rijk aan koolhydraten zijn, LUISE BIRCH HIRSCHFELD en later DIXON ontleenen hun sterkste argumenten aan de moeilijkheid om een voldoend stoftransport langs 't phloeem aannemelijk te maken. Deze laatste moeilijkheid is niet nieuw, reeds vroeger heeft HUGO DE VRIES [5]) in 't aannemen van protoplasmastroomingen in de phloeemelementen een middel gezien om een sneller transport, dan volgens de wet der diffusie mogelijk is, begrijpelijk te maken. Nu echter ziet DIXON in de ondenkbaarheid van een transport van voldoende capaciteit een overtuigende bewijsreden om aan 't phloeem alle beteekenis in dit opzicht te ontzeggen. BIRCH HIRSCHFELD spreekt zich minder positief uit.

Dat naast en gelijktijdig met een opstijgenden stroom in 't hout ook een transport hierlangs in basale richting mogelijk is, kan men afleiden uit verschillende onderzoekingen o.a. de bovengenoemde van L. BIRCH HIRSCHFELD. De snelheid van 't transport kan dan veel grooter zijn dan in 't phloeem en de capaciteit der geleidende banen eveneens. Immers de phloeemproductie van 't cambium is steeds geringer dan die van 't xyleem, terwijl 't gevormde phloeem door obliteratie veel sneller buiten gebruik wordt gesteld.

De moeilijkheid bij deze opvatting van DIXON is echter, hoe hiermee te rijmen valt het resultaat der ringwondproeven van HANSTEIN, dat zoo duidelijk wijst op eene onderbreking van het transport der assimilaten, zoodra de ringwond tot aan 't cambium gaat. DIXON neemt daarom aan, dat het vervoer zou gaan door de jongste deelen van 't secundair xyleem, die vlak bij 't cambium

---

[1]) OTIS F. CURTIS, American Journal of Botany, 1920.

[2]) W. R. G. ATKINS, Some recent researches in Plant Physiology, 1916.

[3]) H. H. DIXON, Pres. Address. Bot. Society, 1922.

[4]) L. BIRCH HIRSCHFELD, Jahrb. f. wiss. Botanik, 1920.

[5]) HUGO DE VRIES, Bot. Ztg., 1885.

gelegen, door een ringwond zouden worden beschadigd en buiten werking gesteld.

De juistheid van deze onderstelling is voor zoover mij bekend, nog niet door DIXON aan de waarneming getoetst, zoodat het wenschelijk schijnt, de vraag, waarlangs het transport der koolhydraten en eiwitten in de plant plaats grijpt, opnieuw onder de oogen te zien.

Het vraagstuk kan op verschillende wijzen aangevat worden; hier bij deze mededeeling, wil ik mij in hoofdzaak bepalen tot de bespreking van eenige proeven met geringwonde takken van bonte planten.

Dergelijke proeven zijn met groene planten herhaaldelijk gedaan maar dan treedt na 't uitloopen der knoppen 't bezwaar op, dat de jonge deelen boven de ringwond gaan assimileeren.

Het wegnemen der blaren of 't in het donker plaatsen brengt andere moeilijkheden met zich mee; bij bonte loten is het constateeren van eventueelen toevoer van organische stoffen veel eenvoudiger.

Rekening houdende met DIXON's hypothese, is 't noodig zoo voorzichtig mogelijk te werk te gaan bij 't maken van de ringwond en 't bedekken van de wondvlakte. Beter dan eene afsluiting met paraffine scheen mij toe eene bedekking met cacaoboter, die gesmolten, bij een temperatuur van 32° à 33° C. op de wondvlakte gebracht werd. Door haar temperatuur kan deze moeilijk schade veroorzaken, zij dringt niet in de intacte cellen binnen [1]), terwijl zij spoedig stolt en dan voldoende afsluiting geeft. De deelen werden dan tegen directe zonbestraling beschermd om 't smelten te voorkomen.

De proeven werden uitgevoerd met zuiver geelbonte takken van Aesculus hippocastanum L en Acer Negundo L. De eerste behoorden tot een zwaar exemplaar, waarvan de groene kruin den stam rijkelijk met voedsel voorzag en talrijke geelbonte loten zich uit den hoofdstam ontwikkelden. Deze bereikten in ± 20 jaar eene lengte van 1 M. en eene dikte van 7—8 mM. diameter. Het exemplaar van Acer Negundo had een kroon met groen-wit-bont gevlekte blaren en ontwikkelde uit hoofdstam en zijtakken volkomen wit-bonte loten. Bij beide exemplaren bevatten de blaren absoluut geen chlorophyl en was blijkens de jodiumproef zetmeel afwezig.

Bij de proeven in 't voorjaar werden de takken geringd (1 à 2 cM.) vlak voor 't ontplooien van de knoppen en op een afstand van 1 à 2 dM. onder den eindknop.

Steeds werden tegelijk drie seriën proeven gedaan.

1ste serie: groene loten volledig geringwond,

---

[1]) R. H. SCHMIDT, Flora Bd. 74, 1891.

2[de] serie: bonte loten volledig geringwond,

3[de] serie: bonte loten onvolledig geringwond, n.l. zóó, dat er een streep bast overbleef als verbinding, die 2 à 4 mM. breed was. Na ruim een week vertoonde zich eene tegenstelling tusschen de groene en de onvolledig geringwonde bonte loten eenerzijds en de volledig geringwonde bonte anderzijds. De beide eerste zetten hunne ontwikkeling normaal voort, de laatste bleven achter en waren na 3 à 4 weken afgestorven, terwijl vóór dit afsterven de blaren verschrompelden en verdroogden.



Fig. 1.

Dat 't ringwonden op zichzelf geen nadeel toebracht, bleek duidelijk uit de resultaten der 1[ste] en 3[de] serie. Zie de foto's: van links af staan 4 volledig geringwonde bonte, sommige bruin en afgestorven, andere klein maar nog levend, dan 2 geringwonde groene en rechts 2 onvolledig geringwonde, de laatste 4 normaal uitgegroeid.

De watertoevoer is bij de volledig geringwonde groene loot klaarblijkelijk normaal; waarom sterft dan de volledig geringwonde bonte tak af onder verschijnselen, die op watergebrek wijzen?

De verklaring ligt voor de hand, dat de weefsels van de volledig geringwonde takken te geringe zuigkracht kunnen ontwikkelen, door te lagen osmotischen druk, in vergelijking met de andere deelen.

De onderzoekingen van Dixon en Atkins[1]) over de bepaling van

[1]) Notes Botanical School. Trinity College Dublin, 1912.

den osmotischen druk door middel van de vriespuntverlaging van 't uitgeperste sap toonen duidelijk, hoe met de mogelijkheid van assimilatie de osmotische waarde der bladcellen stijgt.

Ik trachtte hier met de door URSPRUNG[1]) aangegeven methode de zuigkracht te bepalen, maar 't object bleek moeilijkheden te bieden.

Quantitatieve bepaling gaf in de groene blaren van Aesculus een gehalte aan reduceerende suikers van 3 % [2]), in de bonte 1 %, in de geringwonde bonte slechts sporen. In 't algemeen is ook 't gehalte der met water uittrekbare zouten gering, in groene en bonte blaren 0.9 % van 't versche gewicht. [3]) SPRECHER vindt in geelbonte varieteiten lager osmotische waarden voor 't celvocht dan in de groene [4]).

Wel bevatten de bonte blaren der geringwonde takken bij Aesculus 18 à 20 % eiwit en 5 % dextrinen (op drooggewicht berekend) maar deze dragen niet noemenswaard bij tot verhooging van den osmotischen druk. Toch is daarmede niet alles verklaard, want in de bonte volledig geringde loten bleek bij 't verschrompelen der blaren hout en bast boven de ringwond nog vrijveel zetmeel te bevatten. (6 % van 't droog gewicht, tegenover 9 % in de onvolledig geringwonde [4])).

Waarom dit zetmeel niet in suiker wordt omgezet en naar de blaren vervoerd den osmotischen druk verhoogt, blijft onopgehelderd. Hoe dit ook zij, de onvolledig geringwonde bonte takken sterven niet af, daar is dus de toevoer niet afgesneden en worden zoodoende de jonge deelen voorzien van de stoffen, die in de groene geringwonde takken door de assimilatie worden geproduceerd.

Volgens de opvatting van HANSTEIN laat zich dit verklaren doordat de brug van bast dient als weg, waarlangs het vervoer der organische producten gaat, maar dan moet men ook de hypothese van HARTIG, betreffende een vervoer langs 't xyleem tijdens de knopontplooiïng laten varen.

OTIS CURTIS l. c. doet dit ook en beschouwt 't phloeem als de uitsluitende transportbaan, op grond van zijn ringwondproeven. Tegen CURTIS' proeven zou echter van DIXON's standpunt 't bezwaar

[1]) URSPRUNG, Ber. d. d. Bot. Ges., 1918.

[2]) Eigenlijk 2 % en 1 % reduceerende suiker, afkomstig van glukosieden (berekend op drooggewicht).

[3]) De zetmeelbepalingen geschiedden door 't fijn gepoederde materiaal met water 3 uur in autoclaaf te brengen bij 4 atmosf. en dan 't waterig extract een uur te koken met verdund zoutzuur.

Tegen plasmolyse proeven geldt 't bezwaar, dat de osmotische druk in de verschillende cellen zoo ongelijk is, echter plasmolyseert een 10 % saccharose oplossing de bonte Aesculus blaren wel en de groene niet.

[4]) A. SPRECHER. Rev. Gen. Bot. 1921.

gemaakt kunnen worden, dat de perifere houtlagen beschadigd werden en de ringwond dus indirect de transportbaan langs 't perifere xyleem buiten werking gesteld had. Bij bovenstaande proeven met afsluiting door cacaoboter kan dit bezwaar moeilijker te berde gebracht worden, maar bovendien werd nog een andere serie ringwondproeven gedaan.



Fig. 2.

Daarbij werd het ringwonden zooveel mogelijk aseptisch uitgevoerd door de takschors eerst met alcohol van 96 °/₀ af te wasschen, en dan aseptisch af te schillen tot op 't cambium. Vervolgens werd de wondvlakte bedekt met steriele, met water verzadigde Brunnsche watten en deze omsloten met gewaste taf.

Deze proeven werden naast andere op de eerstbeschreven manier, uitgevoerd half Juni en gaven na vier weken een duidelijk resultaat in verband met de vorming van St. Jansloof, die vooral bij Aesculus zeer sterk was.

Bij de normale bonte loten trad de vorming van 't St. Jansloof op aan den top van den tak en teekenden de gele jonge blaren zich duidelijk af tegen de andere, die door den sterken wind en felle zon waren gebruind en beschadigd. (Zie foto).

Ook hier bleek dus, dat de bonte blaren lijden aan gebrek aan zuigkracht en onder omstandigheden, waarin sterker verdamping

optreedt eerder te gronde gaan dan de groene, hoewel de laatste relatief sterker verdampen.

Bij de onvolledig geringwonde bonte loten trad de St. Jansloofvorming eveneens aan den top, bij de volledig geringwonde bonte echter *onder* de ringwond op, uit zijknoppen of slapende oogen. (Zie foto) Evengoed gebeurde dit bij de behandeling van de ringwondvlakte met cacaoboter als bij de tweede methode met waterverband.

Het stofvervoer is klaarblijkelijk bij Aesculus evenzeer belemmerd als bij Acer Negundo, hoe voorzichtig men de ringwond ook aanbrengt en de proeven geven dus absoluut geen resultaat, dat tot steun van Dixon's theorie zou kunnen dienen, eerder spreken zij er tegen.

Een streng bewijs van de onjuistheid van Dixon's theorie valt echter op deze wijze niet te leveren, daar altijd aangevoerd kan worden, dat ondanks alle voorzorgen toch met en door 't ringwonden 't perifere hout buiten functie gesteld wordt voor zoover 't vervoer der organische producten betreft.

Wanneer wij nu evenwel nagaan of er niet andere waarnemingen zijn, die beslist tegen Dixon's theorie pleiten, dan ligt 't voor de hand te denken aan de proeven van Hanstein l.c. over de wortelvorming bij geringwonde en in water geplaatste takken.

Hanstein vindt, dat bij afgesneden en in water geplaatste takken de wortelvorming 't sterkste optreedt aan 't basale eind, wat Vöchting met de polariteit der deelen in verband gebracht heeft. Door het maken van een ringwond ontstaan bij bladerlooze takken de wortels in sterke mate juist boven de ringwond; óf en hoe sterk zij zich zullen vormen aan 't ondereind van den tak, hangt af van den afstand, waarop die ringwond van het ondereinde is aangebracht.

Hanstein verklaarde dit door onderbreking van 't voedseltransport, tengevolge van 't wegnemen van het phloeem en constateerde dan ook een duidelijk verschil in wortelvorming onder dergelijke omstandigheden tusschen dicotyle planten, met gewonen stengelbouw, waar de diktegroei opgetreden is in een kring van collaterale vaatbundels en die met afwijkenden bouw. Bij de laatste, waar zooals bij Piperaceeën en Nyctaginaceeën vaatbundels zich binnen 't secundaire xyleem bevinden of waar, zooals bij Apocynaceeën en enkele Solanaceeën er oorspronkelijk bicollaterale vaatbundels of beter mergstandige phloeemstrengen zijn en dus ook binnen 't secundaire xyleem phloeem bestaan blijft, daar zou door de ringwond het transport der koolhydraten en eiwitten slechts ten deele onderbroken worden. Inderdaad constateerde Hanstein dan slechts een zeer geringen invloed van de ringwond op de wortelvorming.

Het is duidelijk, dat dit volgens DIXON's opvatting niet te verklaren is; indien 't transport langs de perifere deelen van 't xyleem gaat, moet een ringwond bij deze planten dezelfde resultaten hebben en 't scheen mij daarom de moeite waard enkele van HANSTEIN's proeven te herhalen. De Solanacee Cestrum aurantiacum bleek geen geschikt object, daar afgesneden takken slecht in water wortel schoten, maar de Apocynacee Nerium Oleander gaf uitstekende resultaten: alle twaalf stekken gaven een beeld, dat met de beschrijving van HANSTEIN volkomen overeenstemt. De wortelvorming is boven de ringwond wel iets sterker, maar 't gedrag is totaal anders dan bijv. bij Salix en Cornus spec, waar de wortels nagenoeg uitsluitend boven de ringwond komen, tenzij 't stengelstuk eronder bijzonder groot is, en waar zelfs de eens gevormde wortels te gronde gaan, indien er boven een ringwond gemaakt wordt.

Dit alles spreekt dus voorloopig sterk tegen de juistheid van DIXON's opvatting aangaande een transport der koolhydraten en eiwitten langs 't perifere xyleem.

Konden ringwondproeven als de eerstbesprokene bij bonte loten ook met bonte Oleanders gedaan worden, dan zou men door 't mergstandige phloeem van de laatste een geheel ander resultaat mogen verwachten, dan bij Aesculus en Acer. Jammer genoeg kon ik niet over bonte Oleanders beschikken en beproefde 't nu met geringwonde normale loten, die aan de plant zittend door zwart papier omhuld worden. Het resultaat was echter om reeds genoemde redenen niet zoo duidelijk, na zeven weken waren enkele blaren afgevallen, de loten zelf echter levend en zelfs in lengte toegenomen.

Niet alleen bij de wortelvorming van in water geplaatste takken, maar ook bij de knopontplooiïng en groei van Aesculus en Acer Negundo in 't voorjaar wijzen dus de resultaten der ringwondproeven op een transport langs 't phloeem.

Op de vraag, of de capaciteit dezer banen voldoende is, hoop ik later terug te komen, terwijl uit bovenstaande waarnemingen bij Aesculus en Acer Negundo, waar de afgesneden takken niet bloedden, nog geen conclusies getrokken mogen worden voor de gevallen, waar dit in zoo sterke mate geschiedt en zooals bij Betula alba 't direct na de verwonding uittredende vocht sterk suikerhoudend is [1]).

---

[1]) De gevallen door MOLISCH, Bot. Ztg. 1902 als wondreactie met localen bloedingsdruk beschreven, zijn geheel iets anders; dan treedt de bloedingsdruk eerst na dagen of weken op.

Natuurkunde. — P. EHRENFEST. „*Kan de beweging van een systeem met s graden van vrijheid meer dan* (2*s*—1)*-voudig periodiek zijn?*"

Het zij mij geoorloofd, aan een vermoeden uiting te geven dat zich misschien bij geschikte wiskundige scholing onmiddellijk laat weerleggen of bevestigen. Mocht dit vermoeden — eventueel in eenigszins gewijzigden vorm — blijken juist te zijn, dan zou het niet zonder beteekenis voor de quantumtheorie zijn.

Heeft men te maken met een systeem met s graden van vrijheid in de coördinaten $q_1 \ldots \ldots q_s$ met de momenta $p_1 \ldots \ldots p_s$ en de Hamiltoniaansche functie $H(p, q)$ dan komt zijn phasenbaan in de $2s$-dimensionale (q, p)-uitgebreidheid in den loop der beweging in het algemeen zoo dicht als men wil bij alle punten van een ϱ-dimensionaal gebied G_ϱ. Dit G_ϱ is natuurlijk gelegen in het $(2s—1)$-dimensionaal energievlak $H(p, q) = E$. Voor een enkelvoudig periodieke beweging is $\varrho = 1$; daarentegen heeft ϱ zijn grootst mogelijke waarde $(2s—1)$ indien de beweging „quasi-ergodisch"[1]) is.

Wij zullen kortweg van een „G_ϱ-beweging" spreken.

Bij geschikte regulariteit van $H(p, q)$ wordt G_ϱ door de phasenbaan met „gladden streek" doorsponnen en bovendien geldt, dat

---

[1]) L. BOLTZMANN (Sitz. Ber. Wien. Ak. 63. p. 679, 1871 = Abhandl. I, p. 284; J. f. Math. 98, p. 201, 1884 = Abh. III, p. 134) noemde een beweging „*ergodisch*" wanneer ze „*door*" elk punt van het energievlak heenloopt. — P. en T. EHRENFEST (Enc. d. Math. Wiss. Bd. IV Art. 32, „Statistische Mechanik", § 10*a* (1909)) opperden als vermoeden, dat de definitie van ergodische bewegingen een innerlijke tegenspraak bevatte, en duidden met „quasi ergodisch" (l. c. noot 90) dusdanige bewegingen aan, welker phasenbaan *zoo dicht als men wil* komt bij elk punt van het energievlak. Daarbij wezen zij er op, dat er nog geen *onomstootelijk* voorbeeld daarvan bekend was. — A. ROSENTHAL (Ann. d. Ph. 42, p. 796, 1913) en M. PLANCHEREL (ibidem, p. 1061) leverden vervolgens een streng bewijs voor de onmogelijkheid van *ergodische* stelsels. — Onlangs is het den heeren HERGLOTZ en ARTIN gelukt een voorbeeld te construeeren, welks *quasi-ergodischen* aard zij streng konden aantoonen (Korte mededeeling ter Naturforscherversammlung Leipzig 1922. De uitvoerige behandeling zal in deel III van BLASCHKE's Differentialgeometrie uitkomen). — Zie verder: E. FERMI: „Beweis, dasz ein mechanisches Normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch ist", Phys. Zschr. 24 p. 261, 1923. — Voor eenige jaren stelde prof. HERGLOTZ in een gesprek de vraag, of het volgende eenvoudige systeem quasi-ergodische bewegingen bezit: een punt dat volkomen elastisch teruggekaatst wordt tegen de zijden van een onregelmatig-driehoekig billard.

telkens als de phasenbaan weer in de buurt van een bepaald punt P terugkomt, dat reeds vroeger doorloopen werd, de beweging zich ten naaste bij in al haar trekken herhaalt (niet alleen q, p; $\dot{q}, \dot{p}$, maar ook $\ddot{q}, \ddot{p}$, enz.). En wel met des te scherper benadering, hoe dichter en dichter de phasenbaan met toenemenden tijd langs P loopt.

Ons beroepend op dit *„quasi-periodieke"* gedrag formuleeren wij het volgende

„vermoeden $u = \varrho$": Indien bij een G_ϱ-beweging de $q_1 \ldots q_s$; $p_1 \ldots p_s$ als functies van den tijd exact kunnen worden voorgesteld door een u-voudige reeks van FOURIER, dan is $u = \varrho$; zoodat u ten hoogste gelijk is aan $(2s—1)$ voor een quasi-ergodische beweging.

Met andere woorden: de algemeene term van zulk een FOURIER-ontwikkeling

$$\begin{matrix}\cos\\ \cdot\\ \sin\end{matrix}\; 2\pi(\tau_1\omega_1 + \ldots\ldots \tau_u\omega_u)\,t \left\{\begin{matrix}\tau_1 \ldots \tau_u \text{ willekeurige positieve of} \\ \text{negatieve geheele getallen}\end{matrix}\right\} \quad (1)$$

bevat een aantal $u = \varrho \leq 2s—1$ voor de beweging karakteristieke grondfrequenties $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_u$, tusschen welke geen betrekking bestaat van den vorm

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots\ldots k_u\omega_u = 0 \quad (k_1 \ldots k_n: \text{ geheele getallen}) \quad (2)$$

Toelichting. Beschouw een u-dimensionale $(\xi_1 \ldots\ldots \xi_u)$-ruimte en daarin de rechte

$$\xi_1 = \omega_1 t \qquad \xi_2 = \omega_2 t \ldots \xi_u = \omega_u t \quad \ldots \quad (3)$$

Aan elk punt dezer rechte (3) wordt door de FOURIER-reeks een punt der phasenbaan in het G_ϱ van de (q, p)-uitgebreidheid toegevoegd. Verdeel het ξ-gebied in eenheidskubussen. De rechte (3) doorloopt een rij kubussen. Vervang de stukken der rechte in de verschillende kubussen door *homologe* [1]) einden in een enkelen kubus Tengevolge van het ontbreken van betrekkingen van de soort (2) zullen deze — met elkander evenwijdige — einden dien kubus overal dicht opvullen [2]). Deze *„ξ-baan"* komt dus zoo dicht als men wil bij alle punten van een u-dimensionalen kubus, terwijl de phasenbaan zelf zoo dicht als men wil bij alle punten van het ϱ-dimensionale gebied G_ϱ komt. Men moet nu de correspondentie van deze twee gebieden nader beschouwen en daarbij in aanmerking nemen

[1]) Optelling of aftrekking van geheele getallen bij de grootheden (3) laat alle termen (1) in de Fourier-ontwikkeling onveranderd.

[2]) Vgl. b v. O. PERRON, Irrationalzahlen. Leipzig 1921, p. 156, „Inhomogene diophantische Approximationen" en litteratuuropgaven daarbij.

de opmerking aan het eind van § 3 [1]). Mocht het gelukken, op deze wijze aan te toonen, dat de correspondentie is *één-éénduidig* en *cóntinu*, dan ware daarmede het „vermoeden $u = \varrho$" bewezen, aangezien immers, gelijk bekend is, bij *zulke* correspondenties het dimensiegetal niet verandert [2]).

Indien men er in slagen zou inderdaad een systeem aan te geven, welks bewegingen meervoudig periodiek zijn met een periodiciteitsgraad $s < u \leq 2s-1$ dan zou men met de bekende quantiseeringsregels niet toekomen, daar deze immers zich beperken tot $u \leq s$ [3]).

---

[1]) Dat het noodzakelijk is, deze opmerking in acht te nemen, blijkt aan het volgende voorbeeld: Zij $q = cos\, \varphi(t)$, $p = sin\, \varphi(t)$, waarbij $\varphi(t)$ ontwikkelbaar gedacht wordt in een meervoudige Fourier-reeks, met b.v. $u = 3$. Het (q, p)-punt beschrijft dan een gesloten cirkel. Dus is $\rho = 1$ en $u > \rho$. Maar hier is ook te kort gedaan aan de voorwaarde, dat, overeenkomstig de vergelijkingen van HAMILTON, tegelijk met (q, p), ook $(\dot{q}, \dot{p})$, $(\ddot{q}, \ddot{p})$ enz. tot hun beginwaarden moeten terugkeeren.

[2]) L. E. BROUWER, Math. Ann. 70 (1911) p. 161; 71 (1912) p. 305 en 314. 72 (1912) p. 55.

[3]) Een eenigszins verwant „te veel aan frequenties", maar toch van een andere soort, kon — voor een door en door eenvoudig voorbeeld met éénen graad van vrijheid — aan de hand van het correspondentiebeginsel behandeld worden. (Zie P. EHRENFEST en G. BREIT, Versl. Ak. v. Wetenschappen 31, p. 5, 1922 = Z.schr. f. Phys. 9 p. 207, 1922. Vgl. N. BOHR, Z.schr. f. Phys. 13, p. 147, 1923).

Anthropologie. — L. BOLK: *„De Menarche bij de Nederlandsche vrouw en de vervroeging ervan bij de jongste Generatie."*

Met medewerking van eenige artsen heb ik een aantal gegevens verzameld betreffende de menarche bij de Nederlandsche vrouw, waarover tot nu toe nog geene feiten bekend waren. Bij het verzamelen dezer gegevens is de grootst mogelijke nauwkeurigheid in acht genomen, en in deze mededeeling is alleen gebruik gemaakt van zulke, waarbij niet alleen het jaar doch ook de maand der eerste menstruatie was vastgesteld. Bovendien was van elke persoon vermeld de kleur van haren en oogen, omdat ik door dit onderzoek ook wenschte vast te stellen of de graad van pigmentatie van invloed is op het begin der geslachtsrijpheid van het meisje.

Hoewel het verkrijgen van nauwkeurige opgaven niet gemakkelijk is, ben ik er toch in geslaagd om 1800 gegevens van niet joodsche vrouwen te verzamelen, benevens 165 van jodinnen.

De bewerking van dit materiaal heeft tot een paar onverwachte en verrassende uitkomsten geleid. Ik zal deze successievelijk mededeelen, waarbij de gegevens op de jodinnen betrekking hebbend, aan het slot dezer mededeeling afzonderlijk zullen worden bewerkt.

De eerste vraag die met behulp van het verkregen materiaal beantwoord kon worden, gold den leeftijd der menarche bij de Nederlandsche vrouw in 't algemeen. Dat deze leeftijd individueel sterk verschilt is bekend en blijkt ook uit onderstaande Tabel I, waarin

TABEL I.

Ouderdom.	Aantal.	Procent.	Ouderdom.	Aantal.	Procent.
8 jaar	2		16 jaar	121	6.7
9 „	2		17 „	54	3.—
10 „	31	1.7	18 „	25	1.4
11 „	131	7.3	19 „	3	
12 „	302	16.7	20 „	2	
13 „	464	25.7	21 „	2	
14 „	408	22.6	22 „		
15 „	251	13.9	23 „	2	

de absolute getallen en de procentsgewijze verhouding medegedeeld zijn volgens het leeftijdsjaar. In figuur 1 geeft curve *A* het verloop van het procentsgewijze voorkomen in elk der leeftijdsjaren weer.

Uit deze tabel en curve *A* van figuur 1, blijkt dat het begin van

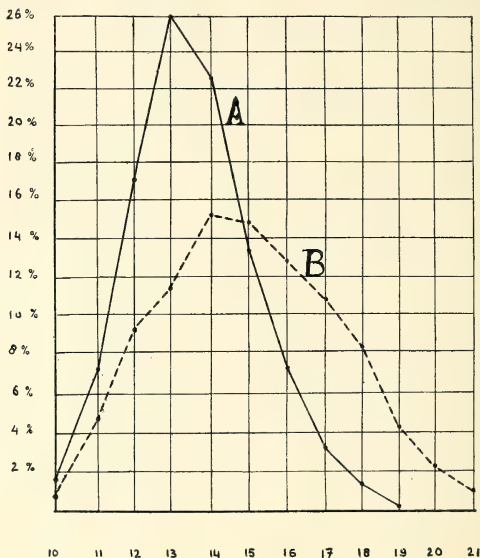


Fig. 1.

de functie der geslachtsklieren schommelt tusschen het 10e en 18e jaar. Wel is waar kwamen vier gevallen voor waarin de menses reeds vóór het 10e jaar verschenen waren, (8 j. 2 m., 8 j. 12 m., 9 j. 4 m. en 9 j. 12 m.) doch deze gevallen sluiten niet regelmatig aan de variabiliteitscurve aan, en zijn wel als abnormale vroegrijpheid te beschouwen.

De variabiliteitskromme der menarche begint als ononderbroken lijn bij den leeftijd van 10 jaar en 4 maanden, om daarna regelmatig te stijgen. Dit stijgen gedurende het 10e en 11e jaar is te zien in Tabel II, waarin het aantal gevallen per maand gedurende deze jaren wordt vermeld. Ik lasch deze tabel in omdat zij aantoont dat inderdaad de vroegste leeftijd waarop de menarche als physiologisch verschijnsel valt, het midden van het 10e jaar is.

Wanneer dus eenmaal het meisje den leeftijd van tien en een half

jaar is gepasseerd, kan men het beginnend menstruatieproces niet meer als een uiting van pathologische vroegrijpheid beschouwen,

TABEL II.

Leeftijd.	Aantal.	Leeftijd.	Aantal.
10 jaar 1 maand	0	11 jaar 1 maand	3
„ „ 2 maanden	0	„ „ 2 maanden	5
„ „ 3 „	0	„ „ 3 „	6
„ „ 4 „	1	„ „ 4 „	7
„ „ 5 „	2	„ „ 5 „	6
„ „ 6 „	3	„ „ 6 „	6
„ „ 7 „	2	„ „ 7 „	9
„ „ 8 „	2	„ „ 8 „	11
„ „ 9 „	3	„ „ 9 „	14
„ „ 10 „	7	„ „ 10 „	19
„ „ 11 „	6	„ „ 11 „	24
„ „ 12 „	6	„ „ 12 „	21

doch hoogstens als van een snelle ontwikkeling der geslachtsklieren.

Het begin der variatiekromme in het midden van het 10[e] jaar is een aanwijzing dat de geslachtsrijpheid bij onze bevolking reeds op betrekkelijk jeugdigen leeftijd beginnen kan, en het verder beloop der kromme bevestigt dit feit. Deze toch stijgt zeer snel om reeds in het 13[e] jaar haar top te bereiken.

De geslachtsrijpheid is vóór den 12-jarigen leeftijd reeds bij 9 °/₀ der meisjes ingetreden, vóór den 13-jarigen leeftijd bij 26 °/₀, en bij meer dan de helft der meisjes vóór het 14[e] jaar. De gemiddelde leeftijd der menarche, berekend met inachtneming ook der maanden, blijkt te zijn 13 *jaar* 9 *maanden en* 15 *dagen*. Wanneer men dit gemiddelde vergelijkt met andere in de literatuur vermeld en op de bevolking van West-Europa betrekking hebbend, dan blijkt dat bij onze huidige bevolking de menarche gemiddeld vroeg begint.

Het beginnen der menses is echter van zoovele uitwendige omstandigheden afhankelijk, dat het trekken van conclusies uit een vergelijking van gemiddelden met de grootste voorzichtigheid moet geschieden.

Als een der inwendige invloeden, die den leeftijd der menarche bepaalt, wordt de rasfactor genoemd. Door sommige schrijvers wordt

deze invloed geheel ontkend, door anderen wordt er een groote beteekenis aan toegekend. Hieruit blijkt reeds hoe moeilijk het is met absolute zekerheid vast te stellen of het ras inderdaad van invloed op de menarche is, daar deze mede onder den invloed van andere — uitwendige — factoren (sociaal milieu, temperatuur, bodemgeaardheid enz.) staat. Mij is dan ook geen onderzoek bekend waarin werkelijk aangetoond is, dat ook het ras van invloed is op het begin der geslachtsrijpheid. Dit was voor mij een aanleiding om bij het verzamelen der gegevens het onderzoek uit te strekken ook over den graad van pigmentatie.

Het materiaal werd nu geschift in lichtoogigen en donkeroogigen, die in het vervolg eenvoudig als blondinen en brunetten zullen worden aangeduid. Van de eersten telde mijn materiaal 1130, van de laatsten 670. Van elk dezer groepen werd het optreden der menarche afzonderlijk statistisch bewerkt. Het resultaat vindt men in Tabel III. De op grond dezer tabel vervaardigde krommen zijn

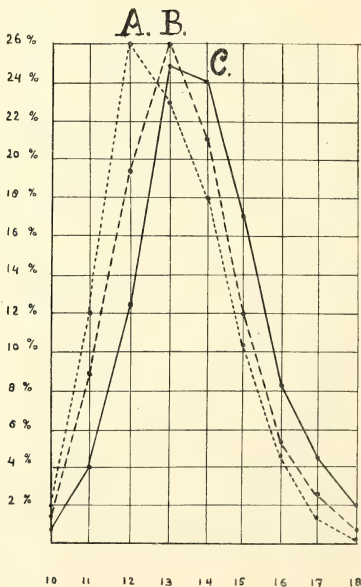


Fig. 2.

geschetst in figuur 2. De kromme B heeft betrekking op de lichtoogige personen, de kromme C op de donkeroogigen.

De uitkomst van dit onderzoek naar de betrekking tusschen menarche en graad van pigmentatie was verrassend, omdat het in tegenspraak is met hetgeen men zou verwachten. Het is toch een bekend verschijnsel, dat bij de donkerder gekleurde rassen de menarche op jeugdiger leeftijd verschijnt dan bij die met lichter huid. Door de meeste schrijvers wordt dit aan klimatologische invloeden toegeschreven, in 't bijzonder aan de hooge temperatuur, waaronder de donker gekleurde rassen leven. Ik vermoedde echter dat hier de rasfactor van beteekenis zou zijn, en dat een vroeger optreden der menarche aan de meer gepigmenteerde rassen eigen zou zijn. Nu blijkt daarentegen uit de verhoudingen in Tabel III vermeld, dat voor de bevolking van Nederland het omgekeerde het geval is, het is juist het blonde type dat zich in vergelijking met het brunette door een vroegere geslachtsrijpheid kenmerkt.

TABEL III.

Leeftijd.	Blondinen.		Brunetten.	
8 jaar.	1		1	
9 „	1		1	
10 „	22	1.8 %	9	1.3 %
11 „	104	9.1 „	27	4 „
12 „	220	19.5 „	82	12.3 „
13 „	294	26 „	170	25.2 „
14 „	244	21.5 „	164	24.6 „
15 „	136	12.1 „	115	17.2 „
16 „	65	5.7 „	56	8.5 „
17 „	26	2.3 „	28	4.3 „
18 „	12	1 „	13	2 „
19 „	1		2	
20 „	2		—	
21 „	1		1	
23 „	1		1	

Het verschil is zelfs niet onaanzienlijk. Want terwijl van het blondine type bij 56.4 % der meisjes vóór den veertienjarigen leef-

tijd de geslachtsrijpheid is ingetreden, is dit van het brunette type nog slechts in 42.8 % het geval. Zooals echter uit de kromme, en uit Tabel N°. III blijkt, ligt het begin der variabiliteitskromme voor beide typen in het 10e jaar, bij de brunetten begint deze bij 10 jaar en 5 maanden, bij de blondinen bij 10 jaar en 4 maanden. Voor beide groepen is dus wat men kan noemen de drempelleeftijd der geslachtsrijpheid gelijk. Na dit begin stijgt echter de kromme voor het blondine type sneller dan voor het brunette. Ook het eind der normale variabiliteit is voor beide typen gelijk, en ligt in het 18e jaar.

Het juiste verschil tusschen beide groepen blijkt uit de volgende gemiddelden, die wederom met inachtneming ook der maanden berekend zijn:

gemiddelde leeftijd der menarche bij blondinen: 13 jaar, 5 maanden, 17 dagen,

bij brunetten: 14 jaar, 4 maanden, 5 dagen.

Dit maakt dus een verschil tusschen beide typen van ruim tien maanden.

Een dergelijk verschil, en nog wel in een richting tegenovergesteld aan die welke ik vermoed had, is zeer opmerkelijk. Daar het hier twee groepen van personen betreft, die onder gelijke omstandigheden leven, en dus uitwendige factoren die op de menarche van invloed kunnen zijn niet in aanmerking komen, moet dit verschil geheel en al als het gevolg van een inwendigen factor beschouwd worden. En als zoodanig kan alleen de rasfactor gelden. Het lichtoogige deel onzer bevolking behoort in 't algemeen tot het ras dat het noordelijk deel van Europa bevolkt, den Homo nordicus, terwijl het bruinoogige, dat blijkens mijne indertijd uitgevoerde onderzoekingen voor ongeveer een derde aan de samenstelling van het Nederlandsche volk deelneemt, tot het Midden-Europa bewonende ras — den Homo alpinus — behoort [1]).

Het schijnt dus dat een geringer ontwikkeling van het pigment met een versnelling van de geslachtelijke ontwikkeling gepaard gaat. De betrekking tusschen beide verschijnselen is echter niet zoo eenvoudig, hetgeen reeds daaruit volgt, dat de gemiddelde leeftijd der

[1]) Dit later optreden der menarche bij het brunette type, had ook reeds de aandacht getrokken van een der artsen in Zeeland, aan wien ik een aantal gegevens dank. Hij maakte er mij in 't bijzonder opmerkzaam op. Ook een gymnastiekleerares, die mij eveneens een groot aantal gegevens verstrekte, zeide mij, met dit verschil tusschen het blondine en brunette type, zeer goed bekend te zijn. Hierin vindt vermoedelijk ook een verklaring het verschil van ongeveer een jaar tusschen de gemiddelde menarche der bevolking van Berlijn en München.

menarche bij de zooveel sterker gepigmenteerde Jodinnen, vroeger is dan bij de blondinen. De activeering van de geslachtssfeer bij het zich ontwikkelende individu is van zeer vele momenten afhankelijk. En men moet ten opzichte van het aan het licht getreden verschil aan de mogelijkheid denken, dat de rasfactor die hierbij werkzaam is, niet van physiologischen, doch van psychologischen aard is. Het blonde, zoowel als het brunette meisje, heeft, dit blijkt uit mijn onderzoek, na het bereiken van den leeftijd van 10 jaar en 6 maanden den drempelleeftijd der geslachtsrijpheid overschreden (Later zal blijken dat dit evenzoo voor het joodsche meisje geldt). De tijd, die voor elk individu nog verloopt tusschen dezen leeftijd en de activeering der geslachtsfuncties, wordt bepaald door een aantal uitwendige en inwendige factoren. En onder deze laatste moet ook plaats gelaten worden voor den psychischen factor, die op zijn beurt weer van de raspsyche afhankelijk is.

Tot zoover over den gemiddelden leeftijd der menarche bij onze bevolking in het algemeen. Ik ga nu over tot de mededeeling van een resultaat van mijn onderzoek, dat even verrassend als onverwacht was.

Het had bij de bewerking van mijn materiaal mijn aandacht getrokken dat de oudere personen die daarin voorkwamen, niet zelden zich door een laat optreden der menarche kenmerkten. Deze waarneming deed de vraag rijzen, of de menarche gedurende de laatste decenniën een verandering ondergaan zou kunnen hebben in dien zin, dat bij de jongste generatie de geslachtsrijpheid gemiddeld op jeugdiger leeftijd begint dan bij de voorafgaande generaties.

Ik heb getracht langs twee wegen een antwoord op deze vraag te vinden. In de eerste plaats verzamelde ik uit mijn materiaal de gegevens die betrekking hadden op personen geboren vóór 1880, en berekende hiervan den gemiddelden leeftijd der menarche. In de tweede plaats trachtte ik gegevens te verkrijgen omtrent de menarche bij moeder en dochters. Vooral dit laatste is, gegeven het feit dat slechts een kleine minderheid der vrouwen het leeftijdsjaar der menarche nauwkeurig kan opgeven, gezwegen dus van een detailleering wat de maand betreft, zeer moeilijk. Toch is het mij gelukt ook van zulke gegevens een aantal te verzamelen. Langs beide wegen was het resultaat van het onderzoek gelijkluidend en zeer verrassend. Het blijkt toch, dat de menarche, bij wat men ten opzichte der geslachtsrijpheid kan aanduiden als de jongste generatie, aanzienlijk is vervroegd. Na mededeeling der feiten kom ik op oorzaak en beteekenis van dit feit terug.

Beginnen wij met de menarche bij vrouwen geboren vóór 1880. In mijn materiaal bevonden zich daarvan 98 gegevens der menarche

naar jaar en maand, en bovendien beschikte ik over 104 gevallen, waarin alleen het leeftijdsjaar vermeld was. Deze 232 gevallen zijn in Tabel IV systematisch gerangschikt, en de kromme *B* van fig. 1 geeft het procentsgewijze verloop per leeftijdsjaar weer.

Vergelijkt men Tabel IV met Tabel I dan blijkt het volgende. Het begin der variabiliteitskromme ligt ook bij de vrouwen der oudere generaties in het 10e jaar. Dit feit bevestigt de vroeger reeds uitgesproken meening dat het midden van het 10e levensjaar de physiologische drempelleeftijd der geslachtsrijpheid bij de vrouw is.

TABEL IV.

Leeftijd.	Aantal.	Procent.	Leeftijd.	Aantal.	Procent.
10 jaar.	2	0.8	17 jaar.	27	11.2
11 „	12	5.—	18 „	19	8.1
12 „	21	9.—	19 „	10	4.3
13 „	27	11.2	20 „	5	2.2
14 „	37	15.9	21 „	4	1.3
15 „	35	15.1	22 „		
16 „	31	13.3	23 „	2	0.8

Tegenover dit constante beginpunt der variabiliteitskromme staat nu het zeer veranderlijke eindpunt. Dit valt bij de oudere generaties in het 21e jaar tegenover het 18e bij het jongere geslacht.

De top van de kromme die bij dit laatste in het 13e jaar ligt, is bij de oudere generaties naar hooger leeftijd verschoven en ligt in het 14e en 15e jaar.

Hieruit blijkt dus reeds dat vroeger de phase van geslachtelijke latentie, na het overschrijden van den drempelleeftijd bij een groot aantal meisjes niet onbelangrijk langer duurde, dan thans. Dit volgt ook uit het feit dat zooals Tabel I leert meer dan 50 °/₀ van de jongste generatie reeds vóór het eind van het 13e jaar menstrueert, terwijl dit bij de vóór 1880 geborenen slechts bij 26°/₀ het geval was.

Er heeft dus gedurende de laatste veertig jaren een vervroeging der menarche plaats gegrepen, en de hoegrootheid hiervan leert men uit de beide volgende gemiddelden kennen. De gemiddelde menarche der personen in Tabel I verwerkt (figuur 1, kromme *A*) waarvan de overgroote meerderheid geboren was tusschen 1897 en 1906 [1])

[1]) Onder mijn materiaal bevonden zich ook een aantal gegevens betrekking hebbend op meisjes geboren na 1906. Teneinde de statistiek zuiver te houden heb ik deze echter uitgeschakeld.

bedraagt 13 jaar 9 maanden 15 dagen, terwijl de gemiddelde leeftijd der eerste menstruatie bij de vóór 1880 geboren personen bedraagt 15 jaar 3 maanden en 20 dagen. Hieruit volgt dus een vervroeging der menarche gedurende de laatste decenniën van anderhalf jaar. Ik maak er in 't voorbijgaan opmerkzaam op, dat het laatst vermelde gemiddelde meer overeenstemt met die, welke men in de literatuur over de West-Europeesche bevolking aantreft en die op onderzoekingen van ouderen datum berusten.

Een tweede wijze waarop de vervroeging der menarche is vastgesteld geschiedde door vergelijking van den leeftijd der menarche bij moeders en dochters. Deze gegevens rangschikte ik in twee groepen. In de eerste groep bracht ik zulke gegevens samen, waarbij èn van moeder èn van dochter de leeftijd der menarche naar de maand nauwkeurig bekend was. In deze groep behooren 45 moeders met 71 dochters. De tweede groep omvat die gegevens waarbij alleen het leeftijdsjaar kon worden vermeld. Deze groep bevat 56 moeders met 82 dochters.

Het komt mij gewenscht voor de gegevens van de eerste groep in extenso mede te deelen, daar naar aanleiding hiervan nog enkele opmerkingen gemaakt moeten worden. Men vindt deze in Tabel V waarbij de gegevens gerangschikt zijn volgens den menarche-leeftijd der moeder.

Uit deze tabel volgt in de eerste plaats, dat van de 71 dochters bij 52 de menstruatie op jeugdiger leeftijd dan bij de moeder optrad. Het verdient echter weder opmerking dat ook bij de oudere generatie een beginnen der menses op den jeugdigen leeftijd van 11 jaren niet zeldzaam was. De gemiddelde leeftijd der menarche der moeders was 14 jaar, 9 maanden en 25 dagen, en van de dochters 13 jaar, 7 maanden en 1 dag, wat dus zeggen wil een vervroeging der menarche bij één generatie met veertien en een halve maand. Dat het hier gevonden verschil niet zoo groot is als dat gevonden door een vergelijking der menarche bij vrouwen geboren vóór 1880 met die geboren omstreeks het begin dezer eeuw (anderhalf jaar), vindt misschien zijne verklaring daarin dat onder deze laatsten nog al bejaarde personen voorkwamen, en het vervroegingsproces waarschijnlijk reeds langer werkzaam is.

De op grond van Tabel V gevonden vervroeging van veertien en een halve maand bij de jongste generatie, stemt zeer goed overeen met de uitkomst van de tweede groep van moeders (56) en dochters (82) waarvan alleen het leeftijdsjaar der menarche kon worden vermeld. Hier waren de moeders gemiddeld 15 jaar 1 maand en 3 dagen oud en de dochters 13 jaar 10 maanden en 15 dagen, dat is dus een vervroeging van veertien en een halve maand.

De gevonden resultaten, bewijzen wel onweerlegbaar het zeer merkwaardige verschijnsel van de aanzienlijke vervroeging van het begin der functie van de geslachtsklieren gedurende de laatste decennien. Want al moge het bedrag dezer vervroeging eenigszins schommelen, men kan deze toch gemiddeld stellen op veertien maanden.

TABEL V.

Moeder.	Dochter.	Moeder.	Dochter.	Moeder.	Dochter.
9.12	10.3	13.7	13.4	15.6	14.2
	10.5		12.8		12.6
11.6	11.9	13.7	12.7	15.9	11.11
11.8	11.6	13.7	13.1		12.8
11.9	11.10		12.3	15.12	11.10
	11.11	13.8	14.11	16.2	13.11
	15.2	13.10	11.10	16.4	12.11
11.10	14.12		12.12	16.6	16.1
11.10	11.10		11.11	17.1	13.6
12.7	14.10	13.11	13.10		12.8
12.9	10.6	14.1	10.8	17.4	14.9
	12.7		11.11	17.7	16.3
13.1	12.8		15.9		16.6
13.1	15.11		16.11	18.1	13.8
13.2	12.5	14.2	13.11		13.3 (12.12)[1]
	14.9	14.3	12.6		13.9
	16.11	14.4	13.11	18.4	14.2
13.3	11.12	14.5	11.6		13.5
	11.7	15.1	15.2	18.10	16.6
13.4	13.2	15.2	13.3	18.11	15.3
	13.1	15.3	14.4		14.11
	13.12		15.12	19.4	17.8
13.5	11.3	15.6	14.10		17.9
13.6	11.11			19.8	15.4

[1]) Kleindochter.

Er is hiermede een feit van zeer veelzijdige beteekenis aangetoond; in hooge mate belangwekkend als physiologisch verschijnsel, maar niet minder van groote beteekenis uit een sociaal en paedagogisch oogpunt. Want de vervroeging der menarche met veertien maanden, wil toch met andere woorden zeggen een verkorting van den kinderlijken leeftijd met dit tijdsbestek, een zooveel eerder activeering van de geslachtssfeer bij de huidige generatie, vergeleken met de voorafgaande. Veel van hetgeen de opmerkzame waarnemer en toehoorder in het maatschappelijk leven van thans ziet en hoort wordt begrijpelijk door dit vroeger gewekt worden van het vrouwelijk bewustzijn. Daarop in te gaan is echter niet hier de plaats.

Uitvoerige beschouwingen omtrent de oorzaak van dit verschijnsel zullen hier niet gegeven worden. Ik zal mij tot eenige algemeenheden beperken. In het individueele ontwikkelingsproces van de vrouw is het verschijnen der menses een gebeurtenis van meer dan gewone beteekenis, met het begin der geslachtsrijpheid treden ingrijpende veranderingen in de algemeene physiologie der ontwikkeling op. En wanneer dit tijdstip zoo aanzienlijk vervroegd wordt, dan moet dit beschouwd worden als de uiting van een versnellingsproces in de ontwikkeling. Nu doet zich in de eerste plaats de vraag voor: geldt het hier een symptoom van een sneller verloop der ontwikkeling in het algemeen, of is het een op zich zelf staand verschijnsel? Zonder bijzondere onderzoekingen is deze vraag niet te beantwoorden. Men zou daartoe moeten nagaan of ook andere ontwikkelingsverschijnselen gedurende de phase vóór de menarche versneld zijn b.v. lengtegroei, tandwisseling en dergelijke. De ontwikkelingsverschijnselen nà de menarche kunnen natuurlijk niet meer in aanmerking komen. Want nà de menarche ondergaat de ontwikkelingsgang ook den invloed van de in functie getreden ovariën. Dat deze op den nog niet beeindigden lengtegroei een remmenden invloed zou uitoefenen, betwijfel ik, gezien de omstandigheid, dat de volwassen dochters der jongste generatie gewoonlijk hun moeders in lengte overtreffen.

Een tweede vraag betreft de oorzaak van het verschijnsel; is deze vervroeging der menarche een reactie op uitwendige prikkels, of wel is het een primaire wijziging in het ontwikkelingsproces. Dat men hier te doen zou hebben met een primair biologisch verschijnsel, dus met het effect van een inwendige oorzaak, betwijfel ik. Ik kan mij niet voorstellen dat een interne factor een ontwikkelingsverschijnsel als het ware plotseling zoo sterk versnellen kan, als dit met de menarche het geval blijkt te zijn. Wanneer het een individueel verschijnsel, een uitzondering, was, zou dit mogelijk kunnen zijn, doch

het is een algemeen verschijnsel. Men zal dus uitwendige invloeden als oorzaak moeten aannemen. Ik zal niet in beschouwingen treden welke deze zijn, en dit gedeelte mijner mededeeling met een laatste opmerking besluiten.

De vraag kan gesteld worden of men in de sterke vervroeging der menarche met een verschijnsel te doen heeft, dat buiten de grenzen van het normaal physiologische valt. Deze beteekenis kan ik er niet aan toekennen, en stel mij de zaak als volgt voor. Opzettelijk heb ik er meermalen de aandacht op gevestigd dat bij alle door mij onderzochte groepen (brunetten, blondinen, jodinnen, oudere en jongere generaties) de variabiliteitscurve der menarche begint bij tien en een half jaar. Dat is de drempelleeftijd der geslachtsrijpheid. Bij elk meisje dat deze leeftijd overschreden heeft kan de geslachtssfeer geactiveerd worden. Bij het eene blijft zij echter langer, bij het andere korter latent. Deze periode van latentie wordt in zijn duur bepaald door erfelijke factoren, en door uitwendige omstandigheden. Terwijl het aandeel door erfelijke factoren bepaald, niet voor wijziging vatbaar is, is dat afhankelijk van uitwendige prikkels, een niet à priori gegeven hoegrootheid. Zij wisselt met de intensiteit der prikkels, dat is met de uitwendige levensomstandigheden, levenswijze enz. Of het nu voor het individu van voordeel of van nadeel is, dat de geslachtssfeer onder den invloed der omstandigheden vroeg geactiveerd wordt, is een moeilijk te beantwoorden vraag. Maar het activeeren na het eenmaal overschrijden van den drempel der geslachtsrijpheid, valt binnen de grenzen van het physiologisch normale.

Het tijdstip der activeering van de geslachtelijke functies is, zooals zooeven opgemerkt, afhankelijk van erfelijke en van uitwendige factoren. Het door mij verzamelde materiaal stelt mij in staat voor beide nog een bewijs aan te voeren.

De beteekenis van den erfelijken factor is hiervoor reeds aangetoond door de vergelijking van den gemiddelden leeftijd der menarche bij blondinen (Homo nordicus) en brunetten (Homo alpinus). Een meer overtuigend bewijs is nog aan Tabel V te ontleenen. Want deze tabel leert, dat, indien bij de moeder de menarche op jonger leeftijd optreedt, dit gemiddeld ook bij de dochter het geval is. Met opzet heb ik in deze tabel de gegevens gerangschikt naar den leeftijd der moeder.

Een eenvoudige berekening leert nu het volgende. De gemiddelde leeftijd der menarche van die dochters bij wier moeder de menstruatie begon in het 11^{e}, 12^{e} en 13^{e} jaar, bedraagt 12 jaar en 10 maanden, van de moeders bij wie de eerste menses in het 14^{e}, 15^{e} en 16^{e} jaar verschenen, waren de dochters gemiddeld 13 jaar en 7

maanden oud, en ten slotte was deze leeftijd 14 jaar en 11 maanden, bij die dochters wier moeder eerst in het 17^{e}, 18^{e} en 19^{e} jaar voor de eerste maal menstrueerden. Deze leeftijden bewijzen dus dat een geretardeerd optreden der menses bij de moeder door de dochter geërfd wordt.

Onder de uitwendige factoren die op de menarche van invloed zijn, wordt, zooals hiervoor reeds opgemerkt is, aan de temperatuur een groote beteekenis toegekend. Deze meening berustte tot nu toe alleen op het feit dat de menarche bij de in warmere zone levende bevolking op jeugdiger leeftijd valt, dan bij die in koudere luchtstreken. Ik kan nu uit mijn onderzoek bewijzen dat deze uitwendige invloed zelfs aantoonbaar is bij de bevolking van ons land. Ik heb mij n.l. de vraag gesteld of de menarche in de verschillende maanden van het jaar met gelijke frequentie optreedt, hetgeen niet het geval blijkt te zijn. De frequentiekromme der menarche gerangschikt naar de maanden van het jaar, heeft een zeer typisch verloop, zooals uit Tabel VI te zien is. In deze tabel is de frequentie voor elke maand in percenten van het geheel uitgedrukt.

TABEL VI.

Januari	8.2 %	Mei	10.8 %	September . .	6.9 %
Februari . . .	5.— „	Juni	10.— „	October . . .	6.2 „
Maart	7.— „	Juli.	9.5 „	November . .	7.8 „
April	8.8 „	Augustus . . .	10.9 „	December . .	8.6 „

Deze tabel leert, dat een eerste menstruatie, gedurende de warmere maanden (Mei, Juni, Juli en Augustus) veelvuldiger voorkomt dan gedurende den overigen tijd van het jaar. Want de totale frequentie gedurende deze vier maanden bedraagt 41.3 %, tegen 29.5 % gedurende de eerste, en 29.7 % gedurende de laatste vier maanden van het jaar. Het maandelijksch verloop is evenwel nog iets gecompliceerder. Behalve de grootere frequentie gedurende de zomermaanden, is er nog een tweede stijging in December en Januari. Dit maandelijksch verloop zou ik als volgt willen toelichten. Beginnende bij de maand Februari zoude ik de snelle en regelmatige stijging tot Mei willen beschouwen als een reactie op den algemeen climatologischen factor, den invloed van den tot krachtiger leven ontwakende natuur, en niet zoozeer als een temperatuursinvloed. Deze komt mij toch in deze maanden niet van dien aard voor dat hij in staat zou zijn, de frequentie in Mei tot het dubbele op te voeren van die in Februari. Den temperatuursinvloed zoude ik dan willen zien in het

feit, dat gedurende de eigenlijke zomermaanden de frequentie ongeveer gelijk blijft aan die in Mei.

De stijging der frequentie in December en Januari kan misschien als 't gevolg beschouwd worden van de kunstmatige hoogere temperaturen waaraan het organisme is blootgesteld.

Zooals in den aanvang dezer mededeeling reeds vermeld is, heb ik ook van 165 jodinnen gegevens over den leeftijd der menarche kunnen verzamelen. Uit den aard der zaak hebben deze bijkans uitsluitend betrekking op bewoonsters van grootere steden. De onderstaande Tabel VII geeft een overzicht over de frequentie volgens het leeftijdsjaar, in absolute getallen en in procentsgewijze verhouding, die door de kromme *A* in figuur 1, verduidelijkt wordt.

TABEL VII.

Leeftijd	Aantal.	Procent.	Leeftijd.	Aantal.	Procent.
9 jaar.	1		14 jaar.	30	18.1
10 „	3	1.8	15 „	17	10.3
11 „	20	12.1	16 „	9	5.4
12 „	43	26.—	17 „	2	1.2
13 „	39	23.6	18 „	1	

Naar aanleiding dezer tabel zij het volgende opgemerkt. In de drie gevallen onder het 10[e] jaar gerangschikt, traden de eerste menses op in de tweede helft van dit leeftijdsjaar (10 jaar 7 maanden, 10 j. 9 m. en 10 j. 11 m.). De variatiekromme der menarche begint dus bij de joodsche meisjes op gelijken leeftijd als bij de niet-joodsche. Wel is waar kwam ook een geval voor waarin de menarche reeds op negenjarigen leeftijd verscheen, doch dit geval — 9 j. 1 m. — is door een interval van anderhalf jaar van het eerstvolgende gescheiden, en moet dan ook als een uiting van abnormale vroegrijpheid beschouwd worden. Ook voor de joodsche bevolking geldt dus het midden van het 10[e] jaar als de drempel van den geslachtsrijpen leeftijd. Ik leg er nogmaals nadruk op dat wij dezen leeftijd nu bij verschillende groepen hebben kunnen vaststellen. Daarmede is een criterium gegeven, om in elk bijzonder geval vast te stellen of men te doen heeft met een werkelijk praemature ontwikkeling, of met een normaal, zij het dan ook snel ontwikkelingsproces. Een menarche na den leeftijd van tien en een half jaar, is een normale gebeurtenis.

Ten opzichte van den drempelleeftijd der geslachtsrijpheid bestaat dus geen verschil tusschen de joodsche en de niet-joodsche meisjes. Toch is er een verschil, n.l. de grootere frequentie der menarche onmiddellijk nadat dezen drempelleeftijd is overschreden, zoodat reeds vóór het eind van het 12e jaar bij 40 procent der joodsche meisjes de geslachtelijke functie begonnen is, tegen 30 procent bij de niet-joodsche blondinen en 18 procent bij de brunetten.

Het is nu zeer merkwaardig dat na deze snelle stijging der variatiekromme, waardoor de top reeds in het 12e jaar bereikt wordt, de variatielijn zeer langzaam daalt. Naast een groep met versnelde geslachtelijke ontwikkeling, komt dus een tweede voor met een verlangzaamde. Het gevolg hiervan is dat de gemiddelde leeftijd der menarche bij de joodsche meisjes, niet zooveel vroeger valt dan van de niet-joodsche. Voor de blondinen onder deze laatste toch vond ik een gemiddelden leeftijd van 13 jaar 5 maanden 17 dagen, terwijl voor de joodsche meisjes het gemiddelde bedraagt 13 jaar, 3 maanden en 24 dagen.

De beweerde vroegrijpheid der jodinnen tegenover de andere bevolking blijkt dus niet te bestaan. Want het geringe verschil dat blijkens bovenstaande gemiddelden te konstateeren is, wordt voldoende verklaard door het feit, dat de gegevens voor de jodinnen met slechts enkele uitzonderingen op stadsbewoonsters betrekking hebben. Ik kan mij dus op grond mijner onderzoekingen aansluiten aan de conclusie van FISHBERG, die eveneens tot het besluit kwam dat vroegrijpheid niet als een joodsch raskenmerk is te beschouwen [1]).

[1]) M. FISHBERG. Die Rassenmerkmale der Juden. München 1913.

Histologie. — M. W. WOERDEMAN: „*Over de determineering der polariteit bij de epidermale trilhaarcel.* (*Naar proeven bij amphibieënlarven*)."

(Aangeboden door de Heeren L. BOLK en J. BOEKE.)

Het is bekend, dat amphibieënlarven in den eersten tijd van haar leven trilhaarcellen in haar opperhuid bezitten. Niet bij alle amphibieënsoorten is dit verschijnsel duidelijk waarneembaar, want het aantal der trilhaarcellen loopt bij de verschillende soorten zeer uiteen. Bij één enkele larve is de verdeeling der trilhaarcellen over de opperhuid ook niet gelijkmatig; er zijn plaatsen, waar de trilhaarcellen in groot aantal bijéén voorkomen, terwijl ze op andere plaatsen schaarsch zijn.

De beweging der trilhaarcellen veroorzaakt, zoolang de larven zich nog in haar geleihulsel bevinden, een langzame rotatie der larven. Verwijdert men de geleihulsels en onderzoekt men dan de larven, dan vindt men, evenals bij larven, die de geleihulsels reeds verlaten hebben, eenerzijds weer de beweging der larven, tengevolge van den trilhaarslag, anderzijds een vrij sterke strooming in het water rondom de larve. Het spreekt vanzelf, dat deze strooming dáár het sterkst is, waar zich de meeste trilhaarcellen bevinden. Er ontstaan dus langs bepaalde deelen van het larvenlichaam sterke, langs andere zwakkere stroompjes in het water, welke b.v. voor rana temporaria en triton cristatus door ASSHETON [1]) nauwkeurig zijn onderzocht en voor larven van verschillenden leeftijd in kaart zijn gebracht.

Het blijkt, dat bij de genoemde dieren de eerste trilhaarbeweging waarneembaar wordt bij larven met nog open neuraalkanaal, korten tijd vóór het sluiten daarvan. Die beweging vindt plaats langs de neuraalwallen in caudale richting. Zelf onderzocht ik rana esculenta- en triton alpestris-larven. Bij deze amphibieën treedt, naar mijne ervaring, de trilhaarbeweging op, wanneer de neuraalwallen reeds gedeeltelijk verkleefd zijn. De richting der vloeistofstroomen langs het larven-lichaam vond ik in hoofdzaken overeenstemmend met de schemata van ASSHETON, alhoewel toch ook niet onbelangrijke verschillen werden gevonden. Deze doen hier niet ter zake. De richting

1) R. ASSHETON. Quarterly Journ. of micr. Science, New. Series. Vol. 38. 1896, blz. 465.

der trilhaarbeweging bij de normale larven van rana esculenta en triton alpestris werd dus eerst grondig onderzocht en in kaart gebracht. Verder werd vastgesteld, dat de vloeistofstroomen steeds in dezelfde richting gaan. Een omkeerbaarheid van de richting van den trilhaarslag schijnt dan ook bij metazoa zeer zelden te zijn waargenomen. (ERHARD [1]).

Dit wijst erop, dat de trilhaarcellen zoodanig zijn georganiseerd, dat slechts een trilhaarbeweging in één richting mogelijk is. De cellen bezitten in haar organisatie een zekere asymmetrie; naast haar polariteit (waardoor basis en ciliëndragend oppervlak onderscheiden worden) bestaat nog een ,,nevenpolariteit" (zie voor deze begrippen ROUX)[2]). Men heeft zich de vraag gesteld of kunstmatig deze polariteit zou kunnen worden omgekeerd, m.a.w. of men artificiëel de trilhaarcel ertoe zou kunnen brengen juist in tegengestelde richting te gaan slaan. Hiermede houdt een andere vraag verband, n.l. in hoeverre de richting van den trilhaarslag afhankelijk is van de ligging van de trilhaarcellen ten opzichte van de lichaamsas.

Proeven van v. BRÜCKE [3]) en nog in dit jaar van MERTON [4]) gaan in deze richting. Het is niet gelukt een omkeering der polariteit te bewerkstelligen. Nu is het door talrijke experimenten gebleken, dat er tijdens de embryonale ontwikkeling een tijdperk wordt gevonden, waarin het ectoderm, waaruit de larvale opperhuid ontstaat, nog indifferent is. Zoo vond SPEMANN [5]), dat bij het begin der gastrulatie ectoderm, dat bestemd was om deel te nemen aan de vorming van de medullairplaat (z.g. praesumptieve medullairplaat) kon worden vervangen door praesumptieve epidermis. Er ontstonden larven met normale medullairplaat en normale epidermis. Het lot der ectodermcellen is in dat ontwikkelingstijdperk nog niet, of althans nog niet streng, vastgelegd. Het ectoderm is nog in hooge mate ,,umbildungsfähig". Of het dan nog volledig indifferent is, is (zooals SPEMANN zegt), zoo niet te beslissen. Het scheen me toe, dat hier het onderzoek van de celpolariteit een vingerwijzing zou kunnen geven. Immers het zou kunnen zijn, dat de celpolariteit reeds was vastgelegd (,,gedetermineerd" volgens de terminologie van ROUX), voordat de orgaanvormende functie van de cel bepaald was. De proeven van SPEMANN betreffen de ,,orgaandeterminatie". Hoe staat het nu met de celpo-

[1]) ERHARD in ABDERHALDEN's Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden.

[2]) W. ROUX. Terminologie der Entwicklungsmechanik der Tiere und Pflanzen. Leipzig. Engelmann. 1912.

[3]) E. TH. v. BRÜCKE. Pflüger's Archiv. f. d. ges. Physiol. Bnd. 166. 1917.

[4]) H. MERTON. Pflüger's Archiv. f. d. ges. Physiol. Bnd. 198. 1923.

[5]) H. SPEMANN. Sitzungsber. d. Gesellsch. naturf. Freunde. Berlin. 1916. N°. 9.

lariteit? Wanneer wordt die gedetermineerd? De experimenten, ter oplossing van deze vraag, verrichtte ik op larven van rana esculenta en van triton alpestris in het Zoölogisch Instituut der Universiteit te Freiburg i.Br. (Directeur: Geheimrat Prof. Dr. H. SPEMANN).

In de eerste plaats werd nagegaan, of er ontwikkelingsstadia bestonden, waarbij de polariteit van de trilhaarcel omkeerbaar is, d.w.z. waarbij men de trilhaarcellen kan dwingen in een andere dan de normale richting te gaan slaan.

Door middel van fijne glasnaalden werden ectodermstukjes omsneden, losgemaakt van hun onderlaag, en na 180° of 90° gedraaid te zijn, weer tot vergroeiïng gebracht. Na het genezen van de wondjes, hetgeen verbazend vlug geschiedt, werd de trilslagrichting bepaald door de larven te onderzoeken in water, waarin kleurstofkorreltjes gesuspendeerd waren. Een nadeel van deze werkwijze bleek te zijn het spoedig geheel onzichtbaar worden van de wondrandjes, waardoor men de contrôle verliest over de uitgebreidheid van de omgekeerde gebieden. Daarom heb ik toen gebruik gemaakt van de door W. VOGT[1]) ingevoerde methode, waarbij ectodermgebieden van vitaal gekleurde en van ongekleurde larven omgeruild worden. Nadat eerst was vastgesteld, dat vitale kleuring met nijlblauwsulfaat de trilhaarbeweging niet schaadde, heb ik in het vervolg van twee even oude larven er éene gekleurd en de andere niet. Van deze larven werden nu ectodermstukjes van een zeer bepaalden vorm en bij beide even groot, losgepraepareerd en omgeruild. In de transplantaten blijft de kleur zeer goed gelocaliseerd, ze diffundeert niet en stelt ons in staat dagen lang de grenzen van het implantaat te herkennen. Bovendien kan men aan den vorm van het implantaat zien, hoe het oorspronkelijk heeft gelegen en welke dus de richting van den trilhaarstroom onder normale omstandigheden zou zijn geweest. Zonder de verschillende proeven nu elk afzonderlijk te beschrijven, worde hier slechts de einduitkomst van alle experimenten in het kort medegedeeld.

Het bleek, dat de eenmaal met trillen begonnen trilhaarcel er niet meer toe gebracht kan worden om in andere richting te gaan slaan. In verkeerde richting ingeplante ectodermstukjes behielden hun oorspronkelijke trilslagrichting dagen lang, ja, tot het verdwijnen der trilhaarcellen uit de epidermis toe. Zelfs, voordat de trilhaarbeweging is begonnen, is de richting, waarin ze zal plaats vinden, reeds vastgelegd. Worden ectodermstukjes uren voor het optreden der trilhaarbeweging 180° omgekeerd, dan blijken later de

[1]) W. VOGT. Verhandl. deutsch. zoolog. Gesellsch. Bnd. 27. Sept. 1922. blz. 49

trilhaarcellen juist in tegengestelde richting te trillen dan onder normale omstandigheden. Een uitzondering vormen evenwel de allerjongste ontwikkelingstijdperken. Het bleek, dat men bij blastulae en beginnende gastrula-stadia het blastuladak resp. ectoderm-lapjes kan omkeeren, zonder dat dit van invloed is op de trilslagrichting, wanneer later zulke larven met haar trilhaarbeweging beginnen.

Bij de genoemde jonge stadia is dus de celpolariteit nog niet vastgelegd. Het is uit de proeven verder gebleken, dat de determineering plaats vindt tijdens de gastrulatie. Indien de blastoporus zich nog voordoet als een recht of licht halvemaanvormig spleetje, is de toekomstige ectodermale trilhaarcel nog indifferent. Maar zoodra de blastoporus hoefijzervormig en later rond geworden is, is omkeering van ectoderm zonder omkeering der toekomstige trilslagrichting niet meer mogelijk.

De determinatie-periode voor de polariteit der epidermale trilhaarcel valt dus in het jongste gastrulatie-tijdperk.

Een tweede vraag was nu, of de determinatie der celpolariteit samen viel met de orgaandeterminatie.

Daartoe werden lapjes praesumptieve epidermis en praesumptieve medullairplaat omgewisseld bij zeer jonge larven en met nauwkeurig in acht nemen van de oorspronkelijke ligging (vitale kleuring) gelet op de later zich ontwikkelende trilhaarbeweging. In het kort gezegd, verkreeg ik de volgende uitkomst. Wanneer na de operatie larven ontstonden met normaal ontwikkelde medullairplaat (waarvan dus een deel uit praesumptieve epidermis was gevormd) en met normaal gevormde epidermis (waarvan dus een deel uit praesumptieve medullairplaat was ontstaan), dan vertoonden die larven normale trilslagrichting. D. w. z. de trilhaarcellen hebben zich niet ontwikkeld overeenkomstig haar herkomst (niet „herkunftsgemäsz"), maar in aansluiting aan haar nieuwe omgeving („ortsgemäsz"). Wanneer de orgaan-determinatie nog niet tot stand gekomen is, is de trilslagrichting nog te beïnvloeden door de omgeving. Maar, ontstonden abnormale larven met defecten van de medullairplaat of met medullairplaatstukjes in epidermisgebied, dan bleek de trilslagrichting zich op de implantaten ontwikkeld te hebben overeenkomstig de herkomst der implantaten en niet door de nieuwe omgeving beinvloed te zijn.

Deze experimenten schijnen er dus op te wijzen, dat het determineeren van de celpolariteit en van de orgaanvormende functie óf gelijktijdig geschieden óf althans met zeer gering tijdsinterval.

Nu mag evenwel niet worden vergeten, dat de orgaandeterminatie in het ectoderm niet overal gelijktijdig plaats vindt. De proeven van

SPEMANN en Mevr. MANGOLD geb. PRÖSCHHOLD[1]) hebben aangetoond, dat die determinatie uitgaat van een door hen genoemd „organisatiecentrum", dat in de dorsale oermondlip gelocaliseerd is. Verder hebben proeven van O. MANGOLD[2]) bewezen, dat na afloop der gastrulatie, wanneer dus het medullairplaatgebied reeds gedetermineerd is, ectoderm van de ventrale larvenhelft nog mesoderm of entoderm kan vormen en dus nog niet gedetermineerd is.

Mijn proeven ter oplossing van de tweede vraag, die ik mij stelde, verrichtte ik in het gebied der toekomstige medullairplaat. Teneinde te kunnen nagaan, of het verschijnsel, dat de determineering der celpolariteit ongeveer samenvalt met de bepaling van de orgaanvormende functie der cellen, algemeen geldig is of slechts betrekking heeft op het gebied der medullairplaat, dient het onderzoek nog te worden uitgebreid.

Op de histiophysiologische gegevens betreffende de trilhaarbeweging, welke bij deze proeven werden verkregen, hoop ik in een afzonderlijke mededeeling in te gaan.

---

[1]) H SPEMANN. Arch. f. Entw. mech. der Organismen. Bnd. 48. 1921.

[2]) O. MANGOLD. Verhandl. deutsch. Zoolog. Gesellsch. Bnd. 27. Sept. 1922. blz. 51

Histologie. — M. W. Woerdeman: „*Bijdrage tot de histo-physiologie van het trilhaarepitheel*”.

(Aangeboden door de Heeren G. van Rijnberk en J. Boeke).

Het plotseling omkeeren van de slagrichting bij trilhaarcellen, welbekend bij een aantal protozoa, komt bij metazoa slechts uiterst zelden voor (literatuur bij Erhard [1]). Bij amphibieën is het verschijnsel, voor zoover mij bekend is, nog nooit waargenomen.

v. Brücke [2]) kwam op de gedachte om kleine lapjes van het monddakslijmvlies bij kikvorschen los te praepareeren en na ze 180° gedraaid te hebben, weer te laten vastgroeien. Deze proeven waren met talrijke moeilijkheden verbonden. Er ontstonden ontstekingen, necrose der lapjes, etteringen, enz. Bij twee dieren ging het epitheel van het lapje, voor zoover macroscopisch onderzoek dit kon nagaan, niet te gronde en kon v. Brücke de richting der trilhaarbeweging gedurende 40 dagen bestudeeren. De cellen bleven trillen in de oorspronkelijke richting.

Bij drie andere dieren werd het epitheel van het lapje waarschijnlijk (microscopisch onderzoek vond niet plaats) vervangen door van de wondranden over het lapje uitgroeiend epitheel. Dit geregenereerde epitheel vertoonde een normale slagrichting. Proeven van Merton [3]) van het vorige jaar bevestigen v. Brücke's gegevens, zoodat het wel zeker schijnt, dat het bij volwassen kikvorschen niet mogelijk is de trilslagrichting te doen omkeeren, d. w. z. de polariteit van de trilhaarcel te doen veranderen.

Weliswaar hadden de negatieve uitkomsten, die Schöne [4]) en Weigel [5]) met andere epitheliën verkregen hadden, niet anders doen vermoeden, maar juist bij trilhaarepitheel was een invloed van de slagrichting der omgeving op de beweging van de cellen van het

---

[1]) Erhard in Abderhalden's Handb. d. biol. Arbeitsmethoden.

[2]) E. Th v. Brücke. Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. Bnd. 166. 1917.

[3]) H. Merton. Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. Bnd. 198. 1923.

[4]) Schöne. Die heteroplastische und homoioplastische Transplantation. Berlin 1912.

[5]) Weigel. Arch. f. Entw. mechan. der Organismen. Bnd. 36. 1913.

gedraaide implantaat niet ondenkbaar, gezien onze inzichten in de prikkelgeleiding bij het trilhaarepitheel.

Klassieke proeven hieromtrent zijn verricht door VERWORN [1]). Daaruit bleek, dat iedere trilhaarcel, ja iedere cilie afzonderlijk, zelfstandig bewegen kan. Maar voor de regelmatige beweging van het geheele epitheel, waarbij geen trilhaarcel in actie komt, voordat de voorafgaande in beweging gekomen is („metachrone" trilhaarbeweging volgens VERWORN) is een samenhang van al die cellen noodig. Wordt ergens vóór in de rij der trillende elementen (trilplaatjes op de ribben van Beroë. Onderzoek van VERWORN) één daarvan tegengehouden, dan houdt de geheele verdere rij met trillen op. Wordt een snede aangebracht, dan trilt het distaal van de snee liggende deel van de rij niet meer in denzelfden rhythmus als het vóór de snee liggende gedeelte. Het op de snee volgende element geeft nu het rhythme aan. Dit rhythme wordt door de volgende trillende cellen overgenomen.

Men moet wel aannemen, dat er een prikkelgeleiding in het trilhaarepitheel plaats vindt (in den celzoom) en dat alle trilhaarcellen met elkander samenhangen (literatuur bij ERHARD). Indien dit het geval is, ware het denkbaar, dat in omgedraaide stukjes trilhaarepitheel, die weer met de omgeving zijn samengegroeid, de trilslagrichting zal omkeeren, aangezien nu de prikkelgeleiding in deze stukjes juist tegengesteld zal zijn aan de normale.

Maar het feit, dat de genezing van de mondslijmvlieslapjes bij de proeven van VON BRÜCKE zoo weinig glad verliep en met wondrandontsteking gepaard ging, wettigt twijfel of er wel normale organische verbinding tusschen implantaat en omgeving tot stand gekomen is.

Voor een ander doel heb ik in het Zoölogisch Instituut der Universiteit te Freiburg i. Br. (Directeur: Prof. Dr. H. SPEMANN) bij larven van Rana esculenta en van Triton alpestris ectodermlapjes losgepraepareerd en omgekeerd (180° of 90° gedraaid) weer tot vergroeiing gebracht. Daar de larvale epidermis trilhaarcellen bevat en een zeer regelmatige trilhaarbeweging vertoont, (zie o.a. ASSHETON [2])) had ik nu gelegenheid om de gevolgen van deze draaiingen op de trilhaarbeweging te bestudeeren.

Vooraf dient te worden vermeld, dat de omgedraaide ectodermstukjes bij jonge amphibiëenlarven zonder reactie in heel korten tijd vastgroeien, zoodat enkele uren na de operatie zelfs van de wondranden ook microscopisch niets meer te zien is. Teneinde nu toch

[1]) M. VERWORN. Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. Bnd. 48. 1890.

[2]) R. ASSHETON. Quarterly Journ. of microsc. Science. New Series. Vol. 38. 1896.

over de uitgebreidheid van het omgekeerde gebied contrôle te bezitten, werd een bijzondere techniek toegepast, waardoor het mogelijk was dagen lang de grenzen van het omgekeerde stukje te blijven herkennen. (Transplantatie verbonden met vitale kleuring volgens W. VOGT [1])).

De trilhaarbeweging begint bij amphibiëenlarven ongeveer gelijktijdig met het sluiten van het neuraalkanaal. Wordt bij stadiën, waarbij de trilhaarbeweging juist begonnen of reeds eenigen tijd aan den gang is, een ectodermgebied gedraaid, dan blijft de trilhaarbeweging haar oorspronkelijke richting behouden. Dit duurt dagen lang tot het verdwijnen van de trilhaarbeweging der epidermis, zonder dat een beïnvloeding van het omgekeerde gebied door de omgeving valt waar te nemen.

Wordt na afloop der gastrulatie, dus uren vóór het begin der trilhaarbeweging de proef genomen, dan is de uitkomst dezelfde. Alvorens de beweging begint, is haar richting dus reeds gedetermineerd.

Alleen bij blastulae en de allerjongste gastrula-stadiën gelukt het om de toekomstige trilhaarbeweging te beïnvloeden.

Op grond van deze proeven kan men dus zeggen, dat na afloop der gastrulatie de polariteit der trilhaarcel is vastgelegd. De volgende experimenten werden nu genomen bij stadia direct na afloop der gastrulatie. Ik heb de proeven verder zóó uitgebreid, dat allerlei plekjes, die als oorsprong van de trilhaarbeweging in aanmerking konden komen, werden omgekeerd lang vóór het optreden der beweging. Desniettegenstaande ontwikkelde zich de trilhaarbeweging in de niet gedraaide gebieden volkomen normaal.

Bij een verdere proeven-reeks werden reeds trillende ectodermstukjes geïmplanteerd bij jonge stadia, die nog geen trilhaarbeweging bezaten. Men mocht nu veronderstellen, dat bij het optreden dier beweging, de slagrichting zich zou regelen naar die van het implantaat. Deze beïnvloeding bleef in alle gevallen achterwege.

Verder werden niet trillende ectodermlapjes (van heel jonge stadiën) geïmplanteerd bij oudere larven met reeds trillende epidermis. Ook nu zou men denken, dat, indien de trilhaarbeweging van het implantaat zou beginnen, haar slagrichting door de epidermis van den gastheer zou worden bepaald.

Het bleek evenwel, dat de trilhaarbeweging van het implantaat precies gelijktijdig met de beweging van de larve, waarvan het implantaat afkomstig was, begon en dat de slagrichting bepaald

[1]) W. VOGT. Verhandl. deutsch. zool. Gesellsch. Bnd. 27. Sept. 1922. blz. 49.

werd door de herkomst van het implantaat en niet door de nieuwe omgeving (een zuiver geval van „Selbstdifferenzierung" volgens Roux).

Nu moet men wel aannemen, dat bij de jonge stadia, die ik opereerde, de implantaten zonder eenige stoornis in het organisch verband hunner omgeving worden opgenomen. De proefondervindelijke embryologie kent tallooze gevallen, waarbij zoo'n implantaat zich in alle opzichten gedroeg als het gebied, dat het vervangt. Ja, het feit, dat het implantaat verafgelegen cellen tot ontplooiïng van haar orgaanvormende functie kan brengen, wijst er wel op, dat er een prikkelgeleiding van het implantaat uit naar de omgeving plaats vindt en dat dus het implantaat in het organisch verband van de omgeving is opgenomen.

Ter verklaring der mooie metachronie bij de trilhaarbeweging wordt algemeen verondersteld, dat er een prikkelgeleiding van de eene trilhaarcel naar de andere moet voorkomen. Recente proeven van Wintrebert[1]) bewijzen bovendien, dat die geleiding bestaat en bij jonge stadia buiten het zenuwstelsel om, alleen dus in het epitheel, tot stand komt.

De proeven bij blastulae en jonge gastrulae toonen nu aan, dat de omgekeerde stukjes gecoördineerd mee gaan trillen met de omgeving, hetgeen er op wijst, dat niet alleen de slagrichting van iedere cel tegengesteld is aan de richting, waarin de cel zou gaan trillen, maar dat ook de volgorde, waarin de cellen trillen, is omgekeerd en in overeenstemming is met de trilslag-volgorde in de omgeving van het gedraaide lapje.

Dit gecoördineerd meebewegen met de omgeving bewijst: 1°. dat het lapje blijkbaar prikkels van de omgeving ontvangt (dat dus de prikkelgeleiding niet onderbroken is); 2°. dat de celpolariteit is omgekeerd en ten 3°. dat de richting, waarin de prikkel geleid wordt, is omgekeerd. Wordt bij een oudere larve een stukje epidermis gedraaid, dan blijft de trilhaarbeweging op dit lapje gecoördineerd plaats vinden, maar niet in coördinatie met de omgeving. Er is geen enkele reden om te veronderstellen, dat nu het lapje niet met de omgeving in prikkelverband staat. Allerlei experimenteel-embryologische gegevens wijzen er op, dat ook bij deze stadiën zoo'n verband na het genezen der wondjes weer tot stand komt. Dan zou dus de uitkomst der proeven bij oudere stadia er op wijzen: 1°. dat de celpolariteit nu niet is omgekeerd en 2°. dat de prikkelgeleiding nog in de oorspronkelijke richting plaats vindt.

[1]) P. Wintrebert. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris T. 172. 1921. blz. 934.

Het maakt dus den indruk, alsof tegelijkertijd met de polariteit der trilhaarcellen de richting van de prikkelgeleiding wordt vastgelegd en dat slechts prikkelgeleiding in één bepaalde richting mogelijk is. Het ligt voor de hand om aan te nemen, dat dit verschijnsel berust op den aard der verbinding tusschen de trilhaarcellen, alhoewel het microscopisch onderzoek er nog niet in geslaagd is omtrent die verbinding zekere gegevens te verschaffen.

Biochemie. — B. SJOLLEMA en J. E. VAN DER ZANDE. „*Onderzoekingen over de stofwisseling bij acetonaemie van melkkoeien.*" (Mededeelingen uit het Scheikundig Laboratorium der Veeartsenijkundige Hoogeschool.)

(Aangeboden door de Heeren C. EYKMAN en C. H. H. SPRONCK).

Bij melkkoeien komt niet zelden eenige dagen na den partus acetonaemie voor. De dieren vermageren daarbij in enkele dagen zeer sterk, geven weinig melk meer, verspreiden den reuk van aceton en hebben geringe eetlust. Na eenigen tijd herstellen zij in den regel. Het herstel treedt spoedig in wanneer de dieren geweid worden.

Het onderzoek van urine, bloed en melk van ruim twintig aan typische acetonaemie lijdende melkkoeien leerde ons, dat de urine dezer dieren dikwijls 10—13 gr. acetonlichamen per liter bevatte. In het bloed kwam veelal 0,6—1 gr. dezer stoffen per L. voor; terwijl in de melk het gehalte ongeveer de helft was van dat in het bloed. Deze uitkomsten toonen een abnormale vetstofwisseling aan. Immers de acetonlichamen ontstaan in hoofdzaak door onvolledige verbranding der vetten.[1]) De alkali-reserve van het bloed was in ernstige gevallen verlaagd tot het $^4/_5$ of $^3/_5$ van de normale waarde. Uit het onderzoek van het glucosegehalte van het bloed blijkt, dat geen hyperglycaemie aanwezig was. Suiker kwam nooit in de urine voor. De suikerstofwisseling vertoonde dus niets abnormaals. De door de acetonlichamen veroorzaakte acidosis, had een verhooging van het calcium- en ammoniakgehalte der urine ten gevolge. De zeer gestoorde vetstofwisseling ging niet gepaard met lipaemie. Het gehalte van het bloed aan totaal lipoiden en dat aan vet was niet of weinig hooger dan normaal. Deze verhooging was hoofdzakelijk toe te schrijven aan hypercholesterinaemie. In plaats van circa 0,1 °/$_0$ vonden wij n.l. circa 0,2 °/$_0$ cholesterine in het bloedplasma. Het lipoid-phosphorzuur bleek niet verhoogd te zijn.

Ons baseerende op de formule welke de grenswaarde aangeeft voor

[1]) De opvatting van GEELMUYDEN (Erg. d. Physiol. 1923), dat de acetonlichamen normale tusschenprodukten bij de omzetting van vet in suiker zijn, mag als zeer aanvechtbaar worden beschouwd.

de verhouding tusschen ketogene- en antiketogene stoffen[1]) (SHAFFER, HUBBARD en WRIGHT) kunnen wij uit de ons ter beschikking staande gegevens (waaruit o.a. blijkt dat de dieren circa 375 gr. eiwit verbranden) berekenen, dat een koe reeds ongeveer 1 Kg. vet moet verbranden voordat deze grenswaarde bereikt wordt. Normale koeien oxydeeren bij een gewoon rantsoen slechts weinig vet. De bovenbedoelde verhouding is daarbij zeer veel hooger dan de grenswaarde. Indien de dieren, zooals volgens onze onderzoekingen dikwijls het geval was, circa 120 gr. acetonlichamen per dag afscheiden, moet ruim een kilogram vet worden verbrand. Waar de dieren dan slechts weinig vet in het voedsel opnemen, wordt dus ongeveer een Kg. lichaamsvet per dag verbruikt. Er moet dus bij acetonaemie een ernstige functioneele stoornis zijn van een der bij de vetstofwisseling betrokken organen, welke ten gevolge heeft dat veel lichaamsvet wordt afgebroken. De eenvoudigste verklaring is, de oorzaak in de lever te zoeken, aangezien volgens de proeven met de Ecksche fistel en met de omgekeerde Ecksche fistel in de lever acetonlichamen gevormd worden. [2])

Deze opvatting wordt o.a. gesteund door verschillende waarnemingen over verminderde activiteit van de lever gedurende zwangerschap (N.B. de acetonaemie van koeien treedt eenige dagen na den partus te voorschijn) en over de groote vetrijkheid van de lever van hoog drachtige runderen.

Dat het slechts een functioneele stoornis is volgt wel uit de spoedige genezing, die o.a. intreedt, wanneer de dieren in de weide worden gelaten.

Men kan zich ook denken dat de zoo abnormaal groote vetmobilisatie de primaire abnormaliteit is en deze van uit een ander orgaan dan de lever wordt beheerscht.

Dat melkkoeien niet gemakkelijk zooveel acetonlichamen afscheiden als wij bij acetonaemie vonden, bleek o.a. uit onze experimenten met koeien, die wij na eenige injecties van phloridzine (waardoor glucosurie optrad), lieten vasten. Er kwam dan wel aceton in de urine voor, doch slechts weinig.

Evenmin treden bij koeien die door een indigestie of om andere

---

[1]) Deze grenswaarde mag, op grond van recente onderzoekingen, voor het organisme met gestoorde stofwisseling gelijk worden aangenomen aan die voor het gezonde. (HUBBARD en NICHOLSON.)

[2]) Deze proeven bewijzen natuurlijk niet dat nergens anders in het organisme vorming van acetonlichamen kan geschieden. Zij hebben het bezwaar dat hare bewijskracht wegens de zoo ingrijpende maatregelen en daardoor sterk abnormale omstandigheden zeer vermindert.

redenen (mond- en klauwzeer) weinig of geen voedsel opnemen, belangrijke hoeveelheden acetonlichamen in de urine op.

In een geval van diabetes bij een melkkoe vonden wij hetzelfde. Niettegenstaande de urine gedurende langen tijd 3 à 4 % glucose bevatte, was het gehalte aan acetonlichamen gering.

De wijde verhouding tusschen den koolhydraatomzet en den vetomzet verklaart dat bij melkkoeien eerst bij een zeer abnormale stofwisseling acetonafscheiding optreedt.

Onze onderzoekingen toonen aan, dat bij melkkoeien, die aan acetonaemie lijden, groote afbraak van lichaamsvet — veelal ongeveer 1 Kg. per dag — plaats heeft. Lipaemie, glucosurie en hyperglycaemie komen er niet bij voor. De hoeveelheden der totaal acetonlichamen bedraagt dikwijls ongeveer 120 gr. per dag. Het cholesterine gehalte van het bloed is met 50 tot 100 % en soms meer verhoogd. De alkalireserve is verlaagd. Wellicht wordt de gestoorde vetstofwisseling veroorzaakt door intoxicatie van de lever.

Physiologie. — Mej. L. Kaiser: „*Bijdragen tot een experimenteel-phonetisch onderzoek der Nederlandsche taal.* I. *De korte o.*" [1]).

(Aangeboden door de Heeren G. van Rijnberk en H Zwaardemaker)

Wanneer men luistert naar de wijze, waarop de „o" in de Nederlandsche taal in gesloten lettergrepen wordt uitgesproken, dan bemerkt men, dat, afgezien van den invloed, die alle klanken ondervinden van voorafgaande en volgende klinkers of medeklinkers, twee geheel verschillende wijzen van uitspraak kunnen worden onderscheiden [2]). Als voorbeeld van de eene wijze van uitspraak noem ik de woorden: kok, tot, hol; als voorbeeld van de andere: pop, bot, vol, hond. Op voorstel van mijn vroegeren leermeester, Dr. Plomp, beproefde ik op deze questie iets dieper in te gaan.

Allereerst werd beproefd het door het intuitief taalgevoel aangegeven en door het eenvoudig gehoor waargenomen verschil tusschen de beide „o"-klanken experimenteel vast te leggen.

Experimenteel-phonetische analyse der spraakbewegingen.

Achtereenvolgens werden eenige in de experimenteele phonetiek gebruikelijke methodes toegepast op de spraakbewegingen gedurende het uitspreken van o̥ en ọ [3]). Hierbij werd in hoofdzaak steeds van een zelfde proefpersoon gebruik gemaakt, terwijl de gevonden feiten aan enkele andere proefpersonen werden getoetst.

1. Beschouwing en opmeting der mondopening bij het uitspreken van verschillende klanken deed zien, dat in dit opzicht a, o̥, oo, ọ, oe een reeks vormen, waarin de mondopening steeds kleiner wordt, en wel zóó, dat de hoogte regelmatig afneemt, terwijl de breedte ook steeds afneemt, doch niet zoo regelmatig. Zij vertoont n.l. tusschen

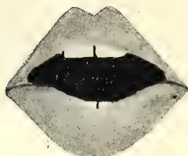
[1]) Naar onderzoekingen verricht in het Physiol. Lab. der Universiteit van Amsterdam en in het Phonetisch Lab. der Tsjechische Universiteit te Praag.

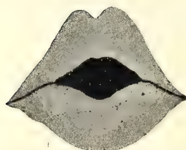
[2]) Het is mij bekend, dat de in verschillende gedeelten van Nederland door z.g. beschaafden gesproken taal vrij sterk verschilt. Het hieronder medegedeelde geldt voor zoover mij bekend voor de in Amsterdam en omstreken gesproken taal, en waarschijnlijk niet, of slechts ten deele o.a. voor die, welke men in Den Haag en omstreken spreekt, in welke de o̥-klank overheerschend is.

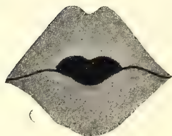
[3]) De „o" van kok wordt hier voorgesteld door o̥, die van pop door ọ.

o̥ en oo een plotselinge vermindering. De getallen voor de hoogte der mondopening waren nl. 16 mM., 12 mM., 8 mM., 6 mM., 4 mM.; die voor de breedte: 36 mM., 31 mM., 16 mM., 14 mM., 7 mM. (zie fig. 1).









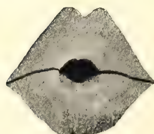


Fig. 1.

Hierbij sluiten zich onmiddellijk aan opnamen, die met het toestel van VON WILCZEWSKI[1]) van de lipbeweging werden vervaardigd. Dit toestel is zóó geconstrueerd, dat de krommen de verticale lipopening in werkelijke grootte aangeven. Fig. 2 geeft hiervan een beeld. Fig. 3 vertoont een curve, die met hetzelfde toestel werd verkregen door afwisselend dọl en do̥l te laten zeggen. Het verschil is duidelijk; de afmetingen komen weer ongeveer met de boven vermelde overeen. Beschouwt men uitsluitend den vorm van de mondopening dan kan men zich dus voorstellen, dat o̥ een oo is, die meer op a is gaan lijken, terwijl ọ een oo-klank is, die eigenschappen van de oe heeft aangenomen.

2. Vervolgens werd met het toestel van ZWAARDEMAKER[2]) ter registratie van spraakbewegingen, het zich stulpen van de bovenlip, het zich bewegen van de onderkaak ten opzichte van de bovenkaak en het zich aanspannen der spieren, waaruit de mondbodem bestaat, opgeschreven.

In fig. 4 blijkt duidelijk, hoe ook volgens de kaakopening a, o̥, oo, ọ en oe een afdalende reeks vormen, terwijl de lipstulping in die richting een toeneming vertoont (bij ọ en oe is de lipstulping bij deze proefpersoon vaak wat minder dan bij oo in verband met de benedenwaartsche beweging van de bovenlip, waarbij deze wat vlakker wordt). De mondbodemcurve blijve als te samengesteld liever onbesproken. Wat voor ons doel van het meeste belang is, is, dat de curven voor de beide „o"-klanken ook

[1]) Vox. Heft 3/6, 1922.

[2]) Onderz. Physiol. Lab. te Utrecht. Ve reeks I 1899—1901 bl. 76. Leerboek II bl. 98.

hier weer aanmerkelijk en op karakteristieke wijze verschillen. Hiermee stemmen zeer goed overeen de gegevens van EYKMAN [1]), die, met hetzelfde toestel werkend, als gemiddelde kaakopening vond

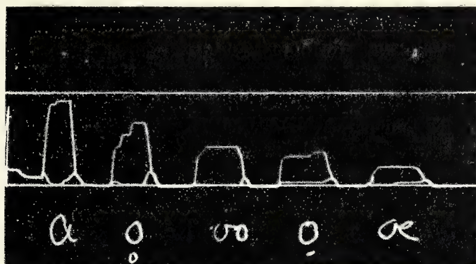


Fig. 2.

voor a van bat: 7,25 mM., voor o van pot: 5,50 mM., voor oo van boot: 4,75 mM., voor o van bot: 4,50 mM., voor oe van boet: 2,25 mM.

Fig. 3.

Fig. 5 vertoont eveneens curven van lip, kaak en mondbodem, op andere wijze verkregen, n.l. door middel van een mondtrechter, die tegelijkertijd registratie van bovengenoemde bewegingen toelaat. Dit toestel, dat voor een ander doel door mij werd geconstrueerd, zal elders uitvoerig beschreven worden. Daar het geen vast steunpunt heeft, mist dit toestel natuurlijk geheel de exactheid, die het toestel van ZWAARDEMAKER in zoo groote mate bezit. Toch is het om een voorloopigen indruk van iets relatiefs te geven zeer goed bruikbaar. In fig. 5 is te zien, hoe men bij „dọrscht" minder lipstulping en meer kaakopening heeft dan bij „dọrst", terwijl de mondbodemcurve in beide gevallen ongeveer gelijk is. In de mondtrechtercurve blijkt begrijpelijkerwijze, dat de luchtstroom bij o̥ krachtiger is dan bij ọ. Ook hier blijkt dus weer, dat beide klanken aanzienlijk verschillen.

[1]) Onderz. Physiol. Lab. te Utrecht Ve reeks II 1899—1901 blz. 202.

3. Bij de meeste personen wordt bij het uitspreken van oo o̥ en ọ het harde gehemelte niet of nauwelijks door r de tong aangeraakt. De methode van het kunstmatig gehemelte kan dus in dezen weinig steun geven. Door twee proefpersonen, waar bij het uitspreken van oo, een tamelijk groot gedeelte van het gehemelte werd aangeraakt, liet ik achtereenvolgens „pọp" en „bo̥b" zeggen. De uitkomsten hiervan zijn in fig. 6 weergegeven. Duidelijk is bij beiden het verschil: de o̥ geeft minder aanrakingsoppervlakte dan de ọ, terwijl, zooals bekend is, bij a het gehemelte in het geheel niet geraakt wordt.

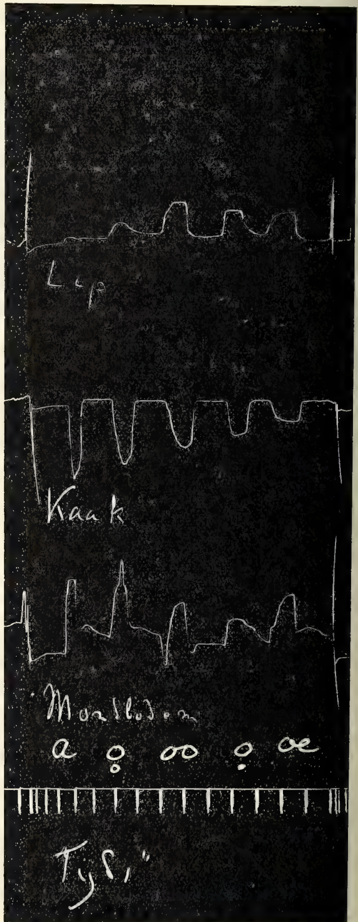


Fig. 4.

4. Ten slotte werd nog de larynxbeweging geregistreerd. Het is gemakkelijk te voelen, dat de larynx een eenigszins verschillenden stand inneemt in beide gevallen, dat hij n.l. bij ọ meer naar voren komt. Toch gelukte het mij niet steeds dit verschil op te schrijven. Ik beproefde het volgens de methode van Zwaardemaker [1]). De verkregen curven waren te wisselend van aanzien, dan dat bepaalde conclusies gemaakt konden worden. Wel bleek de larynx bij o̥ gewoonlijk naar achteren te bewegen (evenals bij a en oo), terwijl hij bij ọ , evenals bij oe, zij het in veel geringere mate,

---

[1]) Leerboek der Physiologie II, bl. 86.

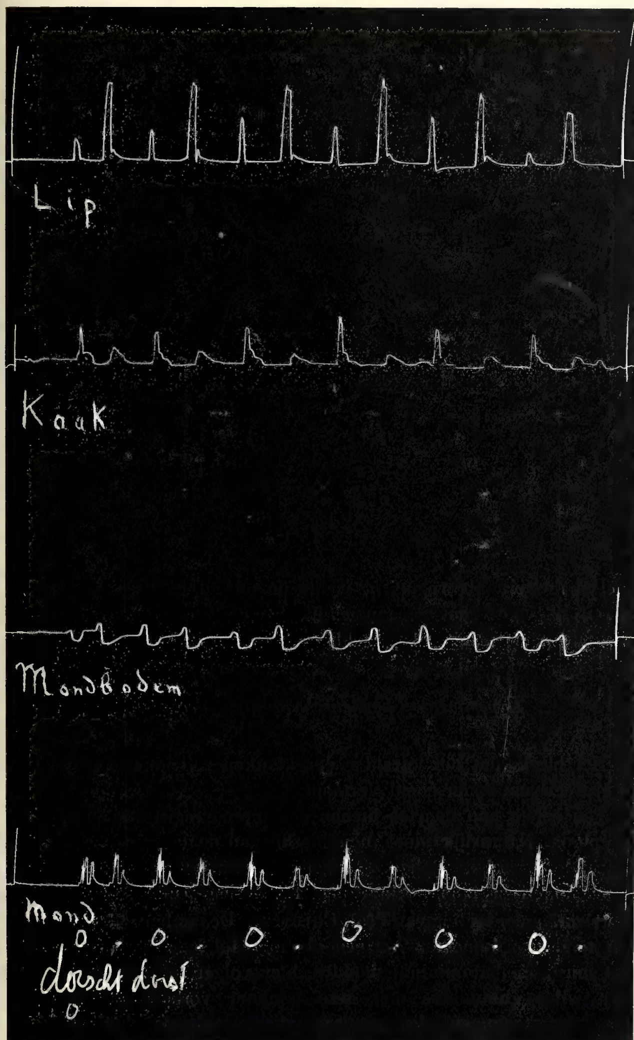


Fig. 5.

naar voren kwam. Fig. 7 geeft een stukje van een opname, waarin het verschil tusschen o̥ en ọ is te zien.

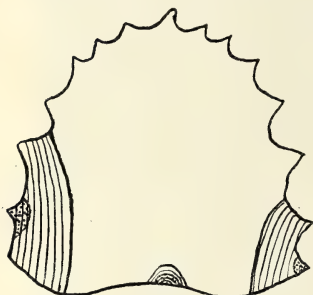


Fig. 6. Pp. v. d. S.



Fig. 6. Pp. l

||| : pọp

⁝⁝ : bo̥b

Fig. 6.

Dat de spraakbewegingen, welke de op het gehoor onderscheiden o̥ en ọ voortbrengen, aanzienlijk verschillen, is door het bovenstaande genoegzaam vastgesteld.

Experimenteel-phonetische analyse der klanken.

Het bleek, dat het karakter der klanken zelf ook een gemakkelijk registreerbaar onderscheid vertoont.

Ten eerste kan daartoe dienen een directe registratie op het kymographion. Natuurlijk moet men hierbij aan de te gebruiken tambour bijzondere eischen stellen. Dit gedeelte van het onderzoek werd in het phonetisch laboratorium der Tsjechische Universiteit te Praag verricht, onder leiding van Prof. Chlumský. De tambour had denzelfden vorm als een opnemer van een phonograaph; de membraan bestond uit mica. Een aluminium mondtrechter volgens Rousselot was door een wijde gummibuis met deze tambour verbonden. Fig. 8 vertoont de krommen, die op deze wijze van beide klanken werden verkregen. Natuurlijk zijn bij een dergelijke stijve membraan de

uitslagen niet groot; in verband hiermede verkrijgt men echter juist karakteristieke krommen voor de verschillende klanken. Ook in ons

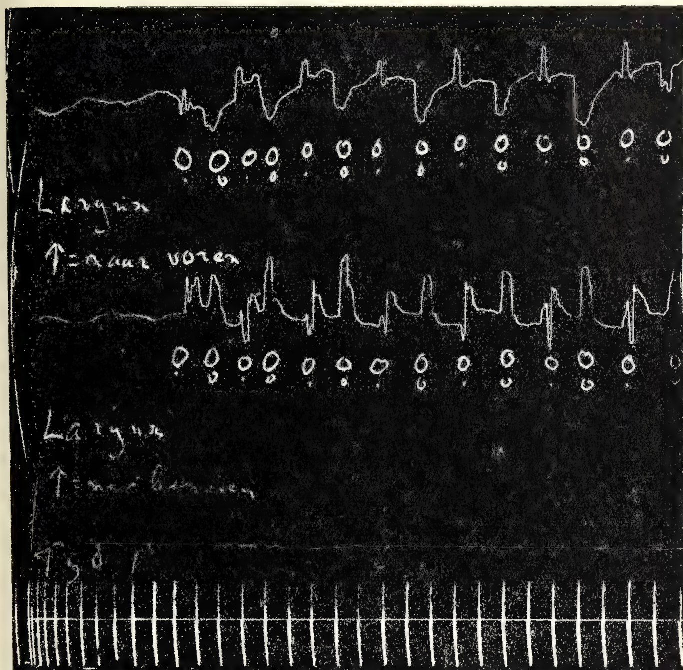


Fig. 7.

geval bestaat een duidelijk onderscheid tusschen de kromme voor o̥ en die voor ọ.

Ten tweede kan men den klank registreeren door middel van een phonograaph. Met behulp van een Edison phonograaph (oud model) werden opnamen gemaakt van een paar éénlettergrepige woorden, waarin de beide klanken voorkomen (bo̥d en bọt) en van de afzonderlijke klanken.

Het verschil der klanken in de phonographische opnamen vastgelegd, kan zeer veel aanschouwelijker en gemakkelijk meetbaar

gemaakt worden door de phonographische opnamen om te zetten in een kromme op beroet papier. Dit geschiedt o.a. met het toestel, dat LIORET voor dit doel heeft geconstrueerd. Een saphir volgt de ingrifsels in de phonograaphrol; de bewegingen, die hij daarbij uitvoert worden overgebracht op een hefboom met schrijfstift, welke op een draaienden cylinder schrijft. Daar een dergelijk toestel, voor

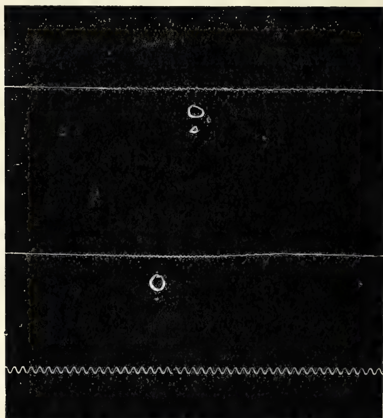


Fig. 8.

zoover mij bekend is, niet in Nederland aanwezig is, werd ook dit gedeelte van het onderzoek te Praag verricht onder leiding van Prof. CHLUMSKÝ. Wederom werden phonographische opnamen gemaakt van de woorden „bo̥d" en „bọt", met behulp van het toestel van LIORET. Vervolgens werden door middel van ditzelfde toestel deze krommen 300 maal vergroot op den beroeten cylinder overgebracht. Fig. 9 geeft een gedeelte van deze curven weer. De onderste en de bovenste kromme geven den klank ọ in bọt weer, in het eerste geval zwak, in het tweede geval luid uitgesproken. De middelste lijn geeft den klank o̥ in bo̥d. Het onderscheid tusschen de beide klanken komt op deze wijze duidelijk tot zijn recht en is gemakkelijk in getallen uit te drukken. De kromme voor o̥ gelijkt sterk op de voor aa kenmerkende kromme.

Nadat dus een aanzienlijk en standvastig verschil is vastgesteld,

is het gewenscht een overzicht te krijgen van het voorkomen van beide klanken in de Nederlandsche taal.

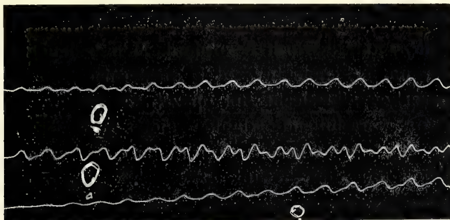


Fig. 9.

Taalkundige opmerkingen.

Beschouwd werden alle mij bekende éénlettergrepige Nederlandsche woorden met o en ook lettergrepen met o, die niet afzonderlijk voorkomen en waar invloed van de andere lettergrepen wel is uit te sluiten, b.v. lom(mer). Klanksamenstellingen, die wel goed uit te spreken zijn, maar die niet in de taal voorkomen, werden weggelaten.

Omtrent den invloed van de verschillende medeklinkers bleek nu het volgende.

De meest standvastige invloed is die der nasalen als volgklank. In dit geval komt n.l. zonder uitzondering de ọ-klank voor. Wat begrijpelijk is, immers de nauwe mondopening en zwakke mondluchtstroom bevorderen den volgenden neusluchtstroom.

Een tweede invloed is die der lipklanken; deze bevorderen het tot stand komen der ọ-klank vooral wanneer zij voorafgaan. Ook dit is begrijpelijk in verband met de nauwe mondopening.

De klanken, die achteraan in den mond gevormd worden, h, g, k en dergelijke, worden gewoonlijk gevolgd en, voor zoover zij eindklank kunnen zijn, ook voorafgegaan door ọ. Dit geldt ook in wat zwakkere mate voor z, s, l, r, n en j; voor n natuurlijk alleen wanneer zij voorafgaat. D en t hebben geen duidelijk herkenbaren invloed.

De r neemt een afzonderlijke plaats in; haar invloed is wisselend in verband hiermede, dat zij door verschillende personen en zelfs door eenzelfde persoon op verschillende oogenblikken zeer verschillend gevormd kan worden, n.l. op alle plaatsen, die tusschen tong-

punt-tanden en tongwortel-uvula liggen. Neemt men dit in aanmerking, dan kan men zeggen, dat de vooraan gevormde r de ọ, de keel-r de o̥-klank bevordert, zoowel wanneer zij voorafgaat, als wanneer zij volgt.

Hieruit blijkt, dat door de aangrenzende medeklinkers dus óf de o̥-klank óf de ọ-klank wordt bevorderd. Men bedenke echter, dat de eenige absoluut geldende invloed is die der nasalen als volgklank; de overige werken alle slechts tot op zekere hoogte. Het feit, dat de invloed van verschillende klanken niet standvastig blijkt, wijst er reeds op, dat nog minstens één andere factor in het spel is. Volkomen stellig blijkt dat hieruit, dat verschillende, overigens geheel gelijke woorden voorkomen met beide klanken, in twee verschillende beteekenissen, bv.:

bọt (zelfst. nmw. visch, been; bijv. nmw. stomp)	en bo̥d (zelfst. nmw. van bieden).
dọl (bijv. nmw.)	en do̥l (zelfst. nmw. deel van roeiboot).
dọrst (zelfst. nmw.)	en do̥rscht (werkw. van dorschen)
mọtje (dial. voor moet-je)	en mo̥tje (zelfst.nmw. v. mot, insect)
pọrt (werkw. van porren)	en po̥rt (zelfst. nmw. van porto of oporto).
tọbbe (zelfst. nmw.).	en to̥bben (werkw.).

Het schijnt mij toe, dat men door het bovenstaande er toe gebracht kan worden aan een etymologischen invloed te denken. De woorden, die in het Nederlandsch ọ hebben, komen in het Duitsch gewoonlijk met u voor, terwijl die met o̥ in het Duitsch b.v. o, a of au hebben. De waarde van dit verschijnsel waag ik niet te beoordeelen. Ook in andere met het Nederlandsch verwante talen schijnen aanwijzingen te vinden te zijn. Misschien zou het loonen in dit verband een historisch-etymologisch onderzoek te doen.

Wordt inderdaad een etymologische invloed vastgesteld, dan kan men zich dezen voorstellen als tot op zekere hoogte strijdend met den bovengenoemden spraakkundigen invloed. Merkwaardig is bv. het woord „pols", waarvan de uitspraak in dezen tijd weifelend is. Het schijnt mij toe, dat in dit geval door degenen, wier uitspraak goed verzorgd is, ọ gesproken wordt, terwijl de groote meerderheid hier o̥ spreekt. Het eerste zou, in verband met de afkomst van het woord

juister, het tweede in verband met de volgende l gemakkelijker kunnen zijn.

Samenvatting.

Er bestaan in het Nederlandsch twee korte o-klanken, die acustisch en phonetisch (misschien ook etymologisch) scherp van elkaar zijn te onderscheiden.

Physiologie. — J. VAN DER HOEVE en H. J. FLIERINGA: „*Bepaling van de kracht van de accommodatiespier.*"

De werking van de accommodatiespier, de musculus ciliaris, komt voor ons tot uiting door toeneming van de breking van de lens, de zoogenaamde accommodatie van het oog.

Op het gebied der accommodatie bestaan nog vele duistere punten, zoo is ons nog geheel onbekend het verband tusschen de samentrekking van de accommodatiespier en de brekingstoeneming van de lens.

Enkele ophthalmo-physiologen meenen, dat de contractie van de accommodatiespier de spanning in den ophangband van de lens, de Zonula Zinii, verhoogt, terwijl het meerendeel hunner met HELMHOLTZ aanneemt, dat samentrekking der ciliarspier eene ontspanning der Zonula Zinii veroorzaakt, waardoor aan de lens gelegenheid gegeven wordt om zich volgens hare elasticiteit te krommen.

Wanneer met toenemenden leeftijd de elasticiteit der lens verdwijnt, komt contractie der ciliarspier niet meer tot uiting in toeneming der lensbreking.

Zelfs al neemt men de laatste theorie aan, dan ontmoet men nog vele onopgeloste vragen b.v.:

a. is voor het bereiken van de grootst mogelijke accommodatie de sterkst mogelijke contractie van de accommodatiespier noodig?

DONDERS en LANDOLT namen dit aan en vinden hierin ook nog in den laatsten tijd aanhangers, o.a. CLARKE en DUANE.

FUCHS, HESS e.a. daarentegen meenen, dat de accommodatiespier zich veel sterker contraheeren kan dan noodig is voor het verkrijgen van maximale accommodatie.

FUCHS drukt dit aldus uit, de accommodatiespier kan zich eerst zoover samentrekken, dat de lens hare elasticiteit volledig volgen kan, zoodat maximale accommodatie ontstaat, het oog wordt dan ingesteld voor een punt, waarvan de plaats bepaald wordt door eene physische eigenschap n.l. de elasticiteit van de lens, daarom noemt FUCHS dit punt het *physisch naaste punt.*

Nu kan de spier zich nog belangrijk meer samentrekken, zoodat de Zonula geheel slap komt te hangen en de lens, indien hare elasticiteit onbegrensd ware, nog belangrijk in breking zou kunnen toenemen en het oog ingesteld zou worden voor een nog veel nader gelegen punt, waarvan de plaats bepaald zou worden door een physiologische eigenschap n.l. het contractievermogen van de accommodatiespier: *physiologisch naaste punt.*

Hess zegt, dat vrijwel algemeen wordt aangenomen, dat voor elke vermeerdering van de lensbreking met één dioptrie eene gelijke toeneming van de contractie van de ciliarspier noodig is.

Hoewel deze eenvoudige verhouding, met het oog op de ingewikkeldheid van het accommodatie-proces, niet vanzelf sprekend is, willen wij haar een oogenblik aannemen om daarna te trachten haar te bewijzen en wij zullen dan als eenheid van contractie van de ciliarspier aannemen de samentrekking, die noodig is om de accommodatie van 0 tot 1 dioptrie te brengen, welke eenheid wij kunnen noemen de „*myodioptrie*". Indien de onbewezen onderstelling van Hess juist is, zal men om 10 dioptrieën te kunnen accommodeeren een samentrekking van 10 myodioptrieën noodig hebben.

Wij kunnen nu ook de totale kracht van de accommodatiespier uitdrukken in myodioptrieën, deze toch zal bij een emmetroop persoon de reciproke waarde van den afstand van het physiologisch naaste punt zijn of anders uitgedrukt gelijk zijn aan het aantal dioptrieën, dat geaccommodeerd zou kunnen worden wanneer de elasticiteit van de lens onbegrensd ware.

Hier worden ons dus twee volgende vragen gesteld:

b. Is de myodioptrie bij een persoon een vaste eenheid? d.w.z. is voor elke dioptrievermeerdering van accommodatie één myodioptrie contractie van de accommodatiespier noodig?

c. Hoe groot is de kracht van de accommodatiespier uitgedrukt in myodioptrieën?

Andere vragen, die zich aan ons opdoen zijn:

d. Is het mogelijk reeds de geringste verlamming van de accommodatiespier te bepalen?

e. Is het mogelijk krommen te maken van den verlammenden invloed die bepaalde stoffen op de accommodatiespier uitoefenen?

Tot nog toe toch waren wij gewend de werking van de accommodatiespier na te gaan door het bepalen van het naaste punt.

Onderstellen wij nu (fig. 1) een persoon, die 10 dioptrieën kan accommodeeren en een kracht van de ciliarspier heeft groot 24 myodioptrieën, dan kan de accommodatiespier voor meer dan de helft verlamd zijn, terwijl toch nog het naaste punt niet van plaats

veranderd behoeft te zijn. Wij bemerken op deze wijze een eventueel aanwezige verlamming van de accommodatiespier eerst wanneer deze zeer ver gevorderd is.

Hierdoor weten wij omtrent de verlammende werking van stoffen, die de accommodatiespier slechts in geringe mate aantasten, weinig, zelfs van die stoffen, die wij dagelijks gebruiken, zooals cocaine.

Omtrent de accommodatieverlammende werking van cocaine vinden wij in de literatuur de meest uiteenloopende mededeelingen,

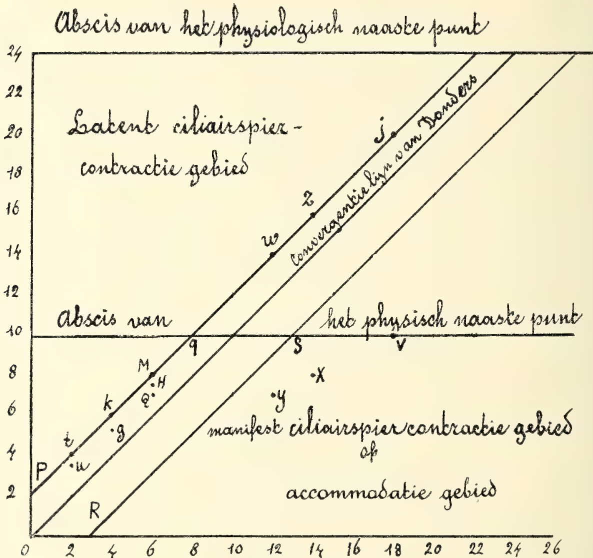


Fig. 1.

enkelen zeggen het werkt in het geheel niet op de accommodatiespier, anderen zeggen het werkt zeer sterk, derden het werkt wel, maar zwak.

Dr. Flieringa en ik hebben nu getracht de bovenaangegeven vragen tot oplossing te brengen door nauwkeurige bestudeering van de relatieve accommodatie.

Onder relatieve accommodatie verstaan wij de accommodatie bij een bepaalden graad van convergentie.

Er bestaat een waarschijnlijk aangeboren verband tusschen accommodatie en convergentie; wanneer een normaal emmetroop persoon een voorwerp wil fixeeren, moet hij daarbij evenveel meterhoeken convergeeren, als hij dioptrieën accommodeert.

Zetten wij in fig. 1 op de ordinaat af de myodioptrieën en dioptrieën, op de abscis meterhoeken, dan kunnen wij een lijn trekken door alle punten, waarvoor evenveel geaccommodeerd als geconvergeerd moet worden, nemen wij in ons schema de lineaire maat voor meterhoek en dioptrie even groot, dan deelt deze lijn den rechten hoek tusschen ordinaat en abscis in twee gelijke helften.

Deze lijn, die alle punten verbindt, waarvoor evenveel meterhoeken geconvergeerd als dioptrieën geaccommodeerd moeten worden, wordt de convergentielijn van Donders genoemd.

Was het verband tusschen accommodatie en convergentie absoluut en onverbreekbaar dan zou een normaal persoon alleen de punten der convergentielijn tegelijk scherp en enkel kunnen zien, alle andere punten niet; ieder met een refractieafwijking of heterophorie behept persoon, zou geen enkel punt gelijktijdig scherp en enkel kunnen waarnemen.

Gelukkig nu is het verband tusschen accommodatie en convergentie min of meer los, zoodat men bij elke convergentie de accommodatie eenigszins sterker en zwakker kan maken dan met den graad van convergentie overeenkomt.

Convergeert men 6 meterhoeken, dan komt hiermede overeen een accommodatie van 6 Dioptrieën, welke men b.v. verhoogen kan tot 8 Dioptrieën en verminderen kan tot 3 Dioptrieën. Men noemt dan van 3 tot 8 Dioptrieën de relatieve accommodatie bij een convergentie van 6 meterhoeken; het deel van 6—8 Dioptrieën heet de positieve, van 6—3 Dioptrieën de negatieve relatieve accommodatiebreedte.

De relatieve accommodatiebreedte is individueel zeer verschillend van grootte en kan door langdurige oefening tot een bepaalden graad vergroot worden. Het is niet noodig dat het negatieve en positieve deel der relatieve accommodatie aan elkaar gelijk is.

Men kan nu voor alle punten in het manifeste ciliarspier-contractiegebied de relatieve accommodatie bepalen en de zoo gevonden relatieve naaste en verste punten verbinden.

Volgens Hess is de relatieve accommodatie bij elke convergentie even groot, zoodat bij ieder normaal persoon de lijnen der relatieve naaste en relatieve verste punten evenwijdig loopen aan de convergentielijn van Donders. (Zie fig. 1: *pq.* en *R.S.*)

Hess meent, dat men deze lijnen in het latente ciliarspier-contractiegebied mag verlengen, maar kon dit niet bewijzen, daar in het latente gebied geen metingen gedaan konden worden. Wij krijgen dus als volgende vraag:

f. Hoe verloopen de lijnen der relatieve naaste en verste punten in het latente ciliarspiercontractiegebied?

Onze redeneering is nu als volgt; wanneer de in fig. 1 ondérstelde persoon 6 Meterhoeken convergeert, kan de niet verlamde ciliarspier op den prikkel dezer convergentie en door uiterste krachtsinspanning 8 Myodioptrieën contraheeren en dus accommodeeren op M., zoodra de spier ook maar in het minst verlamd zal zijn, zal zij op dezen zelfden prikkel minder sterk contraheeren b.v. slechts $7\frac{1}{2}$ Myodioptrie en dus accommodeeren op H.

Door het bepalen der relatieve accommodatie kunnen wij dus bij een persoon, van wie wij de accommodatiefiguur kennen, reeds de allergeringste verlamming der spier bemerken. (vraag *d*.). Om te zien of de myodioptrie een vaste waarde is, verlammen wij de spier tot een bepaalden graad, b.v. zoodat bij convergentie van 6 Meterhoeken slechts tot Q geaccommodeerd kan worden; de spier verricht dan in plaats van 8 slechts 7 myodioptrieën-werking; zijn alle myodioptrieën gelijkwaardig, dan heeft de spier slechts $^7/_8$ harer kracht en is voor $^1/_8$ verlamd. Wij controleeren dit door bij dezelfde verlamming bij andere convergenties eveneens de relatieve accommodatie te meten en den verlammingsgraad te bepalen. Wordt de verlammingsgraad telkens dezelfde gevonden zoodat men bij convergentie van 4 Meterhoeken slechts accommodatie tot $g = 5^1/_4$ myodioptrie inplaats van 6; bij convergentie van 2 Meterhoeken slechts accommodatie tot $u = 3\frac{1}{2}$ myodioptrie inplaats van 4 vindt; dan blijkt dat steeds de verlamming $^1/_8$ bedroeg. Men kan dit nu bij zoovele verlammingsgraden en convergenties controleeren als men wenscht, zoodat de vraag *b*. of bij een zelfde persoon de myodioptrie een constante waarde is, met zekerheid opgelost kan worden.

Om den loop van de lijnen der relatieve naaste en verste punten in het latente gebied te bepalen, verlamt men de accommodatiespier tot een bepaalden graad, stel de helft, zoodat men in fig. 1 bij convergentie van 2 meterhoeken een grootste accommodatie van 2 D. inplaats van 4 D., bij convergentie van 4 m.h. 3 D. inplaats van 6 D., bij convergentie van 8 m.h. 5 D. inplaats van 10 D. vindt; wordt nu bij convergentie van 12 meterhoeken, een grootste accommodatie van 7 D. bereikt, (tot y in fig. 1) dan mag men zeggen de halfverlamde spier contraheert op dezen prikkel 7 myodioptrieën,

de normale spier zou er dus met $2 \times 7 = 14$ myodioptrieën op gereageerd hebben; zoodat het relatieve naaste punt bij convergentie van 12 meterhoeken zou gelegen zijn bij W op de ordinaat van 12 en de abscis van 14.

Vindt men bij convergentie van 14 meterhoeken een grootste accommodatie van 8 D. (tot X in fig. 1), dan zou de gezonde spier op dezen prikkel 16 myodioptrieën kunnen contraheeren en wordt hiermede het punt Z. op de abscis van 16 en ordinaat van 14 bepaald.

Vindt men bij convergentie van 18 meterhoeken een accommodatie van 10 dioptrieën, dan bepaalt men daarmede het punt j op de abscis van 20 myodioptrieën.

Op deze wijze kan men bij verschillende convergenties en verschillende verlammingsgraden in het latente gebied zoovele punten van de lijn der relatieve naaste punten bepalen als men wenscht en dus deze lijn geheel trekken.

Het verloop der lijn der relatieve verste punten in het latente ciliarspiercontractiegebied wordt op dezelfde wijze bepaald, zoodat ook vraag *f.* is opgelost.

De sterkte van de accommodatiespier bepalen wij op de volgende wijze.

Nadat van een persoon het relatieve accommodatiegebied geheel bepaald is, verlamt men de spier. Stel, dat bij de persoon uit fig. 1 de accommodatiespier voor $^1/_4$ verlamd is; men bepaalt nu het absolute naaste punt, ligt dit nog op 10 c.M. dan kan men zeggen $^3/_4$ van de spierkracht geeft een contractie van minstens 10 myodioptrieën, de spierkracht is dus minstens $^4/_3 \times 10 = 13^1/_3$ myodioptrie.

Bedraagt de verlamming $^1/_3$ en is de accommodatie nog 10 D, dan kan men 1^e^ vraag *a.* als opgelost beschouwen: een gedeeltelijk verlamde spier kan toch de grootst mogelijke accommodatie geven, dus is de grootst mogelijke contractie daartoe niet noodig en 2^e^ geeft $^2/_3$ van de spierkracht een contractie van minstens 10 myodioptrie dus is de spierkracht minstens $^3/_2 \times 10 = 15$ myodioptrieën.

Kan bij de verlamming tot de helft nog 10 D. accommodatie bereikt worden dan is de kracht minstens 20 m.d.

Wordt bij verlamming tot $^1/_3$ der kracht nog slechts 8 D. accommodatie bereikt dan is de kracht $3 \times 8 = 24$ myodioptrie.

Controle wordt verkregen door verdere verlamming; is er bij verlamming tot $^1/_4$ der kracht 6 D. accommodatie dan is de kracht $4 \times 6 = 24$ myodioptrie, is er bij verlamming tot op $^1/_6$ nog 4 D. accommodatie dan is de kracht $6 \times 4 = 24$ myodioptrie enz. zoodat

men de verkregen uitkomst met zoovele waarnemingen controleeren kan als men wenscht.

Stemmen alle verkregen waarden voldoende overeen, dan is niet alleen de spierkracht bepaald, maar ook bewezen, dat de myodioptrie een constante waarde heeft en de methode juist is, anders konden de waarden niet voortdurend eensluidend gevonden worden.

Een kromme van de verlammende werking eener stof kan verkregen worden door eerst de totale kracht van de spier bij een persoon te bepalen, dan de verlammende stof in het oog te brengen en op regelmatige tijden de kracht van de spier opnieuw te bepalen en de uitkomsten daarvan in een schema op te teekenen.

Hiertoe zetten wij (fig. 2) op de abscis af den tijd in minuten, op de ordinaat de spierkracht in myodioptrieën. Stel de kracht is bij aanvang van het onderzoek 24 myodioptrieën en na 5 minuten, is er nog geen verlamming, dan teekent men het punt B aan op de

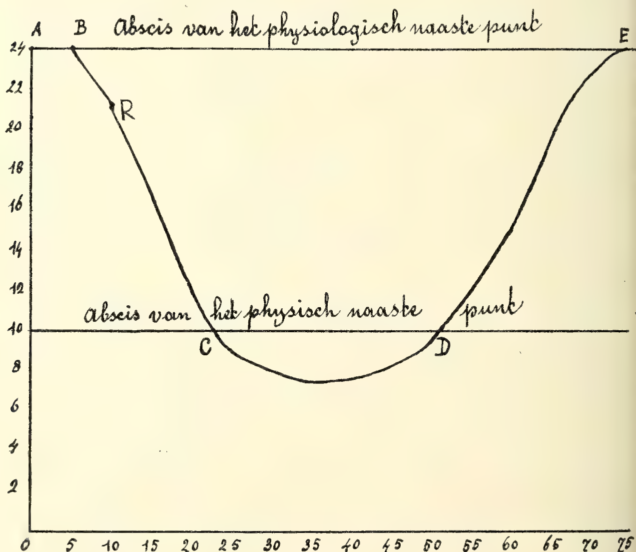


Fig. 2.

abscis van 24 en de ordinaat van 5; is na 10 minuten de spier voor $^1/_8$ verlamd, dan is de kracht nog 21 myodioptrieën en heeft

men een punt R. gevonden op de abscis van 21 de ordinaat van 10. Op deze wijze voortgaande, telkens op de boven aangegeven manier den verlammingsgraad van de spier bepalend, kan men de geheele verlammingskromme A. B. C. D. E. vinden en opteekenen. Dit onderzoek verschaft ons weder een uitstekende controle op de juistheid der methode; zoodra toch de kromme de abscis van het physisch naaste punt overschreden heeft kunnen wij de verlammingsgraden ook direct vinden door bepaling van het absolute naaste punt en kan dus het deel C. D. der kromme op twee geheel verschillende wijzen bepaald worden.

Geven deze geheel het zelfde resultaat of vertoonen zij, overeenkomstig de mogelijke fouten der methode voldoende overeenstemming dan is hierin een bewijs gelegen voor de juistheid dér methode.

Wij hebben nu voor een tweetal personen één van 31 jaar, één van 24 jaar de accommodatiefiguren bepaald en den verlammenden invloed van cocaïne en homatropine op de ciliarspier nagegaan.

U ziet uit onze krommen hoe het resultaat zoodanig is, dat wij meenen te mogen besluiten, dat de methode goed is. Wij vonden bij den een een kracht der ciliarspier van ongeveer 24 myodioptrieën, bij den ander van 20 myodioptrieën.

Het bleek, dat totale contractie van de ciliarspier niet noodig is om de grootst mogelijke accommodatie te verkrijgen, dat de myodioptrie voor elk dezer beide personen een constante waarde heeft, dat de lijnen van relatieve naaste en verste punten in het latente ciliarspiercontractiegebied evenwijdig aan elkaar en aan de convergentielijn van DONDERS loopen, en dat het mogelijk is bij personen van wie men de accommodatiefiguren kent reeds de geringste verzwakking der ciliarspier aan te toonen.

Cocaïne heeft een cumulatief verlammende werking op de accommodatiespier, die individueel zeer verschillend is, het is dus geen wonder, dat er in de literatuur zoo verschillende aangiften omtrent deze werking bestaan, daar het al dan niet constateeren der werking afhankelijk was van:

het aantal malen, dat de cocaïne ingedruppeld wordt; van den leeftijd van den waarnemer; van individueele eigenaardigheden; van den tijdsduur der waarneming en van de intervallen tusschen de waarnemingen.

Men kan uit de verkregen resultaten nog menig andere gevolgtrekking maken omtrent den invloed van heterophorie, refractietoestand enz. op de accommodatiefiguren en van zwaktetoestanden der spier op het vermogen om in de nabijheid te werken; het was thans echter alleen mijn doel er op te wijzen hoe de methode van

onderzoek der relatieve accommodatie in staat is ons inzicht in de accommodatie te verdiepen en mogelijk maakt den invloed van verschillende stoffen op de accommodatiespier na te gaan.

Het is te betreuren, dat deze methode op zichzelf zoo lastig te beheerschen is, dat zij wel nooit een methode ter klinisch onderzoek van velen zal worden, maar beperkt zal moeten blijven tot laboratoriumonderzoek van weinigen.

Natuurkunde. — H. R. WOLTJER: „*Magnetische onderzoekingen. XXII. Over de bepaling der magnetisatie bij zeer lage temperaturen en over de susceptibiliteit van gadoliniumsulfaat in het temperatuurgebied van vloeibare waterstof*". (Mededeeling N°. 167*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. HAGA.)

§ 1. *Inleiding.* De beteekenis van uitbreiding van het onderzoek der magnetisatie van paramagnetische stoffen tot de temperaturen, bereikbaar met vloeibaar helium, die a priori te verwachten was, is door het voorloopig onderzoek der magnetisatie van gadoliniumsulfaat in vloeibaar helium, door KAMERLINGH ONNES in 1914 verricht[1]), op overtuigende wijze bevestigd. De toen verkregen resultaten toonden van welk belang het was het onderzoek van gadoliniumsulfaat voort te zetten en de eerste meer qualitatieve bepalingen door nauwkeuriger, quantitatieve aan te vullen. Ook andere stoffen, zooals de paramagnetische chloriden[2]) kwamen voor onderzoek in helium in aanmerking. Nadere beschouwing van het werk van 1914 toonde echter, dat herhaling der toen verrichte bepalingen niet vruchtbaar kon zijn zonder nader onderzoek van de gevolgde me-

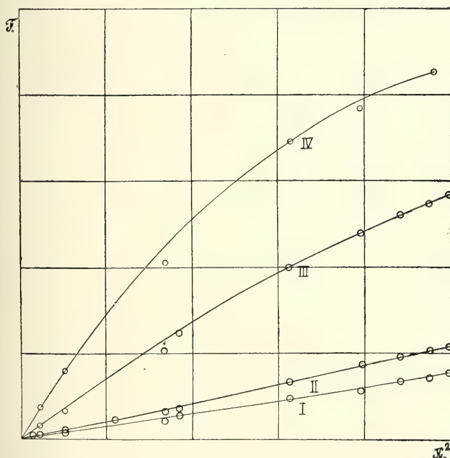


Fig. 1.

[1]) H. KAMERLINGH ONNES, Deze Verslagen, Mei 1914, p. 172; Leiden Comm. N°. 140d. Zie ook idem, Rapport Solvay 1921, p. 131. Leiden Comm. Suppl. N°. 44a.
[2]) l. c. p. 154, resp. p. 25.

thode, nauwkeuriger calibraties en bestudeering van de aan te brengen correcties. Zoo valt, wat de rechtstreeksche resultaten der waarneming betreft, in het bijzonder op, dat bij de waterstoftemperaturen aanzienlijke afwijkingen van de evenredigheid tusschen de kracht (F) en het quadraat van de veldsterkte tusschen de polen van den electromagneet (H^2) voorkomen (zie fig. 1, aan genoemde verhandeling [1]) ontleend), terwijl ook, als men de resultaten weergeeft in de terminologie van LANGEVIN's theorie van paramagnetische gassen (zie fig. 2, overgenomen uit Leiden Comm. Suppl. N°. 44a) er allezins aanleiding is voor de vraag, of er niet systematische fouten in het spel zijn.

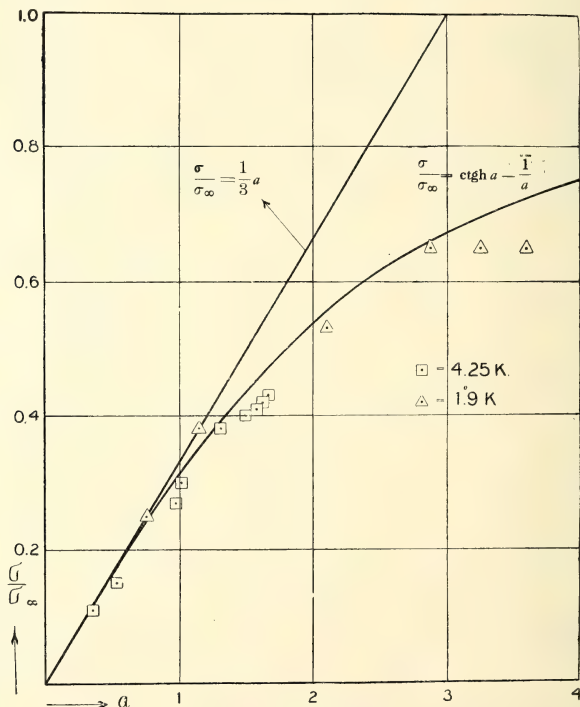


Fig. 2.

[1]) Deze fouten worden in de verhandeling reeds toegeschreven aan waarschijnlijke onjuistheden in de topografie.

De methode voor de meting der magnetisatie, haar foutenbronnen en de correcties vormen het onderwerp van de volgende paragrafen. In het bijzonder bij de topografische calibratie van den electromagneet zullen we wat langer stilstaan. Deze geschiedde gedeeltelijk door het onderzoek van gadoliniumsulfaat in vloeibare waterstof en leverde daardoor nieuw materiaal voor de kennis van de susceptibiliteit dier stof, waardoor oude resultaten bevestigd werden. Dit nieuwe materiaal zal tevens medegedeeld worden.

§ 2. *Toestellen en methode.* De magnetisatie werd afgeleid uit de kracht, door een inhomogeen magnetisch veld op een kleine hoeveelheid stof uitgeoefend, en voor de meting dier kracht werd dezelfde toestel gebruikt als bij het onderzoek van gadoliniumsulfaat in 1914, behoudens een kleine wijziging, wat betreft de bevestiging van het buisje, dat het te onderzoeken zout bevatte. Daar er toenmaals van dezen toestel geen beschrijving gegeven is, mogen hier eenige bijzonderheden vermeld worden. De constructie, uitgevoerd door Mr. G. J. Flim, bedrijfschef van het Natuurkundig Laboratorium, berust op dezelfde principes als die van den toestel van Kamerlingh Onnes en Perrier voor het onderzoek van paramagnetische stoffen [1]: het proefobject bevindt zich onderaan een lange stang, den „drager". Deze hangt aan een of twee drijvertjes, welke op kwik drijven. De kracht, welke de stof van het magnetische veld ondervindt, wordt gecompenseerd door een of andere bekende kracht en de compensatie wordt gecontroleerd met behulp van een kijkertje en een aan den drager bevestigde schaaldeeling (*Sc.* fig. 3). Enkele wijzigingen waren vereischt met het oog op de bijzondere omstandigheden. De toestel wordt van boven af in de heliumcryostaat (C) ingelaten en steunt op den rand (R) daarvan. Tegenwichten, aan het verbindingsstuk van cryostaat en liquefactor aangrijpende, bewerken evenwicht. Het gewicht van den toestel is zoo klein mogelijk gehouden. Mede daarom is de ringvormige kwikbak van den toestel van Kamerlingh Onnes en Perrier vervangen door een klein glaasje (G) met slechts één drijvertje (Dr) erin. De betrekkelijk groote krachten, die bij deze proeven optraden (tot bij de 200 gram), noopten magnetische compensatie te kiezen in plaats van de electrodynamische van twee draadklossen, zij het ook, dat de nauwkeurigheid daardoor verminderde. De compenseerende kracht wordt geleverd door de attractie, welke een stroom van geschikte sterkte, gaande door een draadklos D, aan den kop van den toestel, uitoefent op een week ijzeren staaf

[1]) H. Kamerlingh Onnes en Albert Perrier, Deze Verslagen October 1913, p. 499 en Januari 1914, p. 835. Leiden Comm. N°. 139a.

S, die boven op den drager bevestigd is. De stand van den klos kan door ringen (*Ri*) er onder te schuiven zóó geregeld worden, dat de

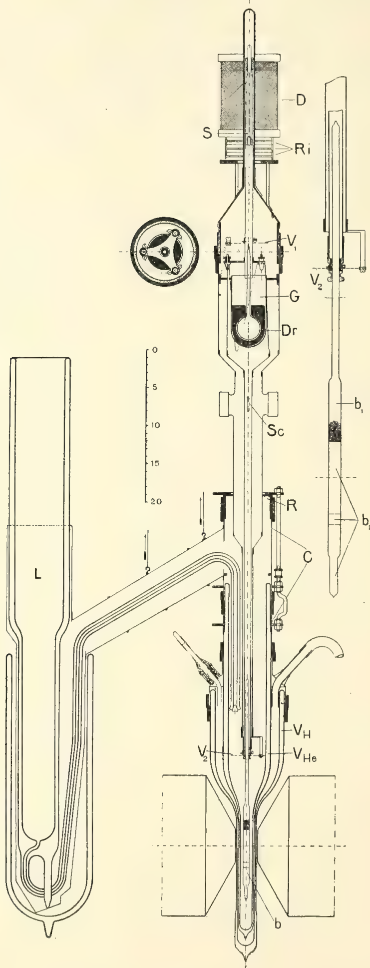


Fig. 3.

draadklos, naar keuze, naar boven of beneden trekt. De afstand van de week ijzeren staaf tot het interferrum van den electromagneet is zóó gekozen, dat de werking van de laatste op de eerste geheel te verwaarloozen is.

Het buisje (b, zie de detailteekening in fig. 1) waarin de magnetische stof zich bevond, wordt zóó gemaakt en is zóó geplaatst, dat de verdeeling van het glas zooveel mogelijk symmetrisch is t.o.v. een horizontaalvlak door het midden der polen van den electromagneet. Daardoor is de aantrekking van den magneet op het glas tot een minimum beperkt en te verwaarloozen. De afmetingen zijn zóó gekozen, dat de stof zich ongeveer op de plaats van maximale $\frac{\partial H}{\partial z}$ bevindt, als het buisje symmetrisch in het veld staat. Het benedendeel (b_2) van het buisje is luchtledig gepompt, in het bovendeel (b_1) is een beetje heliumgas ingelaten, waardoor temperatuurevenwicht van het poeder en de omgeving en van de deelen van het poeder onderling bevorderd wordt. De stof bevindt zich tusschen twee glazen plaatjes, één in het buisje ingesmolten, en één los. Een watje houdt het laatste op zijn plaats. Twee platte veertjes V_1, V_2 belemmeren zijdelingsche beweging van den drager. Het onderste is aan den drager en niet, zooals vroeger, aan het buisje bevestigd, zoodat de buisjes door andere vervangen kunnen worden, zonder den stand van den drager te veranderen.

De poolvlakken van den grooten Weissmagneet hebben 4 cm. middellijn en staan 26,5 mm. van elkander. De halve tophoek der kegelvormige begrenzingsvlakken is 60°.

De compenseerende kracht, als functie van de sterkte van den stroom door den draadklos, werd meermalen zoo zorgvuldig mogelijk bepaald; aan het buisje werden dan gewichten gehangen. Niettegenstaande alle voorzorgen bleven er tusschen de verschillende calibraties onopgehelderde verschillen bestaan. De uiterste verschillen ongeveer 2 °/₀. Bij de berekening van een waarnemingsreeks werd het gemiddelde van de calibraties vooraf en achterna gebruikt.

De specifieke magnetisatie, σ, werd uit de gemeten kracht bepaald door de betrekking

$$F\,g = m\sigma \frac{\partial H}{\partial z}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin F de kracht in (grammen) voorstelt, uitgeoefend op de massa m. De z-coördinaat wordt gemeten langs een verticaal van af het midden van het interferrum; H is de component van de veldsterkte loodrecht op het verticale symmetrievlak van de magneet; $g = 981.3$.

Voor ieder „punt" d.w.z. iedere meting van de kracht voor een bepaalde waarde van het magnetische veld en een bepaalde temperatuur werd de sterkte van den stroom in den draadklos bepaald, noodig, om den drager in een zekeren nulstand te brengen, als het magnetische veld „aan" en als het „af" was. Deze bepalingen geschiedden steeds voor beide stroomrichtingen in den klos en in den magneet.

§ 3. *Correcties, hulpmetingen en foutenbronnen.*

a. Krachten op den leegen drager. Het bleek, dat deze niet geheel te verwaarloozen waren en met dalende temperatuur toenamen. Onderzoek van de verschillende onderdeelen leerde, dat vooral een klein schroefje onder aan den drager (bij V_1) daarvoor verantwoordelijk was. Bevreemdend is de relatief sterke toeneming van die krachten bij daling der temperatuur van 20° K. tot 14° K. Bijv. bij 70 amp. door den magneet is de aantrekking bij

kamertemperatuur	0,259 gr.
20° K.	0,326 „
14° „	0,350 „

Het is niet, wat men verwachten zou bij verontreiniging van het messing door ijzer. Ook zou men bij een dergelijk relatief zeer sterk aangroeien in het waterstofgebied vreezen voor zeer groote krachten bij heliumtemperaturen. Toch zijn deze dan niet groot, zooals blijkt daaruit, dat er geen systematisch verschil is tusschen de waarnemingen, waarbij de bedoelde bestanddeelen van den drager zeker nog onder en zeker op eenigen afstand boven den spiegel van het vloeibare helium stonden.[1]) Door omstandigheden was het niet goed meer mogelijk deze krachten, wier sterke aangroeiing in het waterstofgebied eerst achterna bleek, bij heliumtemperaturen te bepalen en in het licht van de vorige opmerking scheen dit ook niet volstrekt noodzakelijk. In het volgende zijn dan ook de correcties voor de krachten op den leegen drager slechts voor de waterstoftemperaturen aangebracht.

b. Correctie voor ontmagnetisatie. Deze kan bij de temperatuur van vloeibaar helium aanzienlijke waarden bereiken. In het geval van een bol van homogeen materiaal van dichtheid d in een homogeen veld is het ontmagnetiseerende veld $-\frac{4}{3}\pi\sigma d$. Bij onze proeven beantwoordden de omstandigheden niet geheel aan deze voorwaarden. Het lichaam bestaat uit een *poeder* in den vorm van een *cylindertje* en bevindt zich in een inhomogeen veld. Door Dr. Breit is van

[1]) Zie volgende mededeeling § 3 noot.

deze correctie een uitvoerige studie[1]) gemaakt. Volgens hem verkrijgt men een eerste benadering voor de ontmagnetisatie, als men bovenstaande formule toepast, niet met de dichtheid van het poeder, maar met de dichtheid van het poedermateriaal. Deze correctie is, zoo noodig, op die manier aangebracht.

c. Topografische correcties. $\frac{\partial H}{\partial z}$ is in eerste benadering evenredig met de veldsterkte in het midden van het interferrum: H_0. De evenredigheidsfactor werd berekend uit een ballistische topografische calibratie van den magneet voor den aangegeven poolafstand[2]). Bij stroomsterkten van 10 en 20 amp. werd geen merkbaar verschil in de topografie geconstateerd en werd gevonden voor $z = 2.45$ cm. (waar $\frac{\partial H}{\partial z}$ ongeveer maximaal is):

$$H = 0.815 \, . \, H_0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0.199 \, . \, H_0 \quad . \quad . \quad . \quad (2,\ 3)$$

Berekent men echter met deze waarden voor gadoliniumsulfaat[3]) de kracht F, als functie van H_0^2, dan vindt men niet, zooals men op grond van vroegere metingen[4]) verwachten mag, (afgezien van kleine correcties indien de formule van LANGEVIN gevolgd wordt) evenredigheid van F met H_0^2, maar afwijkingen tot ca. 20 °/₀ toe. Dit blijkt uit tabel I en fig. 4. Aan de waargenomen waarden van F, die in de 3e kolom zijn opgegeven, wordt nu ten eerste eene correctie aangebracht voor de demagnetisatie door vermenigvuldiging met $1 + \frac{4}{3} \pi d_0 \chi$ waarin voor d_0 overeenkomstig het onder *b* opgemerkte 3 genomen is[5]) en voor χ de waarde, die uit de ongecorrigeerde metingen volgt. Bij 20°.42 K. is deze correctie 1.2 °/₀, bij 13°.98 K. 1.8 °/₀. Onder L is de correctie voor afwijkingen volgens de formule van LANGEVIN in °/₀ aangegeven. Met deze beide correcties is een schijnbare CURIE-constante $C' = \chi T$ berekend.

De voor C' gevonden waarden blijken sterk afhankelijk van de

[1]) G. BREIT, Amsterdam Proceedings 25, p. 293; Leiden Comm. Suppl. N°. 46.

[2]) De calibratie had eigenlijk betrekking op een poolafstand van 26 mm., niet 26.5 mm., welke laatste afstand bij de hier beschreven proeven voorkwam.

De parameters van dit magnetische veld vallen niet onder die, waarvoor FORRER zoo vele en zoo belangrijke gegevens verstrekt heeft. (J. FORRER, dissertatie Zürich, 1919).

[3]) Het gadoliniumsulfaat, $Gd_2(SO_4)_3 \, . \, 8H_2O$, was afkomstig van het voorraadje, indertijd welwillend door Prof. URBAIN afgestaan. Twee buisjes werden er mede gevuld, Gd I en Gd II bevattende resp. 0.4735 en 0.4414 gr. gadoliniumsulfaat.

[4]) H. KAMERLINGH ONNES en E. OOSTERHUIS, Deze Verslagen, 29 Juni 1912, p. 275 § 6, Leiden Comm. N°. 129*b* § 6.

[5]) P. GROTH, Chem. Krystallographie II (1908), p. 460.

veldsterkte. Aan fouten in de calibratie van de veldsterkte kan dit niet liggen. Deze mag tot op enkele $^0/_{00}$ nauwkeurig geacht worden. De reden moet daarin liggen, dat men bij de lage en hooge waarden van H_0 de bedoelde evenredigheid niet meer mag verwachten. [1])

TABEL I.

Gadoliniumsulfaat II ($m = 0{,}4414$ gr.)

$T = 20°.42$ K.

Nr.	I	F	H_0	L	$10^2\, C'$	q	$10^2\, C$	$\frac{(C_w - C_g)}{C_w}$
4	5 amp.	0.81 gr.	3295	0.0	2.100	1.018	2.064	+1.7%
5	5	0.80						
6	10	3.10	6605	0.1	2.015	0.997	2.021	−0.45
3	15	6.98	9875	0.2	2.031	1.000	2.031	0.0
7	20	12.00	12940	0.4	2.038	1.005	2.028	−0.1
2	30	20.66	17320	0.8	1.962	0.963	2.037	+0.3
8	30	20.56						
9	45	25.99	20235	1.2	1.820	0.897	2.029	−0.1
1	60	28.17	21600	1.4	1.729	0.856	2.021	−0.45
10	60	28.00						

$T = 13°.98$ K.

Nr.	I	F	H_0	L	$10^2\, C'$	q	$10^2\, C$	$\frac{(C_w - C_g)}{C_w}$
15	4	0.74	2627	0.1	2.093	1.026	2.040	+0.5
16	5	1.13	3295	0.1	2.032	1.018	1.996	−1.7
14	10	4.52	6605	0.2	2.025	0.997	2.031	0.0
13	20	17.41	12940	1.0	2.046	1.005	2.036	+0.3
17	20	17.39						
18	30	29.32	17320	1.9	1.942	0.963	2.017	−0.7
12	45	37.36	20235	2.6	1.826	0.897	2.036	+0.3
11	60	40.33	21600	3.0	1.739	0.856	2.033	+0.1
19	60	40.44						
20	70	41.77	22230	3.2	1.701	0.835	2.037	+0.3

[1]) Aan deze afwijking van de evenredigheid moet o. i. ook worden toegeschreven, dat in fig. 2 de punten voor de hooge veldsterkten bij 4°.25 K. en bij 1°.9 K. dezelfde soort van afwijking vertoonen.

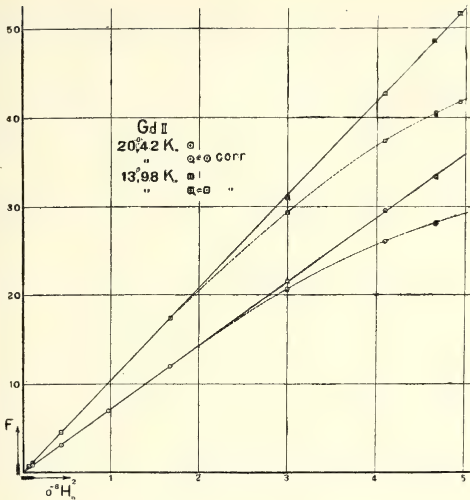


Fig. 4.

We hebben nu gesteld:

$$\left.\begin{aligned} H &= s \,.\, 0.815 \,.\, H_0 \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= r \,.\, 0{,}199\; H_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$q = s \,.\, r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en voor 15 amp. $s = r = 1$.

De grootheden q, s en r noemen we de topografische correcties.

De schijnbare Curie-constante C' hangt met de ware C aldus samen:

$$C' = qC$$

en is dus onafhankelijk van de temperatuur. Fig. 5 laat zien, hoe voor C' binnen de nauwkeurigheidsgrenzen der waarnemingen telkens bij beide waterstoftemperaturen inderdaad dezelfde waarde gevonden wordt. Alleen voor 5 amp., waar de krachten klein zijn en de meting minder nauwkeurig, is er een grootere afwijking.

De waarden voor C' zijn grafisch vereffend en daarna is de topografische correctie q bepaald uit $q = \dfrac{C'}{C'_{15\ \text{amp.}}}$

In de kolom $10^3 C$ is de voor q gecorrigeerde waarde van $10^3 C'$

opgenomen en in de laatste kolom het verschil (in procenten uitgedrukt) van $10^3 C$ met de gemiddelde waarde 2,030.

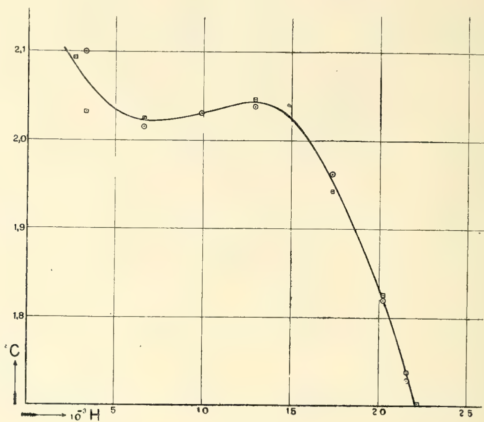


Fig. 5.

r werd bepaald uit proeven over de attractie van twee kleine Zweedsch ijzeren ellipsoides [1]), die zoo goed mogelijk op dezelfde plaats gebracht werden als de stoffen bij de eigenlijke proeven innamen. Daarbij werd gebruik gemaakt van de metingen van STEINHAUS en GUMLICH [2]) voor het verband tusschen veldsterkte en magnetisatie, als verzadiging bijna bereikt is, de z.g. naderingswet. s werd berekend volgens formule (5). De bepaalde waarden voor r en s werden grafisch vereffend [3]).

De verdeeling van het magnetisme over de poolvlakken van den grooten magneet is bij dit alles rigide ondersteld [4]).

Zoo werden de in tabel II gegeven waarden gevonden.

d. Correcties voor diamagnetisme van vloeistofbad en van anion konden geheel buiten beschouwing blijven.

Wat de *nauwkeurigheid en de foutenbronnen* betreft, zij er aller-

[1]) Massa's 30.0 en 32.0 mg., lange as 6.2 mm., korte as 1.1 m.m.

[2]) W. STEINHAUS und E. GUMLICH, Ber. d. Physik Ges. 17 (1915) p. 271.

[3]) Daardoor is voor de opgegeven r en s waarden, $r\,s$ niet precies $= q$.

[4]) Vgl. P. WEISS, J. de Phys. Mei 1910 en P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES. Leiden Comm. N⁰. 114, p 16.

Natuurlijk is deze onderstelling niet geheel onbedenkelijk, maar men moet niet uit het oog verliezen, dat de resultaten toegepast worden op gevallen, waarin zich magnetische momenten tusschen de polen bevinden, geheel vergelijkbaar met die van ijzer en vaak zelfs veel grooter!

eerst op gewezen, dat de heliumtemperaturen tamelijk onzeker zijn, vooral de lagere. Er was geen ruimte voor een specialen roerder en daardoor kon in de vloeistof slechts zooveel geroerd worden, als door op- en neerbewegen van den drager mogelijk was. Daardoor is het waarschijnlijk, dat de temperatuur vaak niet gelijkmatig en dus niet scherp gedefinieerd was. Dit geldt vooral voor de temperaturen beneden het maximum van dichtheid waar de afkoeling aan het oppervlak door verdamping geen convectiestroomen naar beneden doet ontstaan. Niet alleen echter zijn die

TABEL II.

Poolafstand 26.5 mm.; $s = 2.45$ cm.		
I	r	s
3 amp.	0.973	1.062
4	0.983	1.044
5	0.990	1.030
10	0.999	1.003
15	1.000	1.000
20	0.995	1.002
30	0.960	1.010
45	0.893	1.021
60	0.837	1.030
70	0.808	1.035

lage temperaturen eenigszins onzeker, ook de waarden, die er voor aangenomen zijn, zijn niet zeer nauwkeurig. Ze zijn nl. grafisch bepaald uit den druk van het vloeistofbad, door gebruik te maken van het geheele bestaande materiaal voor de dampspanningen van helium [1]), maar dit laat bij de temperaturen tusschen 1° en ca. 3° K. onzekerheden van de orde van 0°,1.

Veel zorg werd besteed aan het brengen van de stof op de gewenschte plaats in het magnetische veld, of liever, daar de cryostaat niet verplaatsbaar was, aan de instelling van den electromagneet ten opzichte van de stof. Was de magneet eenmaal goed gesteld, dan werd zijn plaats vastgelegd, door van af den cryostaat twee schiet-

[1]) H. Kamerlingh Onnes en Sophus Weber, Deze Verslagen Juni 1915, p. 370, Leiden Comm. N°. 147b.

loodjes neer te laten, die twee punten op het juk van den magneet markeerden, want, teneinde gelegenheid te geven, de beide vacuumglazen V_{He} en V_H (fig. 1) aan te brengen, moest de magneet tijdelijk verwijderd worden. De groote electromagneet is zeer zwaar en een inrichting voor het geven van kleine horizontale translaties ontbrak, zoodat een en ander met groote moeilijkheden en kansen voor mindere nauwkeurigheid gepaard ging, tenminste voorzoover de instelling in horizontale richting betreft.

De cryostaat, die één geheel vormt met den liquefactor, onderging tijdens de operaties met vloeibare waterstof en helium kleine onregelmatige verplaatsingen als gevolg van de wisselende temperatuuromstandigheden in de verschillende deelen. Door middel van een paar trekstangen werd telkens de beginstand ten opzichte van den magneet hersteld.

Wat de instelling in verticale richting betreft, zij opgemerkt, dat als „plaats" van de stof in het magnetische veld, de afstand wordt aangenomen, waarop het middelpunt der massa zich bij kamertemperatuur boven het middelpunt van het veld bevindt. Van deze „plaats" hangt de waarde der constanten in formule (4) af. Bij de metingen in vloeibare waterstof en in vloeibaar helium is deze plaats feitelijk veranderd door inkrimping van den drager als gevolg van de afkoeling. Op de waarde van $\frac{\partial H}{\partial z}$ zal dit zeer weinig invloed hebben, daar $\frac{\partial H}{\partial z}$ maximaal is, maar juist om diezelfde reden moet de invloed op H worden nagegaan. Op zichzelf komt deze wel in aanmerking voor een correctie. Voor het (tamelijk ongunstige) geval, dat de drager tot 20 cm. boven de stof de temperatuur van het kookpunt van vloeibare waterstof zou hebben en voor de rest op kamertemperatuur zou zijn, zou uit de gegevens van CH. LINDEMANN[1]) een inkrimping van 0,3 mm. volgen en zou H 0,006 H_0 kleiner zijn dan volgens form. (2), d.i. ca 0,7 $^0/_0$. Toch is geen correctie aangebracht. Daarvoor zou nl. noodig geweest zijn, de plaats der stof tijdens de metingen te bepalen, want die veranderde door wijziging van de temperatuurverdeeling langs den drager als gevolg van het dalen van den vloeistofspiegel; daar beide vacuumglazen ter hoogte van de stof geheel verzilverd zijn, ging dit echter niet. Daar komt nog bij, dat bij de metingen in vloeibare waterstof en in vloeibaar helium (en hierop hebben de proeven alleen maar betrekking), de correctie ongeveer even groot is, telkens als de vloeistofspiegel op

[1]) Physik. Zs. 13, (1912), p. 737.

dezelfde hoogte staat, omdat de uitzettingscoëfficient bij die lage temperaturen tot nul nadert.

Eindelijk worde vermeld, dat van een gericht worden of gericht blijven der poederdeeltjes door de magnetische krachten niets bemerkt is.

§ 4. *De Curie-constante van gadoliniumsulfaat.* In § 3*c* is reeds vermeld, dat bij *Gd* II daarvoor 2,030 10^{-2} gevonden is.

Voor de Curie-constante van *Gd* I vinden we

$T = 20°{,}31$ K.	$\chi = 1{,}0566 \cdot 10^{-3}$	$C = 2{,}146 \cdot 10^{-2}$
$T = 14°{,}68$	$\chi = 1{,}4663$,,	$C = 2{,}152$
	Gemidd.	2,149

De metingen met *Gd* I worden als minder nauwkeurig beschouwd dan die met *Gd* II, omdat achterna bleek, dat door niet verklaarde omstandigheden (zie ook het laatste gedeelte van § 3 over de moeilijkheid van instelling) het buisje ongeveer 1,6 mm. dichter bij het eene poolvlak dan bij het andere stond. Bij een vroegere bepaling van de Curie-constante van *Gd* I, geheel onafhankelijk van dit onderzoek, werd echter $2{,}113.10^{-2}$ gevonden. Het is dus niet waarschijnlijk, dat het groote verschil tusschen de beide Curie-constanten van *Gd* I en *Gd* II aan onjuiste instelling van het buisje geweten moet worden. Trouwens vinden verschillende waarnemers ook waarden die nog verder uiteenloopen dan de bovenstaande: uit de gegevens van Mlle FEYTIS [1]), KAMERLINGH ONNES en PERRIER [2]), en KAMERLINGH ONNES en OOSTERHUIS [3]) volgt voor de Curie-constante van gadolinium sulfaat [4]):

Mlle FEYTIS	$2{,}167 \cdot 10^{-2}$
K. O. en P.	2,086
K. O. en O.	2,016.

Deze verschillen zijn voorloopig nog niet opgehelderd.

---

1) Paris C. R. 153 (1911), p. 668.

2) Deze verslagen Mei 1911, p. 75; Leiden Comm. N⁰. 122a.

3) „ „ Juni 1912; p. 275; Leiden Comm. N⁰. 129b.

4) Nadat een correctie is aangebracht voor het diamagnetisme van het kristalwater en van het anion. Of deze laatste (overigens zeer klein) niet al reeds door Mlle FEYTIS is aangebracht, is niet geheel zeker.

Natuurkunde. — H. R. WOLTJER en H. KAMERLINGH ONNES: *„Verdere proeven met vloeibaar helium. T. Magnetische onderzoekingen. XXIII. Over de magnetisatie van gadoliniumsulfaat bij temperaturen bereikbaar met vloeibaar helium."* (Mededeeling N°. 167*c* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

§ 1. *Inleiding.* Vroegere [1]) voorloopige onderzoekingen en een uitvoerige discussie [2]) van de toen bereikte resultaten hebben het belang aangetoond van een nader onderzoek van de magnetisatie van gadoliniumsulfaat bij zeer lage temperaturen. Deze stof is immers eene der betrekkelijk weinige, die de wet van CURIE volgt tot in het gebied der temperaturen, bereikbaar met vloeibare waterstof. Nu is in het licht der theorie van LANGEVIN de wet van CURIE slechts een benaderingswet, die geldt, zoolang de susceptibiliteit nog als onafhankelijk van de veldsterkte beschouwd kan worden; LANGEVIN geeft voor de specifieke magnetisatie, σ, uitgedrukt in de specifieke verzadigingsmagnetisatie, σ_∞,

$$\sigma : \sigma_\infty = cotgh\; a - \frac{1}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1a)$$

$$a = \frac{\sigma_{m\infty}}{R} \cdot \frac{H}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1b)$$

($\sigma_{m\infty}$ is de verzadigingsmagnetisatie van 1 grammolecuul, R de gasconstante, H het magnetische veld, waaraan de stof onderworpen is, en T de absolute temperatuur).

Voor kleine waarden van a is

$$\sigma : \sigma_\infty = \frac{1}{3} a \quad \text{of} \quad \chi = \frac{\sigma}{H} = \frac{\sigma_\infty \cdot \sigma_{m\infty}}{3R} \cdot \frac{1}{T} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wordt T klein en dus a groot, dan is χ niet meer onafhankelijk van H, maar wijkt de kromme $\frac{\sigma}{\sigma_\infty} = f(a)$ af van de rechte $\frac{\sigma}{\sigma_\infty} = \frac{1}{3a}$, om hol naar de a-as te gaan loopen en asymptotisch te naderen tot $\frac{\sigma}{\sigma_\infty} = 1$ (zie de figuur). De nadere discussie der voorloopige proeven

[1]) H. KAMERLINGH ONNES, deze Verslagen, Mei 1914, p. 172; Leiden Comm. N°. 140d.

[2]) H. KAMERLINGH ONNES, Rapport Solvay 1921, p. 131; Leiden Comm. Suppl. N°. 44a.

heeft het bestaan van dergelijke afwijkingen reeds waarschijnlijk gemaakt. Aan den anderen kant is het zonder meer niet te verwachten, dat de theorie van LANGEVIN in dit geval gevolgd zou worden, als men bedenkt, dat deze theorie is afgeleid voor een gas, waarin de moleculen vrij draaibaar zijn, en dat zij uitgaat van de aequipartitie der energie over alle vrijheidsgraden, welke onderstellingen geen van beide in het geval van poedervormig gadoliniumsulfaat bij lage temperatuur vervuld zijn. Wel is waar, is eenerzijds de theorie van LANGEVIN door WEISS[1]) uitgebreid op poeders van kristallen, maar WEISS bepaalt zich slechts tot kleine waarden van den parameter a[2]); andererzijds heeft EHRENFEST[3]) een theorie ontworpen, waarin de betrekking (2) voor kristalpoeders wordt afgeleid op grond van de quantenhypothese, maar de verzadigingsmagnetisatie is dan slechts de helft van de waarde, die beantwoordt aan parallellen stand van alle elementairmagneten en bij de voorloopige proeven scheen een grootere magnetisatie bereikt te zijn.

Nadere bevestiging en uitbreiding van de voorloopige resultaten werd door dit alles zeer wenschelijk gemaakt; de methode is dezelfde als bij het vroegere onderzoek: de specifieke magnetisatie, σ, wordt afgeleid uit de kracht F (in grammen), die de massa m in een inhomogeen magnetisch veld ondervindt, met behulp van de formule: $Fg = m\sigma \frac{\partial H}{\partial z}$. Een nadere studie van den toestel, de correcties en de foutenbronnen, welke in de voorafgaande mededeeling[4]) is samengevat, heeft het echter mogelijk gemaakt, thans, wat de magnetische metingen betreft, eene belangrijk grootere nauwkeurigheid dan vroeger te bereiken. Een zwak punt blijft nog de bepaling van de temperatuur door de dampspanning van het bad, wel in de eerste plaats, doordat de dampspanningswet niet voldoende bekend is.[5])

Het onderzoek werd verricht met dezelfde twee buisjes *Gd I* en *Gd II*, die voor het onderzoek in vloeibare waterstof gediend hebben en in de voorafgaande mededeeling (§ 3*c*) vermeld zijn.

§ 2. *Waarnemingen.* Geven we eerst de directe resultaten der waarnemingen: tabellen I en II (*I* is het aantal ampères door den

---

[1]) P. WEISS, Paris C. R. 156 (1913) p. 1674.

[2]) Volgens O. STERN (Zs. f. Phys. 1 (1920) p. 147) is de afleiding van WEISS onjuist.

[3]) P. EHRENFEST, deze Verslagen December 1920, p. 793; Leiden Comm. Suppl. N°. 44b.

[4]) H. R. WOLTJER, dit Verslag p. 759, Leiden, Comm. No. 167*b*.

[5]) l. c. § 3.

TABEL I.

Gadoliniumsulfaat I						
Datum	Dampspanning	T	Nr.	I	H_0	F
1 Maart 1923	761 mm.[1]	4°.20 K.	1	30	17320	90.14
"	"	"	2	20	12940	55.26
"	"	"	3	10	6605	15.76
"	"	"	4	5	3295	3.89
"	"	"	5	5	3295	4.01
"	"	"	6	15	9875	33.83
"	"	"	7	30	17320	89.94
"	"	"	8	60	21600	114.76
"	"	"	9	70	22230	117.81
"	"	"	10	45	20235	109.54
"	"	"	11	30	17320	90.96
"	360 mm.	3°.53 "	12	70	22230	136.93
"	"	"	13	45	20235	123.42
"	"	"	14	30	17320	103.78
"	"	"	15	20	12940	65.61
"	"	"	16	10	6605	19.04
"	"	"	17	5	3295	4.76
"	"	"	18	5	3295	4.75
"	"	"	19	15	9875	40.26
"	"	"	20	30	17320	102.54
"	"	"	21	60	21600	129.12
"	"	"	[22	70	22230	130.68
"	100 mm.	2°.73 "	[23	70	22230	152.27]
"	"	"	24	45	20235	148.13
"	"	"	25	30	17320	121.71
"	"	"	26	20	12940	79.75
"	"	"	27	10	6605	24.36
"	"	"	[28	5	3295	6.12]
"	763 mm.	4°.20 "	29	30	17320	91.11
"	9.5 mm.	$1^\circ.66_5$ "	30	70	22230	173.70
"	4 mm.	1°.48 "	[31	60	21600	173.41]

[1]) Het verschil tusschen internationale en locale m.m. kwik (deze Verslagen October 1918, p. 555, noot 2; Leiden Comm. No. 152*d* p. 47, noot 4)) is hier van geen belang.

TABEL II.

Gadoliniumsulfaat II						
Datum	Dampspanning	T	Nr.	I	H_0	F
13 April 1923	761 mm.	4°.20 K.	1	60	21600	108.27
"	"	"	2	30	17320	85.67
"	"	"	3	15	9875	32.44
"	"	"	4	5	3295	3.74
"	"	"	5	5	3295	3.77
"	"	"	6	10	6605	15.10
"	"	"	7	20	12940	53.00
"	"	"	8	30	17320	85.80
"	"	"	9	45	20235	102.76
"	"	"	10	60	21600	108.04
"	300 mm.	3°.40 "	11	30	17320	98.48
"	39 mm.	2°.30 "	12	30	17320	119.86
"	4 mm.	1°.48 "	13	30	17320	133.53
"	"	"	14	60	21600	152.29
"	"	"	15	30	17320	133.59
"	759 mm.	4°.20 "	28	30	17320	85.48
"	2.9 mm.	1°.41$_5$ "	29	70	22230	156.36
"	"	"	30	45	20235	152.69
"	"	"	31	30	17320	136.30
"	"	"	32	5	3295	10.20
"	"	"	33	4	2627	6.46
"	"	"	34	3	1960	3.68
"	1.7 mm.	1°.31 "	35	70	22230	157.74
"	"	"	36	60	21600	157.72

electromagneet; H_0 de veldsterkte, in gauss, in het centrum; F de kracht, in grammen, op de totale hoeveelheid stof).

Bij *Gd II* liggen tusschen de punten N°. 15 en N°. 28 punten, die bij stijgenden druk zijn waargenomen, als controle, in hoeverre de temperatuur den druk volgde bij het roeren door op en neer bewegen van den drager [1]). De waargenomen magnetisaties wezen op veel lagere temperaturen, dan aan den momentanen druk van het bad beantwoordden, de temperatuur volgde slechts zeer langzaam. Deze punten zijn daarom verworpen.

§ 3. *Discussie.* Voor *Gd II* is als CURIE-constante 0,02024 [2]) aangenomen en daarmede volgens formule (2) σ_∞ en $\sigma_{m\infty}$ berekend. Als moleculairgewicht is de helft van het eigenlijke moleculairgewicht genomen, omdat de *atomen Gd* als vrij draaibaar ondersteld zijn. Bij bijna alle zouten met meerdere metaalatomen wordt dit gedaan [3]). Hier komt nog bij, dat, als men met het heele moleculairgewicht rekent, $\sigma_{m\infty}$ $\sqrt{2}$ maal grooter en σ_∞ $\sqrt{2}$ maal kleiner wordt, zoodat $\sigma : \sigma_\infty$ $\sqrt{2}$ maal grooter zou worden en men tot waarden grooter dan 1 zou komen, daar voor $\sigma : \sigma_\infty$ 0.84 bereikt is. (Zie tabel V).

We vinden:

$$\sigma_{m\infty} = 434{,}2 \,.\, 10^2 \text{ (38.65 WEISS-magnetonen).}$$
$$\sigma_\infty = 116{,}25.$$

Voor de CURIE-constante van *Gd I* vonden we [4])

$$C = 0{,}02149$$
$$\sigma_{m\infty} = 447{,}4 \,.\, 10^2 \text{ (39.82 WEISS-magnetonen)}$$
$$\sigma_\infty = 119{,}79.$$

Voor *Gd I* en *Gd II* is uit de tabellen I en II $\dfrac{\sigma}{\sigma_\infty}$ en a berekend, aan ieder zijn individueele CURIE-constante toekennende. De resultaten zijn samengevat in de tabellen III en IV. De tusschen vierkante haken geplaatste punten zijn a priori minder betrouwbaar, meestal, omdat tijdens, of oogenblikkelijk na de bepaling, het gadoliniumsulfaat niet meer voldoende onder de vloeistof stond [5]). Het

---

[1]) l.c. § 3.

[2]) Zie de voorafgaande mededeeling § 4. Daar is, op grond van een latere, ietwat gewijzigde berekening 0.02030 opgegeven.

[3]) P. WEISS, Arch. d. Sc. phys. et nat. (4) 31 (1911).
B. CABRERA, J. de Chim. Phys. 6 (1918) p. 442, vooral p. 462.

[4]) Voorafgaande mededeeling § 4, waar ook over het verschil tusschen beide resultaten gesproken wordt.

[5]) Bij de met een asterisk gemerkte punten stond het helium *zeker* beneden het veertje V_2 (zie voorafgaande mededeeling § 3c). Een systematisch verschil met de andere waarnemingen is niet te bemerken.

TABEL III. Gadoliniumsulfaat I.

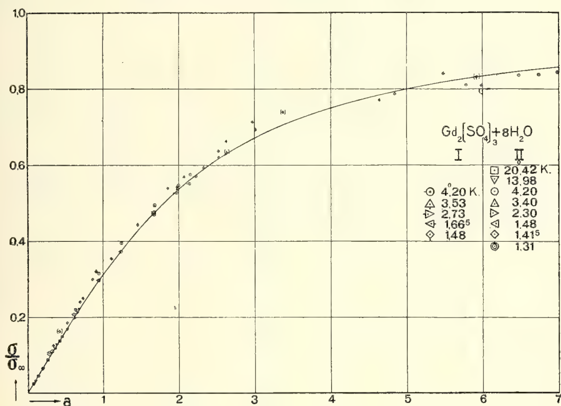
I	4°.20 K.				3°.53 K.				2°.73 K.				1°.66$_5$ K.				1°.48 K.			
	Nr.	*a.*	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	*a.*	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	*a.*	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	*a.*	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	*a.*	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$
5	4	0.2888	0 1036	+ 7.6	17*	0.3384	0.1268	+11.7	[28*	0.4267	0.1630	+13.8]								
"	5	0.2882	0.1068	+10.5	18*	0.3384	0.1266	+11.6												
10	3	0.6174	0.2075	+ 3.2	16*	0.7246	0.2508	+ 6.9	27*	0.9162	0.3208	+ 9.8								
15	6	0.9408	0.2977	+ 0.4	19*	1.106	0.3544	+ 3.6												
20	2	1.239	0.3732	− 0.8	15*	1.458	0.4430	+ 3.2	26	1.857	0 5384	+ 5.0								
30	1	1.675	0.4710	− 1.0	14*	1.976	0.5425	+ 1.7	25	2.528	0.6362	+ 3.0								
"	7	1.675	0.4700	− 1.2	20*	1.977	0.5360	+ 0.5												
"	11	1.673	0.4753	0.0																
"	29*	1.673	0.4763	+ 0.2																
45	10	1.970	0.5269	− 1.0	13	2.328	0.5936	+ 0.7	24	2.975	0.7124	+ 6 1					[31*	5.917	0.8339	+ 0.3]
60	8	2.140	0.5516	− 1.7	21*	2 529	0.6209	+ 0.6												
70	9	2.223	0 5702	− 0.6	12	2.624	0.6627	+ 5.0	[23	3.371	0.7369	+ 4.2]	30*	5.475	0.8406	+ 2.8				
"					[22*	2.631	0.6324	+ 0.3]												

TABEL IV. Gadoliniumsulfaat II.

I	4°.20 K.				3°.40 K.				2°.30 K.				1°.48 K.				1°.41$_5$ K.				1°.31 K.			
	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{osb.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$	Nr.	a.	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)_{obs.}$	$100 \cdot \frac{O-C}{O}$
3																	34*	0.5260	0.1854	+ 7.1				
4																	33	0.6952	0.2403	+ 6.5				
5	4	0.3238	0.1102	+ 2.7													32	0.8587	0.3005	+ 9.1				
„	5	0.3238	0.1111	+ 3 5																				
10	6	0 6315	0.2199	+ 6.7																				
15	3	0.9433	0.3157	+ 5.9																				
20	7	1.243	0.3956	+ 4.7																				
30	2	1.682	0 4951	+ 3.6	11	2.063	0.5691	+ 3.7	12	3.009	0.6928	+ 2.9	13	4.634	0.7716	— 1.7	31	4.839	0.7878	— 0.7				
„	8	1.682	0.4959	+ 3.8									15*	4 634	0.7721	— 1.6								
„	28*	1,684	0.4941	+ 3.3																				
45	9	1.995	0.5464	+ 1.8													30	5.777	0.8119	— 1.8				
60	1	2.150	0.5756	+ 2.3									14*	5.978	0 8096	— 2.9					36*	6.738	0.8385	— 1.6
„	10	2.150	0.5744	+ 2.1																				
70																	29	6.467	0.8365	— 1.1	35*	6 982	0.8439	— 1.5

verschil van de waargenomen en de volgens LANGEVIN's formule bij a berekende waarde van $\sigma : \sigma_\infty$, uitgedrukt in procenten van de waargenomen waarde, is door $100 \, . \, \frac{O-C}{O}$ aangegeven.

Het kan niet ontkend worden, dat terwijl eenerzijds sterk de indruk gewekt wordt (zie de figuur, waar de LANGEVIN-kromme en de waargenomen punten zijn geteekend), dat poedervormig gadoliniumsulfaat de formule van LANGEVIN volgt, andererzijds de afwijkingen wel grooter zijn dan verwacht werd. Toch kunnen die wel uit de foutenbronnen verklaard worden. Behalve al hetgeen in de vooraf-



gaande mededeeling omtrent de nauwkeurigheid opgemerkt is, zij er op gewezen, dat de groote afwijkingen voornamelijk bij kleine waarden van de veldsterkte voorkomen, waar de topografische correcties zeer onzeker en ook de veldmetingen minder betrouwbaar zijn. Voorts is het magnetische moment, dat bij de lage temperaturen optreedt, zoo groot, dat de onderstelling van een rigide verdeeling van het magnetisme over de poolvlakken, welke onderstelling aan de veldmetingen en aan de bepaling der topografische correcties min of meer ten grondslag ligt, zeker niet meer opgaat.

Verder moet nog in aanmerking genomen worden, dat fouten in σ_∞ en in H_e op de abscissen en ordinaten *tegengestelden* invloed hebben en dat de invloed van die fouten in de figuur vergroot overgaat. Dit alles overwegende, speciaal ook nog de onzekerheid omtrent de demagnetisatie, kan men concludeeren, dat gadoliniumsul-

faat in poedervorm tot temperaturen van ca. 1°,3 K. de formule van LANGEVIN volgt. Daarmede schijnt de mogelijkheid gegeven het gadoliniumsulfaat als thermometer te gebruiken.

§ 4. *Resultaten.* De specifieke magnetisatie van poedervormig gadoliniumsulfaat (kristalwaterhoudend) is onderzocht voor temperaturen van vloeibare waterstof en vloeibaar helium met het resultaat, dat, ofschoon de onderstellingen, waarvan de theorie van LANGEVIN uitgaat, hier niet vervuld zijn, de formule van LANGEVIN toch gevolgd wordt. Voor den parameter a van LANGEVIN's formule is de waarde 7 bereikt. Onafhankelijk van de onzekerheid in de temperaturen en de waarde van het ontmagnetiseerende veld, staat vast, dat er magnetisaties bereikt zijn ter grootte van ca. 84°/₀ van de magnetisatie beantwoordende aan parallellen stand van alle elementairmagneten, waaruit blijkt, dat de door Prof. EHRENFEST ontwikkelde theorie zonder meer hier niet toepasselijk is. Immers deze theorie, die, uitgaat van quantenonderstellingen en in onderscheiding van de theorie van LANGEVIN, direct voor kristalpoeders geldt, levert als verzadigingsmagnetisatie slechts 50°/₀ der bovengenoemde waarde.

Scheikunde. — H. I. WATERMAN en J. N. J. PERQUIN: „*Het ontleden van katoenolie in gesloten vat bij 450° vergeleken met het hydreeren dezer olie volgens* BERGIUS *met waterstof onder hoogen druk*".

(Aangeboden door de Heeren J. BÖESEKEN en A. F. HOLLEMAN).

Kort geleden heeft A. MAILHE proefnemingen verricht betreffende bereiding van koolwaterstofmengsels uit vetten[1]). MAILHE maakt gebruik van katalysatoren en verkrijgt hier bij 600°—650° uit verschillende soorten plantaardige oliën gassen van hooge calorische waarde, die H_2, CO en CO_2 en lagere koolwaterstoffen bevatten, eene vloeistof van laag kookpunt en een distillatieresidu Door dit laatste opnieuw aan dezelfde bewerking bloot te stellen krijgt hij tenslotte als eindproduct alleen gassen en eene laag kokende vloeistof. Deze vloeistof bevat nog zuur, ze wordt geneutraliseerd met loog en daarna bij 180°—200° over metaal gehydreerd. Aldus krijgt MAILHE koolwaterstofmengsels, die uit verzadigde en aromatische koolwaterstoffen, alsmede uit naphtenen bestaan. Deze bewerking is op verschillende plantaardige oliën toegepast. Voor het verloop der reactie, zooals MAILHE zich die voorstelt. kan naar zijne publicatie verwezen worden[2]).

Voor de industrie hebben deze onderzoekingen, behoudens zeer abnormale omstandigheden, die zich misschien in bepaalde landen van tijd tot tijd kunnen voordoen, geen beteekenis. De bereiding van koolwaterstofmengsels is destijds zelfs nog eenvoudiger door ENGLER bij zijne klassieke studie verricht. ENGLER verkreeg bij distillatie van traan bij 300°—400° onder druk van 4—10 atm. ca. 75 °/₀ van een vloeibaar koolwaterstofmengsel[3]).

Bij dit onderzoek van ENGLER was vooral van zeer veel belang, dat het bestudeerde omzettingsproces nagenoeg quantitatief verloopt. Ook hier ontstonden naast de vloeibare koolwaterstoffen tevens gasvormige, voornamelijk CH_4, maar verder ook CO, CO_2 en water.

[1]) Préparation de pétrole à l'aide d'huiles végétales et animales, Bulletin de la Société de Chimie Industrielle 4, 40 (Octobre 1922); La pyrogénation catalytique des huiles animales, La revue pétrolifère, 1, N⁰. 17, 17 Maart 1923.

[2]) Vergelijk ook Katalyse und Erdölbildung, C. ENGLER, Chemie und Physik des Erdöls, Leipzig 1913, blz. 412 ff.

[3]) C. ENGLER—H. HÖFER, Das Erdöl II, 110 (1909).

No. van de proef	Duur van het op temperatuur brengen (in minuten)	Duur van de eigenlijke proef (in minuten)	Begindruk in atmosferen	Maximumdruk in atmosferen	Einddruk in atmosferen	Uitgegaan van 298 Gr. katoenolie, hieruit verkregen in Gr. respectievelijk in gewichtsprocenten					Ve		
						olie	water	gas	cokes	verlies	S.G. bij ± 15°	Zuurgetal	D. (C
VII	40	120	101	272	47,7	203 (66,0 %)	10 (3,3)	68 (22,3)	5,5 (1,8)	20,3 (6,6)	0,793	5,1	(4
IX	35	120	0 (atmosferische druk)	171	32,0	169 (56,7 %)	2 (0,7)	64 (21,5)	15 (5,0)	48 (16,1)	0,818	1,0	(3

						Uitgegaan van ± 200 Gr. katoenolie (XXII : 200 Gr., XXIII : 204 Gr., XXIV : 200 Gr., XXV : 198 Gr., XXVI : 202 Gr., XXVII : 201 Gr.); hieruit verkregen in Gr.							
						olie	water	gas	cokes	verlies			
XXII [1])	35	60	110	270	79	126 (59,3 %)	8,5 (3,9)	69 (32,4)	1 (0,5)	8,9 (3,9)	0,774	0,3	67 (43
XXIII	35	60	110	251	85	146 (67,2 %)	8,5 (3,9)	58 (26,7)	0,6 (0,3)	4,3 (1,9)	0,790	7,6	59 (43
XXIV [2])	35	60	0	79,5	22	124 (62 %)	1 (0,5)	42 (21)	14 (7)	19 (9,5)	0,817	1,3	52 (35
XXV	33	60	0	81,5	21,6	132 (66,6 %)	3,5 (1,7)	44 (22,2)	14 (7,1)	4,5 (2,3)	0,812	1,9	55 (38
XXVI	40	60	0	81,5	21,5	127 (63 %)	3,5 (1,7)	46 (22,8)	14,5 (7,2)	11 (5,5)	0,816	2,3	55 (37
XXVII	36	5	110	222	96,5	172 (81,4 %)	9,5 (4,5)	30,8 (14,6)	0,6 (0,3)	—	0,847	36,4	19 (17

[1]) Doordat het thermo-element uit de buis geschoven was, liep de temperatuur bij c
[2]) Even voor het beëindigen dezer proef ontstond een klein lek, dat spoedig door aa
[3]) De tusschen haakjes geplaatste cijfers geven aan het percentage in gewichtsperce
[4]) Benzine inclusief het verlies bij de destillatie volgens ENGLER.
[5]) De tusschen haakjes geplaatste percentages zijn berekend op waterstofvrij gas
[6]) Experimenteel bepaald.

KATOENOLIE BIJ 450°.

NGLER ichts-	Broom-getal (additie) der		Zuur-getal der		Verkregen gassen:									Aantal liters toegevoerde waterstof	Aantal liters nog aanwezige waterstof	Aantal liters verbruikte waterstof	Opgenomen waterstof in grammen	Gewichtspercenten opge-nomen waterstof
					Hoeveelheid in L.	Dichtheid ten opzichte lucht	Analyse [5])											
Verlies	Benzine	Kerosine	Benzine	Kerosine			CO_2	Zwarte koolwaterstoffen	O_2	CO	H_2	Overige koolwaterstoffen	Stikstof (rest.)					
6,2	14.5	6,5	3,2	0,9	63	0,877	18,8 (24,4)	1,1 (1,4)	0,4 (0,5)	7,3 (9,5)	23,0	44.2	5,2	± 75 L. (8.8 Gr.)	14,5	60,5	5,4	1,8
5,0	16,8	8.5	0,3	1,8	51	1,022	23,8 (25,9)	2,8 (3,0)	0,9 (1,0)	10,9 (11,8)	8,0	49,9	3,7					
6,4	17,2	5,2	0,3	0,1	95	0,582	8,5 (18,4)	0,4 (0,9)	0,4 (0,9)	6,2 (13,4)	53,9	27,1	3,5	108 L. [6]) (13,4 Gr.)	51,2	56,8	5,1	2,5
4,8	17,0	5,0	6,3	1,2	92	0,512	9,3 (24.3)	1,0 (2,6)	0,5 (1,3)	3,7 (9,7)	61,8	20,0	3,7	108 L. [6]) (13,4 Gr.)	57,0	51	4,6	2,3
3,6	24,3	7,9	1,0	0,2	31	1,094	27,9 (31.2)	4,8 (5,4)	0,9 (1,0)	10,0 (11,1)	10,5	45,8						
2,3	24,0	7,9	1,9	0,3	32,5	1,077	26,4 (29,4)	4,6 (5,1)	1,1 (1,2)	12,8 (14,2)	10.3	38,2	6,6					
4,0	24,0	7,6	2,4	0,4	33,5	1,093	25,4 (28,2)	4,2 (4,7)	0,8 (0,9)	13,4 (14,9)	10,0	40,8	5,4					
1,7	42,0	15,6	22,7	7,6	103	0,239	5,0 (33,3)	0,4 (2,7)	0,3 (2,0)	2,9 (19,3)	85,0	6,4		111,4 L. [6]) (10.0 Gr.)	87,5	23,9	2,1	1,

rende de laatste 10 minuten op tot ± 500°.
den terugvloeikoeler kon gedicht worden.
tgangsproduct.

CRACKING EN BERGINISEERING VAN KATOENOLIE BIJ 450°.

TABEL A.

No. van de proef	Duur van het op temperatuur brengen (in minuten)	Duur van de eigenlijke proef (in minuten)	Begindruk in atmosferen	Maximumdruk in atmosferen	Einddruk in atmosferen	Uitgegaan van 298 Gr. katoenolie, hieruit verkregen in Gr. respectievelijk in gewichtsprocenten: olie	water	gas	cokes	verlies	Verkregen olie: S.G. bij ± 15°	Zuurgetal	Destill. volgens ENGLER (Opbrengst in gewichtsprocenten) [3]: Benzine tot 220°	Kerosine	Residu > 300°	Verlies	Broomgetal (additie) der: Benzine	Kerosine	Zuurgetal der: Benzine	Kerosine	Verkregen gassen: Hoeveelheid in L.	Dichtheid ten opzichte lucht	Analyse [5]: CO_2	Zwarte koolwaterstoffen	O_2	CO	H_2	Overige koolwaterstoffen	Stikstof (rest.)	Aantal liters toegevoerde waterstof	Aantal liters nog aanwezige waterstof	Aantal liters verbruikte waterstof	Opgenomen waterstof in grammen	Gewichtspercenten opgenomen waterstof
VII	40	120	101	272	47,7	203 (66,0 %)	10 (3,3)	68 (22,3)	5,5 (1,8)	20,3 (6,6)	0,793	5,1	60,6 (44,2) [4]	[illegible]	15,5 (10,5)	6,2	14.5	6,5	3,2	0,9	63	0,877	18,8 (24,4)	1,1 (1,4)	0,4 (0,5)	7,3 (9,5)	23,0	44.2	5,2	± 75 L. (8.8 Gr.)	14,5	60,5	5,4	1,8
IX	35	120	0 (atmosferische druk)	171	32.0	169 (56,7 %)	2 (0,7)	64 (21,5)	15 (5,0)	48 (16,1)	0,818	1,0	57,1 (35,2) [4]	[illegible]	20,8 (11,8)	5,0	16,8	8.5	0,3	1,8	51	1,022	23,8 (25,9)	2,8 (3,0)	0,9 (1,0)	10,9 (11,8)	8,0	49,9	3,7					

TABEL B.

						Uitgegaan van ± 200 Gr. katoenolie (XXII : 200 Gr., XXIII : 204 Gr., XXIV : 200 Gr., XXV : 198 Gr., XXVI : 202 Gr., XXVII : 201 Gr.); hieruit verkregen in Gr.: olie	water	gas	cokes	verlies																								
XXII [1]	35	60	110	270	79	126 (59,3 %)	8,5 (3,9)	69 (32,4)	1 (0,5)	8,9 (3,9)	0,774	0,3	67,1 (43,7) [4]	[illegible]	11,6 (6,9)	6,4	17,2	5,2	0,3	0,1	95	0,582	8,5 (18,4)	0.4 (0,9)	0.4 (0,9)	6,2 (13,4)	53,9	27,1	3,5	108 L. [6] (13,4 Gr.)	51,2	56,8	5,1	2,5
XXIII	35	60	110	251	85	146 (67,2 %)	8,5 (3,9)	58 (26,7)	0,6 (0,3)	4,3 (1,9)	0,790	7,6	59,3 (43,4) [4]	[illegible]	15,1 (10,2)	4,8	17,0	5,0	6,3	1,2	92	0,512	9,3 (24.3)	1,0 (2,6)	0,5 (1,3)	3,7 (9,7)	61,8	20,0	3,7	108 L. [6] (13,4 Gr.)	57,0	51	4,6	2,3
XXIV [2]	35	60	0	79,5	22	124 (62 %)	1 (0,5)	42 (21)	14 (7)	19 (9,5)	0,817	1,3	52,9 (35,0) [4]	[illegible]	21,2 (13,1)	3,6	24,3	7,9	1,0	0,2	31	1,094	27,9 (31.2)	4,8 (5,4)	0,9 (1,0)	10,0 (11,1)	10,5	45,8						
XXV	33	60	0	81,5	21,6	132 (66,6 %)	3,5 (1,7)	44 (22,2)	14 (7,1)	4,5 (2,3)	0,812	1,9	55,5 (38,5) [4]	[illegible]	21,2 (14,2)	2,3	24,0	7,9	1,9	0,3	32,5	1,077	26,4 (29,4)	4,6 (5,1)	1,1 (1,2)	12,8 (14,2)	10.3	38,2	6,6					
XXVI	40	60	0	81,5	21,5	127 (63 %)	3,5 (1,7)	46 (22,8)	14,5 (7,2)	11 (5,5)	0,816	2,3	55,3 (37,4) [4]	[illegible]	20,0 (12,6)	4,0	24,0	7,6	2,4	0,4	33,5	1,093	25,4 (28,2)	4,2 (4,7)	0,8 (0,9)	13,4 (14,9)	10,0	40,8	5,4					
XXVII	36	5	110	222	96,5	172 (81,4 %)	9,5 (4,5)	30,8 (14,6)	0,6 (0,3)	— —	0,847	36,4	19,3 (17.1) [4]	[illegible]	56.6 (46,1)	1,7	42,0	15,6	22,7	7,6	103	0,239	5,0 (33,3)	0,4 (2,7)	0,3 (2,0)	2,9 (19,3)	85,0	6,4		111,4 L. [6] (10.0 Gr.)	87,5	23,9	2,1	1,0

[1]) Doordat het thermo-element uit de buis geschoven was, liep de temperatuur bij deze proef gedurende de laatste 10 minuten op tot ± 500°.
[2]) Even voor het beëindigen dezer proef ontstond een klein lek, dat spoedig door aanschroeven van den terugvloeikoeler kon gedicht worden.
[3]) De tusschen haakjes geplaatste cijfers geven aan het percentage in gewichtspercenten op het uitgangsproduct.
[4]) Benzine inclusief het verlies bij de destillatie volgens ENGLER.
[5]) De tusschen haakjes geplaatste percentages zijn berekend op waterstofvrij gas.
[6]) Experimenteel bepaald.

Naar aanleiding van onderzoekingen, die door ons den laatsten, tijd betreffende het hydreeringsproces van BERGIUS werden verricht lag het voor de hand dit onderzoek ook uit te breiden op vetten.

Hebben wij bij het berginiseeren van koolstof en waterstof bevattende producten alleen te maken met twee processen, het crackingsproces en het hydreeringsproces, in dit geval was de zaak nog iets ingewikkelder, omdat de koolwaterstoffen hier eerst nog uit vetten moeten ontstaan. Het spreekt wel van zelf, dat hier de eigenlijke berginiseeringsproef vergeleken moest worden met de crackingsproef [1]). Werkte ENGLER bij zijne distillatieproeven bij 300°—400° en onder betrekkelijk geringen druk, dit onderzoek werd bij veel hoogere temperatuur (450°) en zeer hoogen druk uitgevoerd.

Overigens was de wijze van experimenteeren analoog aan die door ons met paraffine als grondstof gevolgd [2]). Alleen werd hierbij gebruik gemaakt van een nieuw vervaardigd hoogedrukapparaat (zie figuur 1) [3]). Tevens werd hierbij de temperatuur in den metalen wand van de autoclaaf gemeten, waardoor gedurende de proefnemingen werd vastgesteld, dat er geen sprake was van eenige oververhitting der wanden. De inhoud van de autoclaaf was ± 1.000 cM^3. Bij de hier beschreven proeven werd geen gebruik gemaakt van den condensor.

In de tabel A vindt men beide proeven vermeld.

Door de proeven is aangetoond, dat ook onder deze omstandigheden de vette olie voor een zeer groot percentage in minerale olie wordt omgezet, evenals dit bij de Englersche proeven het geval is.

Uit de grafische voorstellingen fig. 2, waar het verloop van druk en temperatuur is aangegeven, blijkt wel hoe gevoelig men met de gebruikte apparatuur kan werken. Zelfs zeer kleine temperatuurvariaties vindt men onmiddellijk weerspiegeld in de drukkurve. Het drukverloop bij het berginiseeren is principieel verschillend van de crackingsproef. De drukstijging is bij het berginiseeren aanzienlijk minder dan bij het cracken.

Uit de gasanalyse blijkt verder, dat de zuurstof der katoenolie in beide gevallen bijna quantitatief als CO, CO_2 en H_2O wordt uitgedreven. Kleinere hoeveelheden zuren (vergelijk zuurgetal) en ketonen zullen in de verkregen olie nog aanwezig kunnen zijn. Duidelijk

[1]) De ontleding bij de verhitting van katoenolie in gesloten vat is in het volgende steeds „cracking" genoemd.

[2]) H. I. WATERMAN en J. N. J. PERQUIN, Het hydreeren van paraffine volgens BERGIUS; Versl. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 32, p. 168, (1923).

[3]) Bij de constructie van dit apparaat konden wij op de medewerking van Prof. J. C. ANDRIESSEN rekenen, waarvoor wij hem hier onzen dank betuigen.

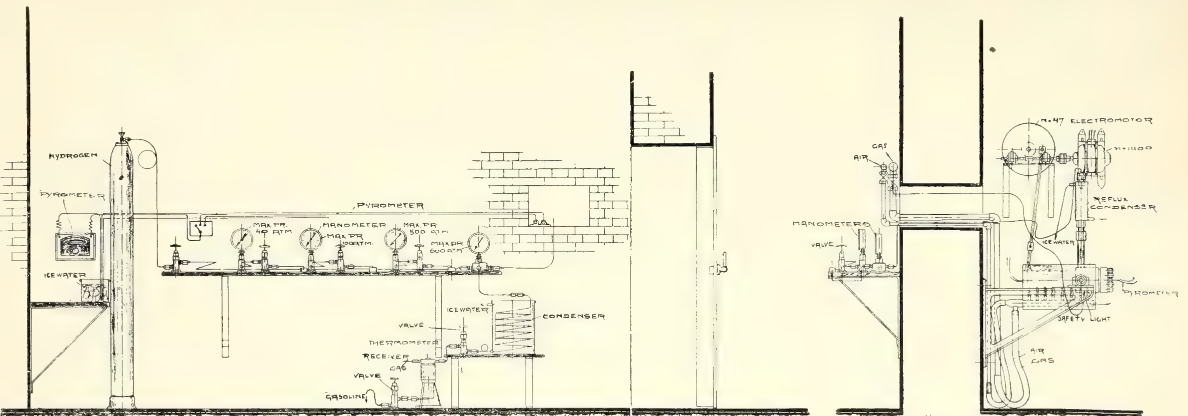
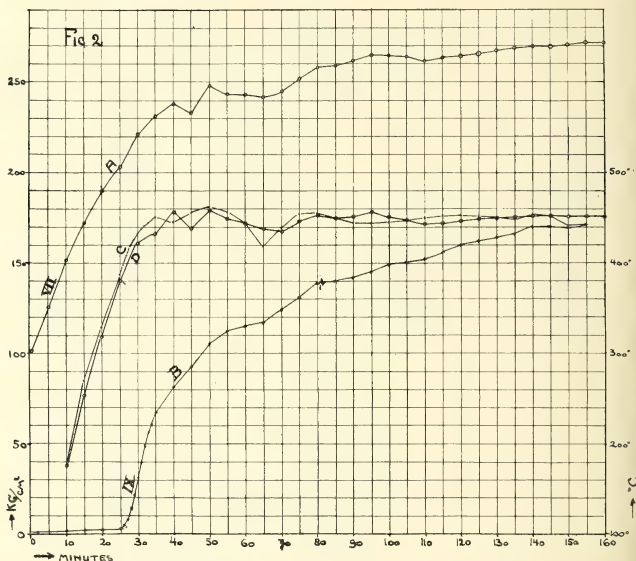

HYDROGEN
PYROMETER
ICEWATER
PYROMETER
MAX PR.
40 ATM
MANOMETER
MAX PR
100 ATM.
MAX PR
500 ATM
MAX PR
600 ATM
ICEWATER
CONDENSER
VALVE
THERMOMETER
RECEIVER
GAS
VALVE
GASOLINE
GAS
AIR
MANOMETERS
VALVE
N=47 ELECTROMOTOR
n=1400
REFLUX
CONDENSER
ICE WATER
PYROMETER
SAFETY LIGHT
AIR
GAS

Fig. 1.

wordt het uitdrijven van de zuurstof uit de olie door de zuurstofbalans toegelicht.

Was het reeds uit het verloop der drukcurve zeer waarschijnlijk, dat bij het berginiseeren inderdaad hydreering was opgetreden, met zekerheid bleek dit uit de gasanalyse. Aanzienlijke hoeveelheden waterstof zijn verbruikt.



A en B: DRUKKROMMEN

C: TEMPERATUURKROMME IX

D: TEMPERATUURKROMME VII

Zuurstofbalans

Proef No. VII

Voor de proef		Na de proef		
In katoenolie	32.4 Gr.	In gassen: [1]	CO_2 CO O_2	20.5 Gr.
In waterstof (0_2 gehalte: 2.0 %)	2.2 Gr.	In water (10 Gr.)		8.9 Gr.
	34.6 Gr.	Te zamen		29.4 Gr.

[1]) Waterdamp buiten beschouwing gelaten.

Zuurstof balans				
Proef N⁰. IX				
Voor de proef		Na de proef		
In katoenolie	32.4 Gr.	In gassen: [1]	CO_2 CO O_2	22 Gr.
		In water (2 Gr.)		1.8 Gr.
			Te zamen	23.8 Gr.

[1]) Waterdamp buiten beschouwing gelaten.

Reeds vroeger [1]) hebben wij ons afgevraagd, in hoeverre ook bij de gewone crackingsproeven het hydreeren in den zin van Bergius op kleinere of grootere schaal kan plaats vinden. Deze hydreering is in tegenstelling met die, welke door de van buiten toegevoegde waterstof tot stand komt, door ons inwendige hydreering genoemd. Het zou zeer wel mogelijk zijn, dat ook bij deze crackingsproef inwendige hydreering heeft plaats gevonden. Er is evenwel in dit geval nog eene andere wijze van hydreeren mogelijk n l. die, waarbij het gedurende het proces ontstane CO door inwerking op water, waterstof in statu nascendi zou kunnen opleveren: $CO + H_2O \rightleftarrows CO_2 + H_2$.

Op het hydreeren door middel van koolmonoxyde is destijds reeds door Engler en Grimm de aandacht gevestigd [2]). Fischer en Schrader hebben de hydreering van steenkolen met koolmonoxyde systematisch onderzocht [3]). Of de inwendige hydreering en de indirecte hydreering door CO bij dergelijke proeven, als door ons verricht, werkelijk plaats vinden en zoo ja, in welke mate, zal bij een afzonderlijk onderzoek moeten blijken.

De indirecte hydreering door CO kan trouwens ook bij de berginiseeringsproef zijn opgetreden, hoewel daar tengevolge van de aanwezige overmaat waterstof het watergasevenwicht naar den kant van het CO zal verschuiven.

De verliezen waren bij beide proeven van belang, het grootst was het verlies bij de crackingsproef. Gedeeltelijk wordt dit wellicht veroorzaakt door condensatie van koolwaterstoffen en water in de leidingen tusschen de manometers en de autoclaaf, ook ontstonden de verliezen bij het openen en uitgieten. Bij eene serie later verrichte

[1]) Congrès international des combustibles liquides. Paris 9—15 Octobre 1922, Chimie et Industrie, Mai 1923, p. 200—207.

[2]) Zie Engler und J. Grimm, Ueber direkte Abspaltung von Kohlenoxyd und die Umsetzung desselben mit Wasser. Berichte **30**, 2925—26 (1897).

[3]) Vergelijk Fr. Fischer und H. Schrader, Hydrierung von Kohlen durch Kohlenoxyd. Brennstoffchemie **2**, 257 (1921).

waarnemingen (berginiseeringsproeven XXII en XXIII en crackingsproeven XXIV, XXV en XXVI), waarvan de resultaten eveneens in de tabel B zijn opgenomen, hebben we deze verliezen sterk weten te beperken door het aanbrengen van een terugvloeikoeler op de autoclaaf. De zuurstofbalansen sluiten daar nog beter.

Zuurstofbalans

Proef N°. XXII

Voor de proef		Na de proef		
In katoenolie	21.7 Gr.	In gassen: [1]	CO_2, CO, O_2	16.3 Gr.
In toegevoegde waterstof (O_2 geh. 2.5 %)	3.9 Gr.	In water		7.5 Gr.
	25.6 Gr.		Te zamen	23.8 Gr.

[1]) Waterdamp buiten beschouwing gelaten.

Zuurstofbalans

Proef N°. XXV

Voor de proef		Na de proef		
In katoenolie	21.5 Gr.	In gassen: [1]	CO_2, CO, O_2	15.7 Gr.
		In water		3.1 Gr.
			Te zamen	18.8 Gr.

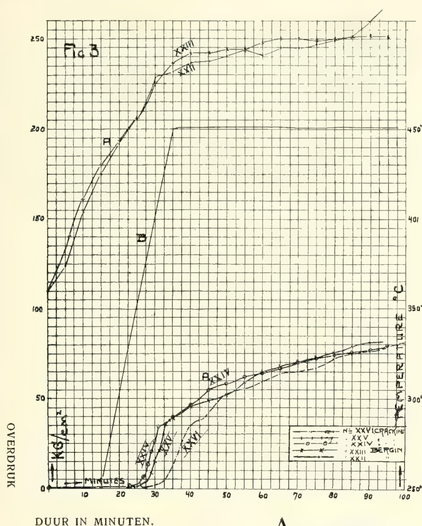
[1]) Waterdamp buiten beschouwing gelaten.

In fig. 3 vindt men het verloop van druk en temperatuur bij deze proefnemingen. Hier werd steeds met ongeveer 200 Gr. katoenolie gewerkt. Overigens waren de omstandigheden analoog met die van nrs. VII en IX.

Voor de technische uitvoering dezer proeven kan het een bezwaar zijn, dat het ijzer der apparaten door de vorming van organische zuren vrij snel wordt aangetast.

Uit de beschreven proeven blijkt, dat men zoowel door cracken als door berginiseeren met goed rendement katoenolie in koolwaterstofmengsels met hoog benzinegehalte kan omzetten. Uit proef XXVII, waarbij 36 minuten werd opgewarmd en slechts 5 minuten op 450° werd verhit, blijkt, dat zelfs na dezen korten verhittingsduur een aanzienlijk gedeelte der zuurstof van het vet is uitgedreven, terwijl de ontstane koolwaterstoffen ook reeds gedeeltelijk zijn ontleed, zoodat al eene belangrijke opbrengst aan benzine en kerosine is verkregen.

Volledig is de omzetting hier nog niet, zooals o.a. blijkt uit het hooge zuurgetal (36,4) der olie.



A DRUKKROMMEN

B GEMIDDELDE TEMP. KROMME

Het onverzadigheidsgetal (broomgetal) der gevormde benzine en kerosine is bij XXVII grooter dan bij de andere berginiseeringsproeven. De katoenolie gedraagt zich bij al deze proeven niet veel verschillend van een koolwaterstofmengsel, omdat de zuurstof er gemakkelijk uitgelicht wordt. Bij het berginiseeren der katoenolie wordt zeer veel waterstof verbruikt o.a. direct of indirect voor de watervorming. Bij beide processen vindt cokesvorming plaats, bij de berginiseeringsproeven is deze belangrijk minder. Het is ons opgevallen, dat ook bij andere berginiseeringsproeven met paraffine vorming van kleine hoeveelheden ,,koolstof" optreedt. Het zal van groot belang zijn eene berginiseeringsproef te verrichten, waarbij deze koolstofafscheiding geheel achterwege blijft. Gelukt dit niet, dan moet worden nagegaan in hoeverre deze, gedurende het proces ontstane koolstof, welke volgens CHANEY [1]), indien ze althans bij

[1]) N. K. CHANEY, The activation of carbon, Transactions of the American electrochemical Society, 36, (1920).

lage temperatuur ontstaat (beneden 500°—600° C.), actief zal zijn, als katalysator zal kunnen fungeeren.[1])

Tenslotte betuigen wij onzen dank aan den Heer J. A. BEUKERS, die ons bij de uitvoering van een belangrijk gedeelte dezer waarnemingen heeft geholpen.

Delft. *Laboratorium voor Chemische Technologie der Technische Hoogeschool.*

---

[1]) Een soortgelijk onderzoek zal ook ten opzichte van toevallig aanwezige metalen, zooals nikkel, vanadium enz. moeten worden uitgevoerd. Vergelijk RAMSAY, J. of the Soc. of Chem. Ind. **42**, p. 287 T (1923).

Anatomie. — J. W. van Wijhe: „*Thymus, spiraculair zintuig en fenestra vestibuli (ovalis) bij een* 63 *m.m. lang embryo van Heptanchus cinereus*".

Vele jaren geleden ontving ik dit embryo van het zoölogisch station te Napels. Het was gefixeerd in sublimaatoplossing en geconserveerd in alcohol. Evenals een ander exemplaar van hetzelfde stadium werd het met methyleenblauw behandeld om er een skeletpraeparaat van te maken.

Daar dit echter bij het eene embryo goed gelukte, besloot ik het andere te bewaren om er later eene serie doorsneden van te vervaardigen, ten einde ook de overige organen te kunnen bestudeeren. Het was mijn voornemen hiermede te wachten, tot ik meer stadiën van dit zeldzame materiaal zoude bezitten. Ik ontving echter slechts nog één embryo — 255 m.m. lang — dat eenvoudig met alcohol behandeld en veel te groot was om er eene serie doorsneden van te maken. Men zoude zich hierbij tot enkele stukken moeten beperken. Dit exemplaar heb ik eveneens aan de directie van het station te Napels te danken.

Toen ik in het najaar van 1922 met de ontwikkelingsgeschiedenis der vroege stadiën van het skelet bij Acanthias vulgaris [1]) gereed gekomen was, wilde ik met de studie van Heptanchus niet langer wachten en werd van het 63 m.m. lange embryo eene serie dwarse doorsneden vervaardigd. De conservatie bleek zeer goed te zijn, niettegenstaande de vroegere vrij langdurige behandeling met zoutzuren alcohol, noodig voor het uittrekken van het methyleenblauw uit de overige weefsels, om de kleur alleen tot het kraakbeen te beperken.

Ook de kleuring der doorsneden met ammoniumkarmijn gelukte geheel naar wensch, maar de lichtblauwe tint der kraakbeengrondstof liet zich niet meer door nabehandeling met methyleenblauw of Victoriablauw versterken. De oorzaak hiervan bleef mij onbekend. Bij het 255 m.m. lange embryo, dat eveneens vele jaren in alcohol had gelegen, liet zich het kraakbeen nog intensief blauw kleuren.

[1]) Van Wijhe, J. W. Frühe Entwicklungsstadien des Kopf- und Rumpfskeletts von Acanthias vulgaris. Bijdragen tot de Dierkunde, uitg. door het Kon. Zool. Genoots. Natura Artis Magistra te Amsterdam. Afl. 22, Feestnummer voor Max Weber, 1922.

1. *Thymus.*

De ontwikkeling der thymus werd bij Selachiers door DOHRN (1884) het eerst beschreven. De door hem gevonden feiten werden in hoofdzaak door latere onderzoekers bevestigd. HAMMAR, die vele jaren aan het onderzoek naar den bouw, de ontwikkeling en de functie van dit orgaan bij bijna alle voornaamste groepen der Vertebrata heeft gewijd, beschreef de ontwikkeling bij Selachiers in 1912 en gaf een uitvoerig overzicht van de resultaten zijner voorgangers. Hij vond, dat het orgaan bij alle werveldieren, van de visschen tot den mensch, in groei toeneemt tot aan de periode der geslachtsrijpheid. Daarop treedt de involutie-periode in, waarbij het achteruitgaat zonder in den regel geheel te verdwijnen.

De thymus ontstaat bij alle Vertebrata als eene plaatselijke verdikking van het epithelium der kieuwspleten.

Bij den mensch wordt zij in hoofdzaak en misschien uitsluitend aangelegd aan de derde kieuwspleet, maar bij de Selachiers, die meestal zes kieuwspleten bezitten, heeft men aan elke spleet een aanleg beschreven. Deze gaat echter aan de eerste en de laatste, of ook wel de beide laatste spleten spoedig te gronde.

Niet alle onderzoekers zijn van oordeel, dat de verdikking in het epithelium der eerste kieuwspleet (spuitgat) als eene thymus te beschouwen is en het is mogelijk, dat hier eene verwisseling met den aanleg van het spiraculaire zintuig heeft plaats gevonden.

Spoedig na haar optreden kan men aan de thymus twee soorten van cellen onderscheiden n.l. een netwerk (reticulum) van platte, epitheliale cellen dat in zijne mazen groepen van ronde cellen omsluit. De ronde cellen vermeerderen zich zoo snel, dat men weldra op niet zeer dunne sneden niets meer ziet van het netwerk. Het geheele orgaan, dat eerst eene peervormige en spoedig eene druiventrosvormige gedaante aanneemt, schijnt dan enkel uit ronde cellen te bestaan, die eene soliede massa zonder lumen vormen. Het protoplasma dezer cellen is zoo gering, dat het schijnt alsof men enkel met een opeenhooping van kernen te doen heeft.

Over de afkomst der ronde cellen, die sterk op de lymphocyten van het bloed gelijken, bestaan twee meeningen. Velen houden hen voor epithelium-cellen die zich hebben afgerond, weer anderen denken hier te doen te hebben met echte lymphocyten, die uit de bloedvaten en het omringende mesenchym in het orgaan zijn binnengedrongen. De laatste meening wordt vooral door HAMMAR met klem voor alle klassen van werveldieren verdedigd.

De vraag welke van deze beide meeningen juist is, kan door de

studie van het 63 m.m. lange embryo van Heptanchus niet worden opgelost, maar wel kan eene andere vraag er door worden beantwoord, n.l. deze: of de thymus moet worden opgevat als eene klier die hare oorspronkelijke uitvoerbuis verloren heeft en dus enkel inwendige afscheiding overgehouden hebben kan. Zij zoude dan in een dergelijk geval verkeeren als de voorste lob der hypophysis en de schildklier, die echter steeds bij het embryo der werveldieren nog eene uitvoerbuis bezitten, welke in den loop der ontwikkeling verloren gaat.

Bij Cyclostomen en de meeste beenvisschen snoert zich de thymus niet van het kieuwdarmepithelium af; wèl is dit bij de overige werveldieren het geval. Eene eigenlijke uitvoerbuis vertoont zich echter in den regel niet. Men zoude haar bij de haaien kunnen verwachten, maar FRITSCHE (1910) zegt: „Ein Lumen und einen Ausführungsgang habe ich bei Spinax ebensowenig auffinden können wie DOHRN bei seinen Haifischen". Bij roggen (Torpedo) echter konden zij in een zeer vroeg stadium iets dat op eene uitvoerbuis gelijkt, waarnemen.

Bij eenige der tot nog toe onderzochte haaien snoert zich het lichaam der thymus zonder steel, direct van het kieuwdarmepithelium af; bij andere blijft zij door middel van een „steel" nog een tijdlang met dit epithelium in verbinding.

Deze steel mist de kenmerken eener uitvoerbuis, want niet alleen heeft hij geen lumen, hij vertoont ook denzelfden bouw als het lichaam der thymus en bestaat bijna uitsluitend uit de ronde cellen die op lymphocyten gelijken.

Bij ons embryo van Heptanchus daarentegen vinden wij eene uitvoerbuis *in optima forma* voor elk der 6 thymusafdeelingen (thymomeren) die aan weerskanten van het lichaam worden aangetroffen, telkens een voor de 2^e^ tot 7^e^ kieuwspleet. Wel zijn er 8 kieuwspleten aanwezig, maar aan de eerste (het spuitgat) en de laatste ontbreekt de thymus. Zij is aan de 2^e^ en 3^e^ spleet het grootst en heeft den vorm van een druiventros. Aan de 4^e^ spleet is de tros kleiner, aan de 5^e^ nog geringer en aan de 6^e^ heeft de thymus niet meer den vorm van een tros maar bestaat zij uit een enkelen acinus, waarin het lumen van de uitvoerbuis binnendringt.

Bij de 7^e^ spleet ontbreekt zelfs elke acinus aan de korte uitvoerbuis.

Men ziet op de afgebeelde doorsnede de groote thymus der 2^e^ kieuwspleet. Zij slaat zich over den top van het eerste epibranchiale heen en gaat dan over in de vrij lange uitvoerbuis. Deze heeft een duidelijk lumen, dat aan haar eene einde in den top der kieuw-

spleet uitmondt en aan haar andere einde tot aan het lichaam der thymus reikt, zonder daarin door te dringen.

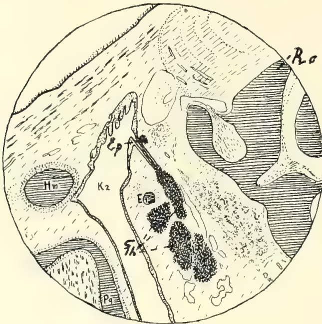


Fig. 1. Dwarse snede door de 2e kieuwspleet van een 63 m.m. lang embryo van Heptanchus cinereus. In deze en de volgende figuren is het kraakbeen (in de praeparaten blauw gekleurd) horizontaal geharceerd.

De wand der buis is twee cellen dik en bestaat uit een dubbele laag van matig platte epitheliumcellen, tusschen welke geen enkele ronde cel te ontdekken is,

De uitvoerbuis van elk der overige thymomeren vertoont een dergelijken bouw, n.l. een dubbel gelaagden epithelialen wand, die een lumen omsluit, dat in de bijbehoorende kieuwspleet uitmondt. Deze buizen worden, van de tweede af gerekend, kaudaalwaarts steeds korter en de zesde, de laatste, vormt een vrij onbeteekenend aanhangsel aan de 7e kieuwspleet; toch is het duidelijk herkenbaar.

De uitvoerbuizen zijn niet permanent. Zij verliezen later den epithelialen bouw en het lumen. Dit is b.v. bij het 255 m.m. lange embryo geschied. Men vindt hier op de plaats der uitvoerbuis van het voorste thymomeer een langen steel, zich voordoende als een uitwas der thymus. De steel slaat zich over den top van het eerste epibranchiale heen en bereikt den wand der kieuwspleet nog. Hij vertoont zich als een koord, dat uitsluitend uit ronde lymphocytachtige cellen schijnt te bestaan. Van den oorspronkelijk epithelialen bouw en van het lumen is geen spoor meer te zien, toch wensch ik het bestaan van een reticulum niet te ontkennen. Het zal ook in den steel wel zichtbaar gemaakt kunnen worden met hiertoe geschikte methoden.

Ter wille van de volledigheid verdienen nog de zoogenaamde epitheellichaampjes en het suprapericardiaalorgaan vermeld te worden. Bij het 63 mm. lange embryo bevindt zich aan weerskanten

een epitheellichaampje direct boven de uitmonding van het 1e en 2e thymomeer. Elk lichaampje is een rond, geïsoleerd celklompje, dat in vorm en grootte op een acinus der thymus gelijkt maar nog compacter is, daar het nog fijnere lymphspleten dan de thymus bezit. Aan het 3e, 4e, 5e en 6e thymomeer was geen spoor van een dergelijk lichaampje te zien.

Het suprapericardiaallichaampje is door VAN BEMMELEN [1]) (1885) aan het einde van den kieuwdarm bij Selachiers ontdekt. Het werd later bij alle klassen van werveldieren gevonden. Het wordt, vrijwel algemeen, voor de laatste aanduiding van een geaborteerden kieuwzak gehouden en komt meestal slechts aan éene zijde van het lichaam voor. BRAUS (1906) vond het bij een 67 mm. lang embryo van Heptanchus, dat waarschijnlijk van hetzelfde moederdier afkomstig is als het mijne en ik kan zijne waarneming bevestigen. Het is enkel aan de linker lichaamshelft goed ontwikkeld en vertoont zich als een plat blaasje, welks lumen omgeven wordt door eene enkele laag van tamelijk hooge epitheliumcellen. Het is op 35 sneden zichtbaar en ligt, zooals BRAUS aangaf, achter den laatsten kieuwboog in den hoek dien deze maakt met het cardiobranchiale. Evenals BRAUS vond ik het door een kort, solied steeltje nabij zijn achterrand nog met het epithelium op den bodem van den kieuwdarm in verbinding.

Aan de rechterzijde van het lichaam is het orgaan rudimentair. Ik vond het gerepresenteerd door een plat klompje epitheliumcellen,

---

[1]) Wegens de aanwezigheid van een suprapericardiaallichaampje bij embryo's van Heptanchus (bij het volwassen dier zocht VAN BEMMELEN het tevergeefs) kan men niet aannemen, dat bij hoogere dieren dit lichaampje de rest zoude zijn van eene kieuwspleet, die bij Notidaniden nog als zoodanig aanwezig is. De morphologische beteekenis van dit orgaan is weer problematisch. Men kan natuurlijk gelooven, dat het de rest is van een kieuwspleet, die nog verder kaudaalwaarts lag dan de laatste (de 8e) van Heptanchus. BRAUS b.v. ziet er de rest van een 10en kieuwzak in.

De rest van een 9en kieuwzak meent hij te vinden in eene geringe uitbochting van den darmwand achter den laatsten kieuwboog in den hoek tusschen het laatste (7e) ceratobranchiale en een kaudaalwaarts gericht uitsteeksel aan zijn ondereinde. Hoewel dit uitsteeksel van het 7e ceratobranchiale uit chondrificeert, vat hij het als de rest van een 8en kieuwboog op.

Met deze opvattingen kan ik mij niet vereenigen. Bij mijn exemplaar is het vrij lange uitsteeksel nog geheel prochondraal en ligt evenals het prochondrale einde van het cardiobranchiale in het begin der spierlaag van den oesophagus. Ik kan in het uitsteeksel slechts een proc. muscularis zien van het 7e ceratobranchiale, zonder morphologisch belang. Ook is eene darmuitstulping die als rest van een 9en kieuwzak zoude kunnen worden opgevat, niet aanwezig; ik moet haar in het exemplaar van BRAUS voor een artefact houden.

dat zonder lumen en volkomen van het darmepithelium afgesnoerd is. Het is te zien op de sneden, die de achterste helft van het blaasje der linkerzijde treffen. BRAUS vermeldt dit klompje niet. Vermoedelijk was zijn exemplaar wat verder ontwikkeld dan het mijne en het klompje meer gedegenereerd. Hij meende de aanduiding van een antimeer van het linker blaasje aan de rechterzijde van het lichaam te zien in eene iets verder kaudaalwaarts gelegen kleine uitstulping van den kieuwdarm.

Laten wij echter tot de thymus terugkeeren. Het *genus* Heptanchus geldt — wel terecht — voor het meest primitieve van de thans nog levende geslachten der Selachiers. Het getal der 8 kieuwzakken overtreft dat van alle andere visschen en hoogere dieren. Bij zoogdieren worden enkel de 5 voorste nog aangelegd.

Bij het 63 mm. lange embryo van Heptanchus mogen wij nu wel aannemen, dat ook zijne thymus zich in een meer primitieven vorm vertoont dan in de ontwikkeling der hoogere dieren. Dan kan echter de oorspronkelijke functie der thymus niet enkel inwendige afscheiding geweest zijn, maar moet zij door haar uitvoerbuizen ook stoffen hebben verwijderd.

Elk thymomeer was oorspronkelijk eene echte klier, in den ouden zin, met eene uitvoerbuis evenals dit het geval geweest is met de schildklier en de voorste lob der hypophysis.

De aanwezigheid van uitvoerbuizen is ook voor de opvatting van de morphologische beteekenis der klier van belang. Sedert DOHRNS onderzoek is men het er vrijwel over eens, dat de thymus een branchiomeer orgaan is, waarvan oorspronkelijk eene afdeeling aan elke kieuwspleet voorkwam.

Nu bezit Amphioxus aan elk zijner talrijke kieuwspleten een klierachtig orgaan, dat met zijne uitvoerbuis in den top der spleet uitmondt. Deze branchionephros heeft de functie van een excretieorgaan en sedert vele jaren heb ik vermoed, dat zij homoloog zoude zijn met de thymus der hoogere dieren.

Dit vermoeden werd versterkt toen GOODRICH (1909) vond, dat de branchionephros niet uit het coeloomepithelium ontstaat, zooals men voor een excretieorgaan bij Chordaten toch geneigd zoude zijn aan te nemen. Hij zegt wel niet, dat zij zich uit het kieuwepithelium ontwikkelt, maar zijne teekeningen geven daarvan toch den indruk. Mocht deze indruk door later onderzoek juist blijken, dan ontstaat de branchionephros uit hetzelfde weefsel als de thymus der hoogere dieren, maar zij krijgt nooit cellen die op lymphocyten gelijken, welke trouwens ook niet in het bloed van Amphioxus voorkomen, dat enkel uit phasma zonder roode of witte

bloedlichaampjes bestaat, evenals het bloed in zijn vroegste stadium bij Cranioten [1]).

Het vermoeden der homologie van thymus en branchionephros heeft ook van de zijde der Cranioten steun gekregen, nu in de ontwikkeling van een zoo primitieven vorm als Heptanchus de aanwezigheid van uitvoerbuizen der thymus gebleken is, die op analoge wijze als bij Amphioxus in de kieuwspleten uitmonden.

Indien de branchionephros inderdaad uit het kieuwepithelium ontstaat, dan schijnt mij het voornaamste bezwaar om haar met de thymus te homologiseeren gelegen in de periode van het optreden dezer klier. Men zoude toch moeten verwachten, dat de thymus in een zeer vroeg ontwikkelingsstadium herkenbaar werd, terwijl dit eerst vrij laat het geval is.

Men kan dit echter verklaren omdat de oorspronkelijke exkretorische functie niet meer tot ontwikkeling komt, daar zij overgenomen werd door voornier en oernier, terwijl de andere functie, de inwendige afscheiding, veroorzaakt door de lymphocytachtige cellen, phylogenetisch veel later ontstaan moet zijn.

2. *Spiraculair zintuig.*

Aan de eerste kieuwspleet (spiraculum, spuitgat) komt bij geen werveldier eene afdeeling van de thymus tot ontwikkeling en schijnt er zelfs niet te worden aangelegd. Daarentegen vindt men aan den wand van het spuitgat bij embryos of larven van de meer oorspronkelijke visschen: Selachiers, Ganoiden en Dipnoi een zintuig, dat aan geen der overige kieuwspleten wordt aangetroffen. Het komt bij deze visschen ook in den volwassen toestand voor.

Men vindt het zelfs bij die vormen (Dipnoi, Holostei) bij welke het spuitgat, dat als darmzak wordt aangelegd, niet meer naar buiten doorbreekt.

Het werd in 1885 ontdekt door RAMSAY WRIGHT, die het vond bij de Holostei (Lepidosteus en Amia) in eene uitstulping van den medialen wand van den spiraculairen kieuwzak. Deze uitstulping is naar boven gericht en omgroeid door het kraakbeen der oorkapsel, m. a. w. zij ligt in een kanaal van den lateralen kraakbeenigen wand der regio otica van den schedel, maar heeft overigens geen betrekking met het gehoororgaan.

Een dergelijk kanaal in het schedelkraakbeen, waarin eene uitstulping van den spuitgatwand binnendringt was door BRIDGE bij

[1]) Eenige weinige onderzoekers meenen cellen in het bloed van Amphioxus gevonden te hebben. Ik heb op mijne talrijke doorsneden van larven en volwassen dieren hen niet kunnen waarnemen.

Polyodon beschreven en werd door Wright ook bij den steur waargenomen. De aanwezigheid van een zintuig bij deze Chondrostei wordt echter niet vermeld.

Wright vond, dat het zintuig bij de Holostei verzorgd wordt door een tak van den ram. oticus van den n. facialis, die bij de Ganoiden (Chondrostei en Holostei) eveneens door het kraakbeen der oorkapsel omgeven wordt en waarvan bekend was, dat hij in deze streek takken uitzendt naar zintuigen, behoorende tot het systeem der zijorganen (lateralis systeem).

Deze zintuigen, door Wright neuromasten („Nervenhügel") genoemd, liggen, hetzij vrij aan de oppervlakte, hetzij beschermd in zakjes, groeven of kanalen, maar ontstaan alle uit het ektoderm. Merkwaardig was nu, dat ook het zintuig van den spiraculairzak den bouw van een neuromast vertoonde, hoewel Wright moest meenen, dat het uit het *entoderm* ontstaan was. Het scheen, dat men hier het onverwachte voorbeeld had van een zintuig der Chordaten, dat niet uit het ektoderm ontstond, terwijl het toch verzorgd werd door eene zenuw van het lateralis systeem der huidzintuigen.

Maar de studie der Dipnoi verdreef het zonderlinge van het verschijnsel. In deze groep ontdekte Pinkus (1895) bij Protopterus annectens een blaasje met een zintuig in den wand en ingebed in het kraakbeen der regio otica. Het zintuig — volgens de afbeelding blijkbaar een neuromast — wordt verzorgd door een kaudaalwaarts loopenden lateralistak van den n. facialis.

Pinkus beschrijft nog twee andere kaudaalwaarts loopende lateralistakken van den n. facialis. De eene vormt de bekende anastomose met deze ram. lateralis vagi (en glossopharyngei), den anderen noemt hij ram. oticus. Hij teekent (l.c. fig. 3) den oorsprong van deze drie zenuwtakken echter zoo dicht bij elkaar, dat men hen naar mijne meening samen als het sterk ontwikkelde homologon van den ram. oticus der Ganoiden moet opvatten.

Van het zintuig zegt Pinkus (l.c. p. 307) „Das Organ ist zweifellos ein Derivat des Seitenkanales. Ueber seine Bedeutung vermag ich übrigens nichts auszusagen, da vergleichend anatomische und entwicklungsgeschichtliche Thatsachen mir bisher fehlen".

De kennis der ontwikkelingsgeschiedenis hebben wij te danken aan Agar (1906) die den aanleg van het spiraculum bij Lepidosiren en Protopterus onderzocht. Hij toonde aan, dat het zintuig als ektodermverdikking wordt aangelegd. Deze aanleg bereikt den top van den solieden darmuitwas die het spuitgat voorstelt en snoert zich daarop van het ektoderm af. Het orgaan maakt dan natuurlijk den indruk, uit het entoderm ontstaan te zijn.

Agar is evenmin als Pinkus op het werk van Ramsay Wright opmerkzaam geworden, anders had hij ongetwijfeld vermeld, dat een spiraculair zintuig reeds bij Holostei bekend was. Ook zoude hij wel niet hebben nagelaten, er op te wijzen, dat men bij Holostei geen reden meer heeft, aan den entodermalen oorsprong van het zintuig te gelooven nu bij Dipnoi [1]) zijne vorming uit het ektoderm gebleken is.

In tegenstelling met Pinkus zegt Agar „This organ has no relation to the lateral line system of sense organs". Mijns inziens echter behoort het ongetwijfeld tot dit systeem daar het een neuromast bezit, geïnnerveerd wordt door een lateralistak van den n. facialis en bovendien bij de Dipnoi duidelijk uit het ektoderm ontstaat.

De meerderheid der huidzintuigen zinkt in den loop der ontogenesis onder de epidermis en vindt bescherming in het onderhuidsbindweefsel, maar één orgaan, aangelegd in de onmiddellijke nabijheid van het spuitgat, zakt daarin naar binnen en komt dan tot bijzondere ontwikkeling. Dit geschiedt m. i. niet alleen wanneer het spuitgat niet meer naar buiten doorbreekt, doch zijne uitmonding in den darm behoudt, zooals bij de Holostei, maar zelfs ook wanneer bovendien de verbinding met den darm verloren gaat, zooals bij de Dipnoi.

Laten wij nu overgaan tot de Selachii. Bij deze onderzocht Wright het spuitgat van een circa 60 m.m. lang embryo van Mustelus. Hij vond hier twee boven elkaar gelegen uitstulpingen van den medialen wand. De dorsale uitstulping reikte tot onder den canalis semicircularis lateralis van het gehoororgaan en is reeds door Joh. Müller (1841) bij tal van volwassen Selachiers ontdekt.

De ventrale uitstulping bereikte het schedelkraakbeen niet en bevatte eene plek met hoog epithelium, dat hij voor zintuigepithelium hield en naar zijne meening geïnnerveerd werd door den ram. praetrematicus van den n. facialis. Deze innervatie zoude doen vermoeden, dat men hier met een ander zintuig te doen heeft dan bij de Holostei, maar Phelps Allis (1901) die een 122 m.m. lang embryo van Mustelus onderzocht, kon de zenuw van het orgaan af vervolgen tot dicht bij den ram. oticus, denzelfden tak, die bij de Holostei het zintuig verzorgt.

Onafhankelijk van het werk van Wright verscheen in hetzelfde

[1]) Greil (1913) vermeldt den ektodermalen aanleg van het zintuig („Hyomandibularorgan") bij Ceratodus en zijne innervatie door een lateralistak („ram. hypoticus") van den n. facialis. Of het zintuig ook bij Ceratodus later door het schedelkraakbeen omgeven wordt, vind ik niet vermeld.

jaar (1885) dat van VAN BEMMELEN. Deze vond de beide uitstulpingen behalve bij Mustelus bij een groot aantal Selachiers, zoowel embryos als volwassen dieren. Beide (de dorsale en de ventrale) tegelijk in hetzelfde dier vond hij bij vormen die tegenwoordig in navolging van TATE REGAN als Galeoidei kunnen worden samengevat. Daarentegen was bij de onderzochte roggen: Raja, Torpedo, Trygon en Myliobatis alleen de ventrale uitstulping voorhanden en ontbrak de dorsale in overeenstemming met de resultaten van JOH. MÜLLER, die de dorsale bij de roggen enkel in de familie der Rhinobatidae had kunnen vinden.

Omgekeerd ontbrak de ventrale en was alleen de dorsale uitstulping aanwezig bij Acanthias en Heptanchus, elk een representant, resp. van de groep der Squaloidei en der Notidanoidei.

Aan de ventrale uitstulping ontwikkelt zich bij alle vormen die haar bezitten een follikel in de gedaante van een ovaal blaasje, het gehoorlabyrinth bijna aanrakend, van binnen met hoog epithelium bekleed en door een korten steel met of zonder lumen met den wand van het spuitgat verbonden. Bij een volwassen Torpedo was het blaasje zeer groot.

Wat de morphologische beteekenis van den follikel aangaat, dacht VAN BEMMELEN aan de mogelijkheid van eene homologie met het suprapericardiaalorgaan, dat aanvankelijk ook een enkelvoudig blaasje is, maar zegt hij (l.c. p. 178) „[später] tritt aber der grosse Unterschied ein: die Suprapericardialkörper entwickeln sich zu drüsenartigen Gebilden [1]) die Spritzlochbläschen treiben nur eine oder zwei acinöse Ausstülpungen oder bleiben wohl ganz einfach".

VAN BEMMELEN dacht verder aan de mogelijkheid, den follikel evenals het suprapericardiaallichaampje te kunnen beschouwen als de rest van eene oorspronkelijke kieuwspleet.

Naar mijne meening kan deze opvatting tegenwoordig niet meer volgehouden worden en is de follikel een spiraculair zintuigblaasje. VAN BEMMELEN dacht niet aan deze mogelijkheid, omdat hij vermoedelijk geen verzorgende zenuw heeft waargenomen.

Aan de *dorsale* uitstulping van het spuitgat der Galeoidei wordt het voorkomen van een follikel niet vermeld. Wij mogen dus wel aannemen, dat hij daar ontbreekt.

Maar Acanthias en Heptanchus bezitten enkel de dorsale uitstulping; ontbreekt bij hen nu ook het spiraculaire zintuig?

VAN BEMMELEN spreekt van eene „dorsale Ausstülpung" maar noemt

---

[1]) Hun bouw heeft dan bij Selachiers veel overeenkomst met dien der glandula thyreoidea, waarvan zij morphologisch echter geheel verschillen.

haar ook wel „Anhang" van het spuitgat. Hij zegt (l. c. p. 176). „Bei erwachsenen Exemplaren von Acanthias endlich konnte ich den Anhang als ein sackförmiges, ungefähr 3 mm langes Gebilde aus dem Bindegewebe frei präpariren, seine Wände zeigten sich ausserordentlich dicht und inwendig glatt, das Epithelium hoch und drüsig. Ebenso zeigte sich der dorsale Anhang von Heptanchus, aber relativ noch kürzer". Zooals aanstonds blijken zal, heeft hij ongetwijfeld het zintuigblaasje vrij gepraepareerd.

Hoffmann (1899) heeft o. a. ook de ontwikkeling der uitstulping van het spuitgat bij Acanthias onderzocht. Hij vond haar bij 28 mm. lange embryos het eerst opgetreden en geïnnerveerd door een lateralistak van den n. facialis. Hij houdt dezen tak, die ook huidzintuigen verzorgt voor hoogstwaarschijnlijk homoloog met den ram. oticus der Ganoiden. De uitstulping is weldra met haar blinde uiteinde naar voren gericht en vereenigt zich hier met de zenuw, wat ik aan mijn materiaal van Acanthias bevestigen kan.

Hoffmann heeft de innervatie gevonden, terwijl hem ook het werk van Wright bekend was, dat hij uitvoerig aanhaalt. Toch kwam hij niet tot het inzicht, dat hier een zintuig aanwezig moest zijn. Hij was te veel onder den indruk hier met de laatste rest te doen te hebben van een kieuwzak die verloren gegaan was.

Behalve de beide embryos van Heptanchus omvat mijn eigen onderzoek serieën dwarse sneden (15 μ dik) door Acanthiasembryos wier lengte van 23 tot 98 mm. varieert.

Bij het 23 mm. lange embryo vormt de voorwand van het spuitgat eene rostraalwaarts gerichte uitbochting langs het gehoororgaan, waarvan zij door de vena jugularis (met den n. facialis langs den onderrand der vena) gescheiden is. De uitbochting is op 7 sneden vóór de uitwendige opening van het spuitgat te zien en heeft den vorm van een zijdelings afgeplatten kegel, waarvan de as evenwijdig aan de lengteas (die door de chorda gaat) naar voren loopt. De drie voorste der 7 sneden treffen den top van den kegel, die gekenmerkt wordt door zijn hooge epitheliumcellen, zoodat het lumen eerst op de derde snede verschijnt.

Ook ziet men hier het einde van den tak van den ram. oticus verbonden met de groep der hooge cellen. Reeds Hoffmann heeft er op gewezen, dat men door deze verbinding van zenuw en epithelium de plaats van het orgaan kan bepalen voordat het scherper begrensd is.

Bij een embryo van $39^1/_2$ m.m., waarvan ik (1922) den schedel beschreven heb, heeft de dwarse snede door den voorrand der uitwendige opening van het spuitgat op de huid tevens den voorrand

der inwendige opening naar den darm getroffen. De uitbochting is op 21 rostraalwaarts volgende sneden te zien. Zij loopt evenals bij het zoo even behandelde embryo langs het gehoororgaan naar voren, daarvan door de vena jugularis en den n. facialis gescheiden.

Vervolgen wij de uitbochting van de basis uit rostraalwaarts, dan zien wij haar reeds na 8 sneden veranderd in een platte, nauwe gang met medialen en lateralen wand. De gang strekt zich over 4 sneden uit en gaat dan bijna zonder verandering van lumen over in het topgedeelte der uitstulping, dat op 9 sneden zichtbaar is. De mediale wand van dit gedeelte draagt over zijne geheele lengte een neuromast, wiens achtereinde scherp begrensd is. Nabij het rostrale einde (den blinden top) der uitstulping verbindt zich de tak van den ram. oticus met den neuromast.

Men kan nu, van den voorrand van het spuitgat uitgaande, drie deelen onderscheiden, resp. op 8, 4 en 9 sneden zichtbaar, die wij vestibulum van het spuitgat, uitvoergang en corpus van het zintuigblaasje zullen noemen.

Uitvoergang en corpus behooren bij elkaar, maar het vestibulum is niets anders als eene gewone uitbochting van den voorwand van een kieuwzak en verdwijnt later, ten gevolge van het grooter worden der uitwendige opening van het spuitgat. Heeft het embryo eene lengte van 69 m.m. dan is het vestibulum nog aanwezig, maar bij 78 m.m. of meer is het verdwenen, zoodat men dan de intusschen zeer fijn geworden uitmonding van de uitvoergang op eene snede ziet, die *achter* den voorrand van het spuitgat gelegen is. Dan komt de toestand van het zintuigblaasje in hoofdzaak met dien van het orgaan bij het volwassen dier overeen. Het vormt dan een aanhangsel aan het spuitgat en de beschrijving door van Bemmelen van den follikel der Galeoidei en roggen past in hoofdzaak op het zintuigblaasje van Acanthias.

Vermoedelijk zijn deze blaasjes bij alle Selachiers homoloog en uit het ektoderm ontstaan, maar bij sommige vormen wat dieper in het spuitgat gezonken dan bij andere.

Wij zullen het blaasje op eene serie dwarse sneden door een Acanthiasembryo van 98 mm. nog wat nader vervolgen.

De uiterst fijne opening in den voorwand van het spuitgat is slechts op éene snede te zien. Het orgaan strekt zich van hier over 50 sneden rostraalwaarts uit. Het loopt langs het gehoororgaan, waarvan het — als vroeger — door de vena jugularis en den n. facialis gescheiden is.

Het corpus van het blaasje met den langen neuromast is op de voorste 21 sneden zichtbaar; de uitvoergang komt op de volgende

29 sneden. De neuromast neemt dus bijna de halve lengte van het orgaan in en is veel grooter dan bij de zijorganen der huid. Om het corpus ziet men het mesenchym zich verdichten ter vorming van eene bindweefselkapsel. De uitvoergang vertoont onmiddellijk achter het corpus een anderen bouw dan verder kaudaalwaarts.

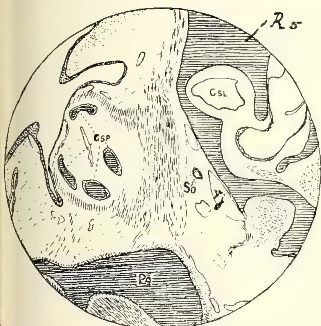


Fig. 2*a*.

Fig. 2*a*. Dwarse snede door de regio otica van den schedel en den voorwand van het spuitgat bij een 98 mm. lang embryo van Acanthias vulgaris.

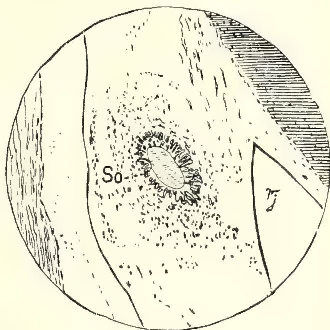


Fig. 2*b*.

Fig. 2*b* vertoont het spiraculairorgaan bij sterkere vergrooting. Zijn inhoud, slijm (in het praeparaat blauw gekleurd) is door fijne harceering aangegeven.

Op de eerste 5 sneden achter het corpus is n.l. de mediale wand van de gang verdikt tengevolge van eene woekering van de buitenste laag der epitheliumcellen. Het ovale lumen is hier wijder dan op een andere plaats. De lengte-as van het ovaal is ongeveer tweemaal langer dan in het corpus. Op de volgende 24 sneden wordt dit lumen steeds kleiner en bestaat de wand uit twee lagen van cellen. Die der binnenste laag zijn zeer plat; die der buitenste laag kan men kubisch noemen.

Van belang is het, dat het corpus van het zintuigblaasje en het proximale stuk (5 sneden) van de gang gevuld zijn met slijm, dat zich in dit stadium (en later) blauw kleurt evenals in de ampullair- en zijkanaalorganen. In het distale deel van de uitvoergang (24 sneden) is het slijm in mindere hoeveelheid aanwezig.

Ook hierin toont het spiraculairorgaan, dat het tot het lateralis systeem der huidzintuigen behoort, die veelal ook met den term „slijmorganen" worden samengevat. Het directe bewijs is nog niet geleverd, doch kan misschien bij jongere stadiën dan ik bestudeerd heb, gevonden worden.

De *ram. oticus* ontspringt bij alle onderzochte embryos met eene ganglieuse verdikking uit het buccalisganglion van den n. facialis. Bij het embryo van 39 ½ mm. loopt hij langs het kraakbeen der oorkapsel — maar nog niet door het kraakbeen omgeven — dorsaal- en kaudaalwaarts. Hij geeft een paar dunne takken af naar organen in het zijkanaal der regio otica en een dikken tak, die de vena jugularis kruist, naar het spiraculaire zintuig.

Bij het 98 mm. lange embryo is een deel van den ram. oticus door het kraakbeen der oorkapsel omgroeid, evenals dit bij de Ganoiden het geval is. In tegenstelling met de Selachiers wordt bij Ganoiden evenals bij Dipnoi ook het zintuig zelf door het kraakbeen omsloten.

Wij willen nu overgaan tot het 63 mm. lange embryo van Heptanchus. De kleine uitwendige opening van het spuitgat ligt hier ver naar achteren. De spleetvormige opening in den darm reikt veel verder rostraalwaarts. Nemen wij aan, dat het begin — de basis — van het vestibulum op de snede door den voorrand dezer spleet valt, dan ligt de top van het vestibulum nog 28 sneden verder naar voren. In dezen top mondt het zintuigblaasje nog zonder uitvoerbuis uit. Het is op 12 sneden verder rostraalwaarts langs het gehoororgaan te vervolgen waarvan het door de vena jugularis gescheiden is. De neuromast op den medialen wand steekt met zijn achterrand nog even uit in het vestibulum. Het is mij niet gelukt een innerveerende zenuw te vinden. Misschien is de sterk gekleurde bindweefselkapsel hieraan schuld, die verder ontwikkeld is dan bij

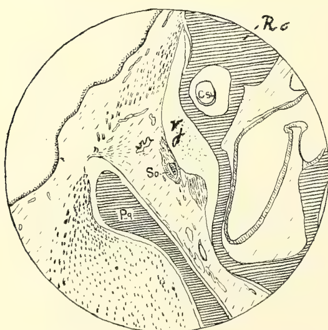


Fig. 3*a*. Dwarse snede door de regio otica van den schedel bij een 63 mm. lang embryo van Heptanchus cinereus.

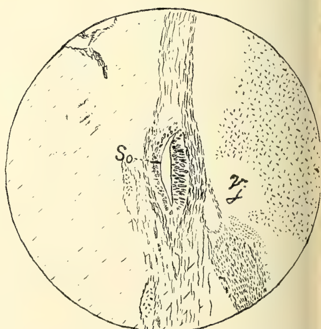


Fig. 3*b* vertoont het spiraculairorgaan bij sterkere vergrooting.

het grootste der onderzochte embryos van Acanthias. Bij het 255 m.m. lange embryo was het orgaan zoo slecht geconserveerd, dat ik er niets bijzonders van kan vermelden.

3. *Fenestra vestibuli.*

Bij het 63 mm. lange Heptanchusembryo geschiedt de bevestiging van het hyomandibulare aan de oorkapsel door eene dunne laag bindweefsel, waarin ik geene gewrichtsholte kan waarnemen. Zij strekt zich uit over 49 sneden van 15 μ dikte.

Onmiddellijk onder het vooreinde dezer bevestigingsplaats ziet men op de sneden 5, 6, 7 (van voren af geteld) eene kleine opening in den wand der oorkapsel waardoor het mesenchym, dat in dit stadium de perilymphatische ruimte vult, met het mesenchym buiten de kapsel in verbinding staat. De achterrand van het gat is niet scherp begrensd; men kan er aan twijfelen, of het op eenige volgende sneden nog aanwezig is of niet.

Bij het embryo van 255 mm. daarentegen zijn de randen der opening scherp. De bevestiging van het hyomandibulare aan de oor-

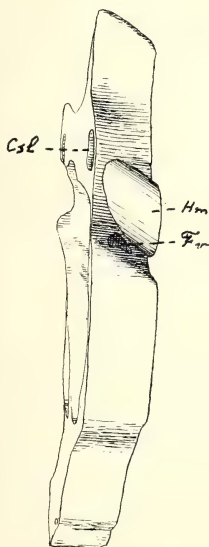


Fig. 4. Laterale vlakte van het model eener schijf uit het kraakbeen der regio otica van een 255 mm. lang embryo van Heptanchus cinereus.

De schijf is zóó gedraaid, dat een deel der voorvlakte met den canalis semicircularis lateralis nog even zichtbaar is en dat de fenestra vestibuli niet door het hyomandibulare bedekt wordt.

kapsel geschiedt hier op ongeveer 59 sneden van 30 μ dikte (bij al de overige embryos bedraagt de dikte der sneden 15 μ).

De opening reikt van snede 8 tot 25 (van voren geteld). Zij wordt gesloten door sterk rood gekleurd bindweefsel, dat ook het hyomandibulare aan den schedel helpt verbinden en scherp afsteekt tegen het blauwe kraakbeen van den schedel. Zij bevindt zich in het ondereinde der voorste helft van de groef voor het hyomandibulare, dat haar gedeeltelijk bedekt.

Aan het door den Heer P. J. DE VRIES volgens de methode van BORN vervaardigde wasmodel kan men zien, dat de opening niet zuiver ovaal, maar niervormig is, daar de onderrand eene inspringende bocht vormt.

Het mesenchym, dat vroeger de perilymphatische ruimte vulde, is grootendeels verdwenen en door vloeistof vervangen, die door het bindweefsel dat de opening afsluit, belet wordt naar buiten te treden. De opening moet wegens hare ligging beschouwd worden als het homologon der fenestra vestibuli, die bij Amphibieën en Amnioten door den stapes gedekt wordt, bij visschen, naar men meende, niet zou voorkomen.

Wegens de groote lengte van het embryo moet het ongeveer voldragen geweest zijn, en het is niet aan te nemen, dat het venster na de geboorte niet meer zou bestaan. Ik was echter niet in de gelegenheid volwassen materiaal te onderzoeken.

Afgezien van de autostyle Dipnoi, zijn de visschen in het algemeen hyostyl, hun krachtig hyomandibulare fungeert in de eerste plaats als kaaksteel en dit feit zal wel in verband staan met de afwezigheid van eene fenestra vestibuli.

Maar twee primitieve vormen: Heptanchus en Hexanchus zijn amphistyl. Hun hyomandibulare kan, wegens de sterke bevestiging van het palatoquadratum aan den schedel, maar zwak als kaaksteel fungeeren en zoo is het denkbaar, dat het, althans bij Heptanchus, nog de functie kan hebben, trillingen naar het gehoororgaan over te brengen.

In elk geval is de aanwezigheid der fenestra bij het embryo een steun voor de oudere opvatting, die in latere jaren vaak aangevallen is, de opvatting namelijk, dat de stapes der hoogere dieren het homologon is van het hyomandibulare der visschen.

LETTERVERKLARING.

Csl. Canalis semicircularis lateralis.
Csp. Cart. spiracularis. Elk der beide spuitgatkraakbeenderen is (fig. 2*a*) tweemaal gesneden.
E. Top van het epibranchiale van den eersten kieuwboog.
Ep. Epitheellichaampje.
Fv. Fenestra vestibuli (ovalis).
Hm. Hyomandibulare.
K_2. Tweede kieuwspleet.
Pq. Palatoquadratum.
Ro. Regio otica van den schedel.
So. Spiraculair zintuigorgaan.
Th. Thymus.
Vj. Vena jugularis.

LITERATUUR.

AGAR, W. E. The Spiracular Gill Cleft in Lepidosiren and Protopterus Anat. Anzeiger, Bd. 28, 1906.

ALLLIS Jr. E. PHELPS. The Lateral Sensory Canals, the Eye Muscles and the Peripheral Distribution of certain of the Cranial Nerves of Mustelus laevis. Quart. Journ. of micr. Science, Vol. 45, 1901.

BEMMELEN, J. F. VAN, Ueber vermuthliche rudimentäre Kiemenspalten bei Elasmobranchiern. Mitth. a. d. zoologischen Station zu Neapel, Bd. 6, 1885.

BRAUS, H. Ueber den embryonalen Kiemenapparat von Heptanchus. Anatomischer Anzeiger, Bd. 29, 1906.

BRIDGE F. W. On the Osteology of Polyodon folium. Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 169, 1879.

DOHRN, A. Die Entwicklung und Differenzirung der Kiemenbogen der Selachier. Mitth. a d. zoologischen Station zu Neapel, Bd. 5, 1884.

FRITSCHE, F. Die Entwickelung der Thymus bei Selachiern. Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. Bd. 46, 1910.

GOODRICH, E. S. On the Structure of the Excretory Organs of Amphioxus. Quart. Journ. of micr. Sc. Vol. 54, 1909.

GREIL, A. Entwickelungsgeschichte des Kopfes und des Blutgefässystemes von Ceratodus forsteri. Denkschr. d. Medicinisch Naturwiss. Ges. zu Jena, Bd. 4, 1913.

HAMMAR, J. AUG. Zur Kenntnis der Elasmobranchier-Thymus. Zool. Jahrbücher, Abt. f. Anat. und Ontog. Bd. 32, 1912.

HOFFMANN, C. K. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Selachii. Morph. Jahrbuch, Bd. 27, 1899.

MÜLLER, JOH. Vergleichende Anatomie der Myxinoiden. Dritte Fortsetzung. Abh. der Kön. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1841.

PINKUS, F. Die Hirnnerven des Protopterus annectens. Morph. Arbeiten, herausgeg. von Schwalbe. Bd. 4, 1895.

WRIGHT, R. RAMSAY. On the hyomandibular Clefts and Pseudobranchs of Lepidosteus and Amia. Journ. of Anat. and Phys. Vol. 19, 1885.

Physiologie. — J. G. DUSSER DE BARENNE en J. B. ZWAARDEMAKER: *„Over den invloed der vagi op de frequentie der actiestroomen van het middenrif gedurende zijn samentrekking bij de inademing”* [1]).

(Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en R. MAGNUS).

In een vorige mededeeling is door een van ons [2]) aangetoond, dat de frequentie der actiestroomen der dwarsgestreepte spieren, zooals deze bij de ontherseningsstijfheid bij de kat en in de willekeurige samentrekking der menschelijke skeletspieren optreden, een duidelijke vermindering ondergaat na uitschakeling der proprioceptieve impulsen, die in de spieren bij hun samentrekking ontstaan. De uitschakeling dier centripetale prikkels werd bewerkstelligd door doorsnijding van de in aanmerking komende achterwortels bij het proefdier, door plaatselijke intramusculaire novocaine-inspuiting bij den mensch.

Wij hebben ons toen de vraag voorgelegd of dit gegeven ook vast te stellen is bij andere vormen van innervatie en daartoe allereerst een onderzoek ingesteld naar de verhoudingen ten dezen bij het middenrif. Op dit onderzoek, dat ook voor deze innervatie analoge verhoudingen aan het licht bracht, willen wij hier niet ingaan. Maar in den loop daarvan verkregen wij gegevens, die bij ons het vermoeden deden rijzen, dat de vagus wellicht een invloed op de frequentie der actiestroomen, die in het middenrif tijdens zijn samentrekking bij de inademing optreden, zou kunnen hebben.

Het was daarom noodzakelijk deze vraag aan een afzonderlijk onderzoek te onderwerpen en wij willen over den uitslag daarvan, hier in het kort berichten. De vraag was dus eenvoudig deze: Welke is de frequentie der actiestroomen van het middenrif tijdens de inademingsbewegingen *voor* en *na* de uitschakeling der beide vagi?

Aanvankelijk gebruikten wij als proefdier de kat; toen wij daaraan reeds een antwoord op onze vraag verkregen hadden, hebben wij

[1]) Voorloopige mededeeling van dit onderzoek werd gedaan op het IXe Internationale Physiologen-Congres te Edinburgh op 25 Juli 1923.

[2]) J. G. DUSSER DE BARENNE, Untersuchungen über die Aktionströme der quergestreiften Muskulatur bei der Enthirnungsstarre der Katze und der Willkürinnervation des Menschen. Skandin. Arch. f. Physiol., 1923, Bd. XLIII (Festschrift für R. TIGERSTEDT), S. 107.

ook nog een aantal proeven op het konijn verricht en konden ook bij dit proefdier geheel dezelfde verhoudingen ten dezen, ja zelfs nog veel duidelijker dan bij de kat, vaststellen.

De inrichting der proeven was steeds de volgende:

Narcose van het proefdier door onderhuidsche inspuiting van urethaan (ca. 1 gram per K.G. lichaamsgewicht). Door kunstmatige verwarming van het proefdier werd zooveel mogelijk getracht dit op constante lichaamstemperatuur te houden. Snede in de linea alba van den buikwand, ca. 3 cm. lang, onmiddellijk caudaal van den processus ensiformis; fixatie van dit zwaardvormig uitsteeksel in verticale richting met een arteriepincet aan een boven het dier zich bevindende, van de operatietafel electrisch geïsoleerde stang. Zeer voorzichtig van zijn onderlaag vrijprepareeren van een der voorste peilers van het middenrif, van de buikzijde uit derhalve, wat bij de kat niet zoo fraai mogelijk is als bij het konijn. Dan werd onder dezen peiler een klein, celluloid plaatje geschoven, om zooveel mogelijk de spier van zijn onderlaag electrisch te isoleeren. Nu werden op 1 à 1,5 cm. afstand van elkander in den spierbundel twee kleine haakjes als electroden geslagen, aanvankelijk koperen, later zulke van zilver, die galvanoplastisch met een laagje zilverchloride overtrokken waren. De koperen electroden waren natuurlijk polariseerbaar, de zilveren met zilverchloride overtrokken haakjes vrijwel onpolariseerbaar. Op beide manieren kregen wij, zooals trouwens te verwachten was, geheel overeenkomstige uitkomsten, daar de polarisatie der electroden bij de telkens tegengesteld gerichte, kortdurende en zoo zwakke actiestroomen weinig of geen rol speelt. De electroden stonden door zeer lange, dunne metalen draadjes in verbinding met de dikkere geleidingsdraden, die naar den snaargalvanometer (groot model van EDELMANN), waarmede de actiestroomen opgenomen werden, verliepen. Geregistreerd werd met behulp van het bekende valapparaat van WERTHEIM SALOMONSON. Bovendien werden de ademhalingsbewegingen van het middenrif op een kymographion met beroet, lang papier opgeteekend en onder deze curven tevens voor iedere opname automatisch nauwkeurig aangegeven, welk gedeelte van het mechanogram overeenkwam met het opgenomen electromyogram. De operatieplank met het proefdier werd door plaatsing op groote paraffineblokken electrisch van de tafel geïsoleerd.

Nu werden eerst de actiestroomen van het middenrif tijdens de normale ademhaling opgenomen, dus vóór de uitschakeling der vagi. Daarna werden de beide vagi geprepareerd en „reizlos" uitgeschakeld, hetzij door plaatselijke aethernarcose der zenuwen, hetzij door plaatselijke narcose met novocaine; in het laatste geval legden wij een watje met 1 % novocaine-oplossing gedrenkt, over een lengte van 1 á 2 cm. om de zenuw heen. Zoodra aan de ademhalingsbewegingen waargenomen werd, dat door de plaatselijke narcose de vagi buiten werking gesteld waren, werden opnieuw de actiestroomen van het middenrif geregistreerd. Volledigheidshalve zij nog er op gewezen, dat wij, door een bijzondere inrichting in staat waren, onze electrische opnamen in elke door ons gewenschte phase der ademhaling vast te leggen.

Als *constant* resultaat van al onze proeven konden wij vaststellen, dat de uitschakeling van beide vagi, indien zij een duidelijke verandering der ademhalingsbewegingen ten gevolge had, *een duidelijke vermeerdering der frequentie der actiestroomen van het middenrif ten*

gevolge heeft. Slechts in die weinige gevallen, waarin het ademhalingstype door de uitschakeling der vagi weinig veranderd werd, een reeds aan Rosenthal bekend feit, vonden wij slechts een geringe vermeerdering, maar dus ook dan toch nog altijd een vermeerdering, van de frequentie der actiestroomen. Een in omgekeerden zin wijzend resultaat, een vermindering der frequentie derhalve, hebben wij tot dusver nog niet ontmoet.

Allereerst willen wij eenige curven laten zien, die ter staving voor onze aangifte kunnen dienen.

In fig. 1*a* en 1*b* ziet men, zij het ook helaas geenszins zoo duidelijk als op de origineele opname, dat de frequentie der actie-

fig. 1*a*

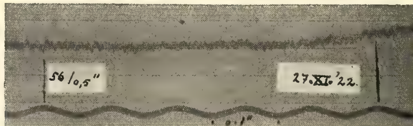
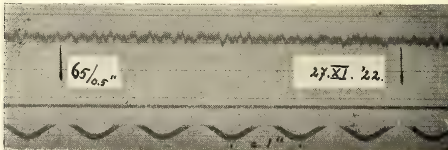


fig. 1*b*



Kat. Proef van 27. XI. 1922. fig. 1*a* actiestroomen van het middenrif *vóór*, fig. 1*b* *na* uitschakeling der vagi. Tijd in 0.1 sec. Op origineele plaat gedurende de gemerkte 0.5″ in 1*a* 56, in 1*b* 65 actiestroomen te tellen. Dus vóór vagusuitschakeling frequentie **112**, er na **130** per sec.

fig. 2*a*

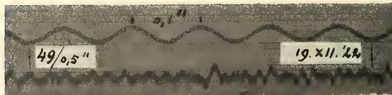
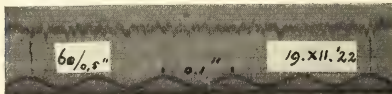


fig. 2*b*



Kat. Proef van 19. XII. 1922. Als vorige figuur. Frequentie in 2*a* **98** per sec., in 2*b* **120** per sec.

stroomen vóór en na de vagusuitschakeling **112** resp. **130** per secunde bedraagt. In fig. 2*a* en 2*b* zijn deze getallen **98** resp. **120** per secunde.

In onderstaande tabel vindt men de uitkomsten onzer **8** proeven op de kat, in de volgorde waarin zij uitgevoerd zijn. In proef IV is slechts een geringe vermeerdering der frequentie aanwezig, maar was toen ook een sprekende verandering in de samentrekking van het middenrif, na de vagusnarcose, niet waar te nemen.

TABEL
der frequentie der actiestroomen van het middenrif bij de kat.

Nummer van de proef.	Vóór	Na	% vermeerdering.
	de uitschakeling der beide nervi vagi.		
I.	98	120	22.45
II.	118	130	10.17
III.	102	117	14.7
IV.	95	101	geen duidelijke verandering v. h. type der ademhalingsbewegingen.
V.	118	130	10.17
VI.	112	130	16.07
VII.	113	132	16.81
VIII.	119	133	11.76

Nog sprekender zijn de getallen bij het konijn in **6** proeven gevonden, waar zelfs in één proef een frequentietoeneming van 40 % kon worden vastgesteld.

De vraag, die nu beantwoord moet worden, is natuurlijk, hoe wij dit proefondervindelijk gegeven te beschouwen hebben.

De typische, in de meeste gevallen na dubbelzijdige vagotomie, hetzij deze een daadwerkelijke doorsnijding der zenuwen of een functioneele vagotomie door plaatselijke narcose is, optredende verandering in de ademhaling is een sterke verdieping der inademingsbewegingen en een sterke verlangzaming van het rhythme der ademhalingsbewegingen. Wij willen ons hier tot de verdieping der inademing bepalen. De spieren, die de inademing bewerkstelligen en daaronder in de eerste plaats wel het middenrif, trekken zich,

na de uitschakeling der vagi, met meer kracht samen. De meest voor de hand liggende gedachte is nu wel dat deze vergrooting der kracht (veroorzaakt wordt door een krachtiger innervatie van het middenrif vanuit het centrale zenuwstelsel), in een vermeerdering der frequentie der actiestroomen zijn uitdrukking vinden zou.

Deze verklaring is echter niet juist. Allereerst moet men bedenken, dat het reeds een door PIPER vastgesteld feit is, dat bij de willekeurig teweeggebrachte krachtiger samentrekking der menschelijke spieren de frequentie der actiestroomen niet toeneemt, een feit dat ook DUSSER DE BARENNE in daarop gerichte proefnemingen aan zijn eigen brachioradialis kon vaststellen. Tegen dit gegeven kan men echter aanvoeren, dat zooal het voor de willekeurige samentrekking der menschelijke spieren moge gelden, dit nog geenszins bewijst, dat het ook geldig zou zijn voor het middenrif van de kat en het konijn. Maar er zijn bovendien directe proefondervindelijke gegevens, die de bovenvermelde verklaring van het door ons vastgestelde feit doen verwerpen.

Wanneer men n.l. de inademing verdiept en versterkt door het proefdier een koolzuur-rijke lucht te laten inademen of door de trachea van het dier gedurende eenige oogenblikken dicht te drukken, dan blijkt, dat de daardoor veroorzaakte versterking der inademing, wat de electrische verschijnselen van het middenrif betreft, slechts zijn uitdrukking vindt in een vergrooting der amplitude van de actiestroomen, *niet* echter in een vermeerdering der frequentie. In meerdere proeven werd dit telkens weer vastgesteld; slechts in één geval vonden wij ook tijdens het inademen van een CO_2-rijke atmosfeer een vergrooting van het aantal der actiestroomen, van dezelfde orde als na dubbelzijdige uitschakeling der vagi. Of hiervoor het feit aansprakelijk te stellen is, dat bij dit proefdier reeds een plaatselijke aethernarcose der vagi was voorafgegaan en daardoor die zenuwen functioneel beschadigd waren, willen wij in het midden laten. Bij onze overige proefdieren, waar de verdieping der inademing door CO^2 steeds voorafging aan den anderen ingreep, de uitschakeling der beide vagi, hebben wij nooit een vermeerdering der actiestroomen kunnen waarnemen. Op grond dezer proefondervindelijke gegevens meenen wij de bovenvermelde verklaring te kunnen verwerpen.

Slechts één tegenwerping moet nog onder de oogen gezien worden. Door de uitschakeling der vagi treedt nl. ook op een versnelling van den hartslag. Bij onze manier van afleiding der actiestroomen van het middenrif nu, krijgt men meestal, ook ondanks het onderschuiven van het celluloidplaatje, tenminste bij de kat, tusschen de

eigenlijke actiestroomen van het middenrif, kleine electrocardiogrammen in de curven, die bij deze afleiding bijkans steeds zich voordoen als eenvoudige diphasische actiestroomen, derhalve zeer veel gelijken op de actiestroomen van het middenrif en daarvan veelal met zekerheid niet te onderscheiden zijn. Als men dus, zooals wij steeds gedaan hebben, alle toppen in de curven over een afstand, overeenkomende met 0.5 secunde telt, telt men daarbij steeds ook een paar van dergelijke electrocardiogrammen mee. De tegenwerping zou nu gemaakt kunnen worden, dat, na de vagotomie door de daardoor veroorzaakte versnelling van den hartslag, ook het aantal electrocardiogrammen in de curven zal zijn vermeerderd en dat deze vermeerdering voor de verhooging der frequentie der actiestroomen in onze curven geheel aansprakelijk te stellen zou zijn.

Een eenvoudige berekening doet echter deze tegenwerping te niet. Laten wij aannemen, dat de frequentie van den hartslag bij de kat (dezelfde redeneering geldt met eenigszins andere cijfers ook voor het konijn) vóór de vagusuitschakeling, onder de omstandigheden van de proef, bijv. 180 per minuut bedraagt[1]), dan zullen in het over 0.5 sec. getelde stuk der curve meestal $0.5 \times \frac{180}{60} = 1.5$ en hoogstens 2 electrocardiogrammen voorkomen. Stellen wij nu verder dat na de dubbelzijdige vagotomie de hartslag van 180 op bijv. 240 of zelfs op 360 per minuut zou komen, een frequentievermeerdering van 100°/₀, die wel zelden, zoo ooit aanwezig is, dan zouden in dat geval in de curve van 0.5 sec. $0.5 \times \frac{360}{60} = 3$ electrocardiogrammen voorkomen, waardoor een schijnbare vermeerdering der frequentie der actiestroomen van het middenrif zou zijn veroorzaakt van meestal 1, hoogstens 1.5 per 0.5 sec., d.i. een schijnbare vermeerdering van 2 à 3 toppen per sec. Men ziet zelfs met deze voor ons gegeven zoo ongunstig mogelijk genomen getalsverhoudingen, kan deze ongetwijfeld aanwezige factor de gevonden verschillen niet verklaren.

Wij meenen derhalve voor het overige, verreweg het grootste deel, de vermeerdering der actiestroomen van het middenrif na uitschakeling der beide vagi te mogen beschouwen als *het gevolg van het uitvallen der prikkels, die normaliter langs de centripetale vagusvezels naar het centrale zenuwstelsel verloopen en klaarblijkelijk reflectorisch op de inademingsbewegingen, tenminste bij de kat en het konijn, een remmenden invloed uitoefenen.*

---

[1]) Door dit aan te nemen zijn wij aan den te hoogen kant; voor een lager getal wordt onze redeneering nog klemmender.

Dat prikkels, langs centripetale vagusvezels een belangrijken invloed op de ademhalingsbewegingen en in het bijzonder op de inademing hebben, is reeds lang bekend (HERING en BREUER); het hier medegedeelde proefondervindelijke gegeven is daarvan opnieuw een duidelijk, en zoover wij weten, tot dusver nog niet bekend bewijs.

September 1923. *Utrecht, Physiologisch Laboratorium der Universiteit.*

De Heer W. EINTHOVEN biedt voor de boekerij der Akademie ten geschenke aan een exemplaar van de dissertatie van den Heer C. L. DE JONGH: „*De tijdsverhoudingen tusschen electro- en mechanocardiogram*".

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 27 OCTOBER 1923.

DEEL XXXII.

N°. 8.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.

Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is eene uitnoodiging van de „Société française de Physique" te Parijs dd. 12 October j.l. aan de Akademie om zich te doen vertegenwoordigen bij de herdenking van het 50-jarig bestaan der „Société", ter gelegenheid waarvan eene nationale tentoonstelling van natuurkunde en draadlooze telegrafie zal gehouden worden van 30 November—17 December a.s.

Op verzoek van den Voorzitter verklaren de Heeren H. A. LORENTZ en P. ZEEMAN zich bereid die vertegenwoordiging op zich te nemen. Aan het Genootschap zal hiervan kennis gegeven worden.

Hierna draagt de Heer WENT, die eenige mededeelingen zal doen over zijn pas beeindigde reis naar Suriname, het praesidium over aan den Onder-Voorzitter, den Heer HOLLEMAN. Deze heet, namens de vergadering, den Heer WENT hartelijk welkom en wenscht hem geluk met zijn behouden terugkomst in het vaderland.

De Heer WENT, alsnu het woord verkrijgende, doet eenige korte mededeelingen over de reis naar Suriname, die hij dezen zomer ondernomen heeft, voor welke reis hij ook van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Akademie een ondersteuning ontving door een bijdrage uit het P. W. KORTHALS-fonds.

Hoofddoel van de reis was een studie van levende Podostemonaceae, dat zijn planten, die uitsluitend in watervallen leven en — met één uitzondering — alleen in de tropen. Tot op dit oogenblik werden een aantal vertegenwoordigers van deze plantenfamilie wel uitvoerig onderzocht, maar uitsluitend in geconserveerden vorm. Een onderzoek aan de levende planten werd tot nu toe slechts door WILLIS op Ceylon uitgevoerd; deze was toen ter tijde directeur van den Botanischen tuin te Peradeniya. Het werd daarom van groot belang geacht, ook in Zuid-Amerika, waar deze planten zoo overvloedig voorkomen, een onderzoek aan de levende objecten te verrichten en daarvoor was Suriname als aangewezen.

Spreker heeft vroeger onderzoekingen aan gefixeerd materiaal uitgevoerd, waarvan hij de resultaten in de Verhandelingen dezer Afdeeling het licht heeft doen zien; het is dus begrijpelijk, dat er tal van vragen waren, die hij gaarne aan levende Podostemonaceae wilde trachten te beantwoorden. Het zijn gewassen, die in tal van bizonderheden, welke vermoedelijk in verband staan met hun eigenaardige groeiplaats, zoo sterk afwijken van alle andere hoogere planten, dat elk onderzoek van belang te achten is.

Spreker heeft nu, vergezeld van zijn zoon, die hem als assistent ter zijde stond en van de heeren Prof. Dr. G. STAHEL en L. GONGGRIJP, die tegelijkertijd een onderzoek naar de samenstelling der bosschen instelden, 4 weken doorgebracht in een kamp aan de Raleighvallen van de Coppenamerivier, waar hij omgeven was door groeiplaatsen van de hier genoemde planten. Genoemd kamp was zoo mooi ingericht, dat spreker hier zelfs microscopisch werk heeft kunnen doen. Later heeft hij nog eens enkele waarnemingen kunnen verrichten aan de Diëti- en Loesoebanja-vallen van de Surinamerivier in de nabijheid van Kabelstation.

Het spreekt vanzelf, dat het resultaat van die onderzoekingen thans nog niet kan worden meegedeeld. Later zal daarover een publicatie het licht zien, wanneer ook het meegebrachte geconserveerde materiaal nader bewerkt is. Maar toch kan wel gezegd worden, dat de waarnemingen o. a. betrekking hadden op de assimilatie der bladeren, de ontwikkeling van bloemen en vruchten en daarmee samenhangend de bestuiving, de hoogst eigenaardige kliercellen en gangen, die men in het weefsel van deze planten aantreft, op den osmotischen druk der cellen, het afwerpen van parenchym door spruiten, die buiten het water komen te liggen, op de specifieke verschillendheid der waargenomen vormen, op de omzetting, die het collenchym der stengels ondergaat en op nog eenige andere punten meer.

Het spreekt van zelf, dat de aandacht van den botanicus in de wildernissen van Suriname nog op vele andere punten gericht was; zeer in het bizonder werd de mogelijkheid op prijs gesteld, om van uit het kamp aan de Raleighvallen een beklimming van den Voltzberg uit te voeren en zoo niet alleen een blik te krijgen op het binnenland met zijn uitgestrekte oerwouden, maar ook de eigenaardige epiphytenflora te leeren kennen, die op die overigens kale granietrots wordt aangetroffen.

In Paramaribo werd kennis gemaakt met de werking van het Landbouwproefstation en van den Cultuurtuin, waarbij het selectiewerk van Dr. STAHEL met cacao, koffie en sinaasappelen sprekers volle bewondering opwekte. Ter nadere bestudeering van de landbouwtoestanden werden een groot aantal plantages en vestigingsplaatsen van den kleinen landbouw bezocht. Daarbij bleek, dat in het algemeen de plantages er goed uitzien, dat de suiker veel belooft en dat koffie en cacao alleen daarom op het oogenblik in ongunstige omstandigheden verkeeren, omdat tengevolge van de wereldcrisis de prijzen van die producten zoo buitengewoon laag zijn.

Bizonder treffend was een vergelijking van den kleinen landbouw

nu met dien van 22 jaar geleden. Daar was groote vooruitgang te constateeren; toen moest b.v. alle rijst, die geconsumeerd werd, ingevoerd worden, nu vindt men allerwege lachende rijstvelden, zoodat invoer van rijst niet of nauwelijks meer noodig is.

Op de terugreis werd enkele dagen vertoefd in Demerara en op Trinidad, waar de wetenschappelijke instellingen in het belang van den landbouw bezichtigd werden en waar van de ambtenaren, aan de landbouwdepartementen verbonden, alle mogelijke hulp werd ondervonden. Eindelijk kon te Parijs inzage verkregen worden van de Podostemonaceae, die aldaar in het herbarium van het „Musée d'histoire naturelle" bewaard worden.

Wanneer spreker in korten tijd veel waarnemingen heeft kunnen doen, dan is dit een gevolg van de medewerking van velen, aan wie hij hier gaarne openlijk een woord van dank betuigt: aan den Gouverneur van Suriname en de chefs van de Departementen van Landbouw, Nijverheid en Handel en van Openbare Werken en Verkeer en aan alle ambtenaren, met wie hij in aanraking gekomen is, aan tal van planters en vele anderen, te veel om hun namen te kunnen noemen. Eén naam behoort echter in elk geval vermeld te worden; zonder de krachtige hulp en den steun van Dr. STAHEL zou deze reis onmogelijk geweest zijn; het is in het bizonder aan hem te danken, dat zooveel in zoo korten tijd bereikt kon worden. De stuwkracht, die van hem uitgaat bij alles, wat er op natuurwetenschappelijk gebied in Suriname geschiedt, heeft zich ook hier niet verloochend.

Hierna neemt de Heer WENT het praesidium weer over.

Vervolgens spreekt de Heer J. BOEKE, mede namens den Heer G. C. HERINGA: *„Over de verhouding van de zenuwelementen tot het bindweefsel"*.

Naar aanleiding van deze mededeeling vragen de Heeren BOLK, WINKLER, MAGNUS en VAN DER HOEVE inlichtingen, welke door den spreker worden gegeven.

Histologie. — J. Boeke en G. C. Heringa: „*Over de verhouding van de zenuwelementen tot het bindweefsel*".

In de laatste jaren breekt meer en meer de overtuiging baan, dat de oude celtheorie, die in de cellen zelfstandige en zelfstandig blijvende eenheden ziet, die als bouwsteenen het organisme opbouwen, doch ook daarin hunne zelfstandigheid blijven bewaren, ontoereikend is, om den bouw der levende weefsels te verklaren. Zoowel bij de regeneratie als bij de histogenetische ontwikkeling laat ons dit begrip van de zelfstandigheid der cellen in vele gevallen in den steek. Zoo schuift zich bij tal van weefselelementen tusschen de uit de klieving voortgekomen primaire embryonale cellen en de functioneerende definitieve eenheden een syncytiaal stadium in, waarin van celelementen geen sprake meer is, en niets geeft ons het recht, om, waar dan weder scherp omschreven functioneele eenheden uit dit syncytium ontstaan, deze eenheden voor dezelfde cellen te verklaren, die oorspronkelijk tot het syncytium tezamen vloeiden. Ja zelfs bij de geslachtscellen zien wij zulk een nauw verband tusschen de geslachtscellen zelve en de voedstercellen (follikelcellen, cellen van Sertoli, interstitieele cellen) ontstaan, dat ook hier de continuiteit der celelementen eenige moeilijkheden oplevert.

Het sterkst komt dit uit bij de zenuwelementen, waar niet alleen Held bij de primitieve neuroblasten een voorbijgaand syncytiaal stadium meende te moeten aannemen, doch waarbij aan de eene zijde verschillende elementen samenvloeien tot de vorming van de zenuwvezels, hun isolatie en bescherming, en waar aan de andere zijde in het eindgebied, hetzij sensibel, hetzij motorisch, een volkomen organisch verband tusschen zenuwuitloopers en eindgebiedcellen (tastcellen, spiervezelen) kan worden geconstateerd.

Zijn nu evenwel de elementen, waarmede de zenuwuitloopers bij de ontogenese tezamen vloeien tot het vormen van de periphere zenuwvezels alle van ectodermalen aard (Neal) of van ecto- en mesodermalen aard (Held)? Daar zoowel bij de ontwikkeling der gevoelseindorganen (Heringa) als bij de regeneratie der motorische zenuwen na doorsnijding (Boeke) een nauw verband tusschen de uitgroeiende zenuwvezelen en typische bindweefselcellen (mesoder-

male elementen) kon worden gedemonstreerd, daar rijst de vraag, of ook niet bij het volwassen weefsel een dergelijk verband tusschen bindweefselcellen en zenuwuitloopers kan worden aangetoond, zooals door een van ons reeds voor de normale zenuwvezels, die de neuromusculaire spoelen innerveeren, kon worden vastgesteld.

In het bindweefselstroma van de cornea meenden wij een weefsel te vinden, waarin dit verband, zoo het bestaat, moest kunnen worden aangetoond. Immers, dit stroma bestaat uit lagen van bindweefselfibrillen, die vooral bij het kikvorschoog uiterst regelmatig gerangschikt zijn, en tusschen deze dunne vliezige lagen van collagene fibrillen bevinden zich de eenige cellige elementen, die in dit gedeelte van het hoornvlies voorhanden zijn, de (bij den kikvorsch) orthoklone bindweefselcellen, die in elke laag een volkomen aaneengesloten geheel vormen (donkerveldbeeld, HERINGA), en welker met elkaar overal samenhangende uitloopers in verband met de regelmatige ligging der bindweefselfibrillen in de bindweefselplaten, waartusschen zij besloten liggen, een uiterst regelmatige rangschikking vertoonen. Hieraan ontleenen juist de orthoklone bindweefselcellen van de cornea van het kikkeroog hun naam.

Volgens de meeste onderzoekers vullen deze cellen de beschikbare ruimte tusschen de lagen van collagene fibrillen volkomen op.

De zenuwen, die van den omtrek van de cornea uit de sclera in het bindweefsel van de cornea binnendringen, vormen in de diepere lagen van het stroma een groven zenuwplexus, die op de knooppunten typische lemmoblastkernen vertoont. Deze zenuwplexus wordt fijner, naarmate men in de meer oppervlakkige lagen van het stroma komt, (subbasale plexus) en is sinds de onderzoekingen van COHNHEIM, KÖLLIKER, ENGELMANN en KÜHNE bekend.

Van uit dezen plexus, die vooral in de zoo regelmatig gebouwde cornea van den kikvorsch een zeer karakteristiek beeld vertoont, dringen rami perforantes, die ook afzonderlijk door het stroma van den corneaalrand kunnen verloopen, door de elastische grensmembraan van BOWMAN in het epitheel van de cornea binnen. Hier vormen de zenuwdraden een nieuwen plexus, den „subepithelialen plexus" (COHNHEIM), die vlak uitgebreid tusschen de membrana elastica en de onderste epitheliumcellen ligt. Uit dezen plexus verheffen zich ten slotte uiterst fijne zenuwdraadjes tusschen de epitheliumcellen, en reiken tot in de bovenste lagen van het epithelium. Van kernen of scheeden, die tot deze zenuwen zouden kunnen worden gerekend, is niets te zien.

Ook het fijnere gedeelte van den zenuwplexus in de meer oppervlakkige lagen van het bindweefselstroma vertoont geen spoor van

lemmoblastkernen meer; het is een netwerk van uiterst fijne zenuwdraadjes, die telkens tusschen de bindweefsellagen zijn uitgespreid, terwijl de tusschen deze lagen liggende gedeelten van den plexus door fijne draadjes, die door de lagen van collagene fibrillen heen loopen, met elkaar verbonden zijn.

Terwijl lange jaren geleden KÜHNE door de geheele cornea heen een samenhang van de zenuwdraden met de corneacellen („fixe Hornhautkörperchen") zag, een waarneming, die COHNHEIM in zijn eerste mededeelingen meende „in jeder Hinsicht bestätigen zu müssen", zijn, behoudens enkele uitzonderingen (KÖNIGSTEIN, WALDEYER, CIACCIO), alle verdere onderzoekers eenstemmig van oordeel, dat een dergelijk verband niet bestaat. Ook DOGIEL, die door middel van methyleenblauw de zenuwverdeeling in de cornea van het menschelijk oog onderzocht, vond nergens een zenuweindiging, die met een cornealichaampje in verbinding stond, en COHNHEIM herriep in een latere mededeeling zijn eerste boven aangehaalde opgave. In de desbetreffende afbeeldingen in het leerboek van SCHAFFER, die evenwel niet, zooals daar is opgegeven, den subepithelialen plexus, doch den *subbasalen* plexus te zien geeft) zijn dan ook steeds de zenuwdraadjes als een systeem van fijne, min of meer variceuse, vertakte en hier en daar anastomoseerende lijnen, onafhankelijk van het regelmatige systeem der onder elkaar samenhangende cornea-lichaampjes, zichtbaar.

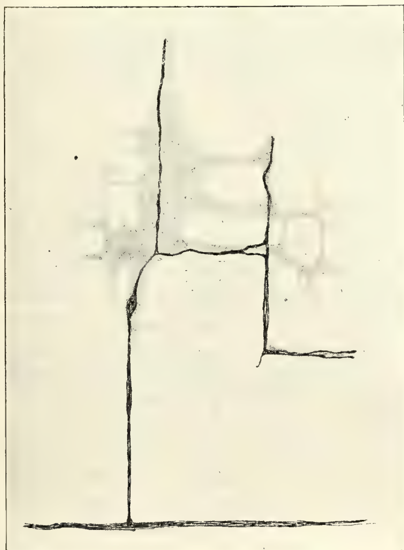


Fig. 1.

En toch schijnt ons deze laatste waarneming onjuist. Zeker, als men een volgens de methode van COHNHEIM of LÖWITT met goudchloride behandelde cornea van den kikvorsch met zwakke vergrooting beziet,

verkrijgt men volkomen het beeld van den bijv. door SCHAFFER afgebeelden subbasalen plexus, als een systeem van fijne zwarte lijnen, waarvan de vertakkingen dikwijls loodrecht op elkaar staan en blijkbaar door het verloop van de collagene bundels in hun richting worden beheerscht, en daartusschendoor grillig verloopende vezelgedeelten schijnbaar onafhankelijk van het systeem der cornealichaampjes. Heeft men echter een volkomen goed gelukt preparaat, waarin de zenuwdraden als scherp getrokken zwarte lijnen zich vertoonen en de bindweefselcellen zoo goed getingeerd zijn, dat ook de fijnste protoplasma-uitloopers door hun paarsroode tint en fijne korreling duidelijk als zoodanig te herkennen zijn, dan wordt het beeld anders, indien men het slechts met de sterkste vergrooting (apochrom. olie imm. 2 mM., comp. oculair) en belichting beschouwt. Dan blijkt er een innig verband te bestaan tusschen de zenuwdraden en de orthoklone bindweefselcellen. Zoowel daar, waar de zenuwdraden als een systeem van nagenoeg strak getrokken lijnen met loodrecht op elkaar staande vertakkingen zich voordoen (fig. 1), als daar, waar het verloop der zenuwdraden min of meer grillig en gekronkeld is (fig. 2 en 3), ziet men de fijne zwarte lijnen omgeven door het gekorrelde protoplasma van de bindweefselcellen, en blijken zij in volledig verband met de bindweefselcellen te staan. Meestal blijven zij daarbij verbonden met de uitloopers van de cellen, doch hier en daar verloopen zij ook dwars door het verdikte en verbreede cellichaam zelve, en juist daar is de samenhang met het protoplasma van de bindweefselcellen, het intraprotoplasmatisch verloop, duidelijk vast te stellen. Dank zij het regelmatig verloop van de orthoklone cellen en hun ligging vlak uitgespreid tusschen twee lamellen van bindweefselfibrillen kan men in een goudchloride-preparaat (vlaktebeeld) met zeer sterke vergrooting de dikte en uitbreiding

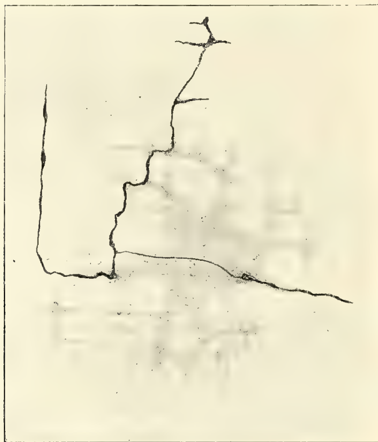


Fig. 2.

van het celprotoplasma nauwkeurig nagaan, en zoo was dan ook duidelijk zichtbaar, dat het protoplasma van de corneacel, waarin de fijne zenuwdraad van fig. 2 en 1 verliep, aan alle zijden dien draad omgaf, en liet het gekorrelde protoplasma zich onafgebroken vervolgen om de dunne zenuwdraadjes heen, daar waar zij in de uitloopers van de cel overgingen. De zenuwdraadjes verloopen intraprotoplasmatisch in de bindweefcellen, en in dit verband zouden wij willen herinneren aan de analoge beelden, die door een van ons (BOEKE, Studien zur Nervengeneration I, 1916) beschreven werden bij de dunne zenuwdraden, die de spierspoelen innerveeren, en die daar in de met vloeistof (lymphe?) gevulde kapselruimte der spierspoelen eveneens door het protoplasma van typische bindweefselcellen werden omgeven.

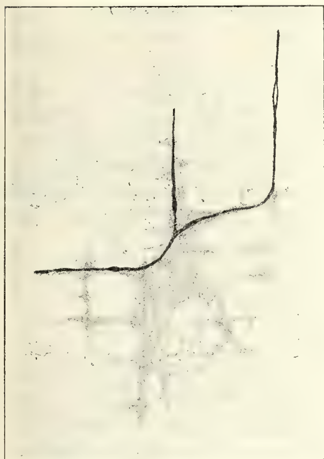


Fig. 3.

Dat dit werkelijk zoo is, dat de zenuwdraden werkelijk intraprotoplasmatisch verloopen, blijkt uit het onderzoek van dwarse doorsneden van de cornea. Zoo men slechts zorg draagt, dat de bindweefselfibrillen in de cellen niet schrompelen, zooals slechts door de gelatine-vriesmethode van HERINGA bereikt kan worden, dan blijken bij het onderzoek van dunne doorsneden de zwart getingeerde zenuwdraadjes ook hier in het protoplasma van de corneacellen te liggen (fig. 4), meestal in de uitloopers, en ook daar, waar een zenuwdraad van den plexus tusschen de bindweefselbundels door naar een meer oppervlakkig gelegen laag van bindweefselvezels verloopt, blijkt hij steeds omgeven te zijn door een uiterst dunne laag van korrelig protoplasma (fig. 4 z. v.). En ook hier zien wij dan weer hetzelfde verschijnsel, dat telkens bij de zenuwdraden kan worden vastgesteld, dat de neurofibrillenstreng omgeven is door een uiterst ijl, waterrijk protoplasma-omhulsel, dat den schijn geeft, alsof de zenuwdraad in een vacuole ligt (c.f. BOEKE, Studiën zur Nervenregeneration; HERINGA, Bau und Entwickelung des peripheren sensibelen Nervensystems). Het is mogelijk, dat

dit een voorwaarde is voor het physiologisch geleidingsvermogen voor de prikkels. Morphologisch kan hierdoor natuurlijk de schijn

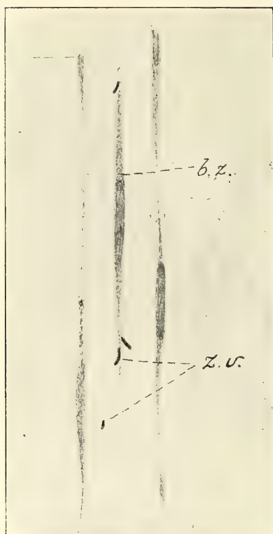


Fig. 4.

Dwarse doorsnede door het stroma van de cornea, BIELSCHOWSKY-kleuring, gelatine-vriescoupe:

bz = bindweefselcellen,
zv = zenuwvezels. Vergr. 2100.

van een onafhankelijk zijn der zenuwdraden van de bindweefselcellen en hunne uitloopers gewekt worden. Nauwkeurig onderzoek overtuigde ons evenwel telkens weer van het tegendeel.

Utrecht, Oct. 1923.

Scheikunde. — F. A. H. SCHREINEMAKERS: *„In-, mono- en plurivariante evenwichten"*. XXIV.

Komponenten en composanten.

Wij hebben in onze beschouwingen de samenstelling, de thermodynamische potentiaal, enz. van de verschillende phasen voorgesteld met behulp van de hoeveelheden der komponenten; wij kunnen ze echter ook op andere wijze voorstellen.

Wij nemen als voorbeeld een quaternair stelsel met de komponenten $X\ Y\ Z$ en U. Men kan de samenstelling van eene willekeurige phase F nu voorstellen door:

$$F = xX + yY + zZ + (1 - x - y - z)\, U \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin xX, yY enz. voorstellen x hoeveelheden X, y hoeveelheden Y, enz. In een coördinatenstelsel met de assen $x\ y\ z$ ligt de komponent U dus in den oorsprong der coördinaten; wij noemen U de fundamentaalkomponent.

Wij nemen nu in het beschouwde quaternaire stelsel vier willekeurige phasen $M\ N\ P$ en Q; wij kunnen de samenstelling van de phase F nu voorstellen door:

$$F = mM + nN + pP + (1 - m - n - p)\, Q \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daar bij elke samenstelling van F bepaalde waarden van $m\ n$ en p behooren, kan men de samenstelling van F dus ook beschouwen als eene functie van $m\ n$ en p.

Wij noemen de phasen M, N, P en Q waarin wij de samenstelling eener phase F uitdrukken, de *composanten* van het stelsel; wij zullen Q de *fundamentaal composant* noemen.

Stelt men de samenstelling van een phase F voor door (1), dus uitgedrukt in haar komponenten, dan is haar thermodynamische potentiaal, vrije energie, enz. eene functie van $x\ y$ en z; stelt men ze echter voor door (2), dus uitgedrukt in composanten, dan kan men haar thermodynamische potentiaal, vrije energie, enz. ook voorstellen als functies van $m\ n$ en p. Tusschen deze beide wijzen van voorstellingen bestaan natuurlijk betrekkingen, die wij verder zullen afleiden.

Wij beschouwen thans het evenwicht tusschen eene veranderlijke (b.v. vloeibare) phase L en eene constante (b.v. vaste) phase F.

Uitgedrukt in de komponenten zij de samenstelling van L: x, y, z en $1-x-y-z$, die van F: a, b, c en $1-a-b-c$.

Leidt men op de een of andere wijze de evenwichtsvoorwaarde voor dit stelsel $F+L$ af, dan vindt men:

$$\zeta-(x-a)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-(y-b)\frac{\partial\zeta}{\partial y}-(z-c)\frac{\partial\zeta}{dz}=\zeta_1 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin ζ de thermodynamische potentiaal van L en ζ_1 die van F voorstelt.

Wij drukken nu de samenstelling van L en F uit in de composanten M, N, P en Q. Zij de samenstelling van L: m, n, p en $1-m-n-p$, die van F: α, β, γ en $1-\alpha-\beta-\gamma$. Op overeenkomstige wijze, waarop men (3) kan afleiden, vindt men dan:

$$\zeta-(m-\alpha)\frac{\partial\zeta}{\partial m}-(n-\beta)\frac{\partial\zeta}{dn}-(p-\gamma)\frac{\partial\zeta}{\partial p}=\zeta_1 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nemen wij twee veranderlijke phasen L en L_1 (b.v. twee vloeistoffen of damp + vloeistof of mengkristallen + vloeistof, enz.) Wij drukken de samenstelling dezer phasen uit met behulp der komponenten nl. $x\ y\ z$ en $x_1\ y_1\ z_1$ en ook met behulp der composanten nl. $m\ n\ p$ en $m_1\ n_1\ p_1$. In het eerste geval vindt men als evenwichtsvoorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta-x\frac{\partial\zeta}{dx}-y\frac{\partial\zeta}{\partial y}-z\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\zeta_1-x_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1}-y_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial y_1}-z_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial\zeta_1}{dx_1}\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial y_1}\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1}\end{array}\right\}\quad . \ (5)$$

Uitgedrukt in de composanten vindt men:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta-m\frac{\partial\zeta}{\partial m}-n\frac{\partial\xi}{\partial n}-p\frac{\partial\zeta}{\partial p}=\zeta_1-m_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial m_1}-n_1\frac{\partial\zeta^1}{\partial n_1}-p_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_1}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial m}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial m_1}\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial n}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial n_1}\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial p}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_1}\end{array}\right\}\quad . \ (6)$$

In het algemeen kan men zeggen dat de evenwichtsvergelijkingen eenzelfden vorm hebben, onverschillig of ze in komponenten of in composanten worden uitgedrukt.

Wij zullen de betrekkingen tusschen komponenten en composanten thans nader beschouwen. Wij nemen daartoe weer de composanten $M\ N\ P$ en Q. Wij stellen, in komponenten uitgedrukt, de samenstelling

van M door $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ en $1-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1$
,, N ,, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$,, $1-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2$
,, P ,, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$,, $1-\alpha_3-\beta_3-\gamma_3$
,, Q ,, $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$,, $1-\alpha_4-\beta_4-\gamma_4$

voor. Om de samenstelling van eene phase

$$F = x\,X + y\,Y + z\,Z + (1 - x - y - z)\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

in de vier composanten uit te drukken, stellen wij:

$$F = m\,M + n\,N + p\,P + (1 - m - n - p)\,Q \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zoodat Q de fundamentaal composant is. Daar (7) en (8) dezelfde phase F voorstellen, volgt:

$$\left.\begin{array}{l} m(\alpha_1 - \alpha_4) + n(\alpha_2 - \alpha_4) + p(\alpha_3 - \alpha_4) = x - \alpha_4 \\ m(\beta_1 - \beta_4) + n(\beta_2 - \beta_4) + p(\beta_3 - \beta_4) = y - \beta_4 \\ m(\gamma_1 - \gamma_4) + n(\gamma_2 - \gamma_4) + p(\gamma_3 - \gamma_4) = z - \gamma_4 \end{array}\right\} \quad . \quad (9)$$

zoodat m n en p bepaald zijn.

Om echter uit (9) m n en p te kunnen oplossen mag de determinant, gevormd door de coefficienten van m n en p niet nul zijn. In het algemeen heeft men dus het volgende:

in een stelsel van n komponenten kan men n willekeurige phasen als composanten kiezen, mits hun determinant niet nul is.

Voor een ternair stelsel beteekent dit: men kan drie willekeurige phasen tot composanten kiezen, mits deze niet liggen op eene rechte lijn. In een quaternair stelsel kan men 4 willekeurige phasen als composanten nemen, mits deze niet liggen in een plat vlak.

Stelt men de samenstelling van eene phase F zooals in (8) met behulp van composanten voor, dan kan men de thermodynamische potentiaal ζ van deze phase ook beschouwen als eene functie van m n en p. Hieruit volgt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial m} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dm} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \, \frac{dy}{dm} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

en nog 2 dergelijke betrekkingen, die men krijgt door in (10) m te vervangen door n en p. Met behulp van (9) vindt men nu:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \zeta}{\partial m} = (\alpha_1 - \alpha_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} + (\beta_1 - \beta_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + (\gamma_1 - \gamma_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial n} = (\alpha_2 - \alpha_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + (\beta_2 - \beta_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + (\gamma_2 - \gamma_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \zeta}{dp} = (\alpha_3 - \alpha_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + (\beta_3 - \beta_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + (\gamma_3 - \gamma_4)\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Uit deze vergelijkingen volgt met behulp van (9) ook

$$m\frac{\partial \zeta}{\partial m} + n\frac{\partial \zeta}{\partial n} + p\frac{\partial \zeta}{\partial p} = (x - \alpha_4)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + (y - \beta_4)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + (z - \gamma_4)\frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad . \quad (12)$$

Wij hebben boven gezien dat voor een evenwicht $F + L$ zoowel vergelijking (3) als (4) geldt; wij kunnen dit ook aantoonen, door met behulp der bovenstaande betrekkingen vergelijking (3) in (4) om te zetten. Wij schrijven (3) in den vorm:

$$\zeta - x\frac{\partial\zeta}{\partial x} - y\frac{\partial\zeta}{\partial y} - z\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \zeta_1 - a\frac{\partial\zeta}{\partial x} - b\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

Met behulp van (12) kan men schrijven:

$$\zeta - m\frac{\partial\zeta}{\partial m} - n\frac{\partial\zeta}{\partial n} - p\frac{\partial\zeta}{\partial p} = \zeta_1 - (a-\alpha_4)\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (b-\beta_4)\frac{\partial\zeta}{\partial y} - (c-\gamma_4)\frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad . \ (13)$$

Nu stellen a b en c de samenstelling der phase in komponenten, α β en γ de samenstelling dezer zelfde phase in composanten voor. Volgens (9) gelden dus de betrekkingen:

$$\alpha(\alpha_1-\alpha_4) + \beta(\alpha_2-\alpha_4) + \gamma(\alpha_3-\alpha_4) = a - \alpha_4$$
$$\alpha(\beta_1-\beta_4) + \beta(\beta_2-\beta_4) + \gamma(\beta_3-\beta_4) = b - \beta_4$$
$$\alpha(\gamma_1-\gamma_4) + \beta(\gamma_2-\gamma_4) + \gamma(\gamma_3-\gamma_4) = c - \gamma_4$$

Telt men deze drie vergelijkingen samen, na de eerste met $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, de tweede met $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ en de derde met $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ te hebben vermenigvuldigd, dan vindt men met behulp van (11)

$$\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial m} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial n} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial p} = (a-\alpha_4)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + (b-\beta_4)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + (c-\gamma_4)\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

Met behulp hiervan gaat (13) nu over in:

$$\zeta - m\frac{\partial\zeta}{\partial m} - n\frac{\partial\zeta}{\partial n} - p\frac{\partial\zeta}{\partial p} = \zeta_1 - \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial m} - \beta\frac{\partial\zeta}{\partial n} - \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial p}$$

welke met (4) overeenstemt.

Wij kunnen ook de vier vergelijkingen (5) overvoeren in (6). Voor de eerste der vergelijkingen (5) kan men nl. schrijven:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - (x-\alpha_4)\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (y-\beta_4)\frac{\partial\zeta}{\partial y} - (x-\gamma_4)\frac{\partial\zeta}{\partial z} \\ &= \zeta_1 - (x_1-\alpha_4)\frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1} - (y_1-\beta_4)\frac{\partial\zeta_1}{\partial y_1} - (z_1-\gamma_4)\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (14)$$

Met behulp van (12) gaat (14) over in de eerste van de vergelijkingen (6).

Behalve de drie vergelijkingen (11), die gelden voor de phase zonder index, heeft men ook nog drie overeenkomstige vergelijkingen, die men uit (11) verkrijgt door aan alle veranderlijken en ook aan ζ den index 1 te geven. Wij noemen deze 3 vergelijkingen 11^a.

Daar echter volgens (5) $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1}$ enz. is, volgt uit (11) en (11^a) ook $\frac{\partial \zeta}{\partial m} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial m_1}$ enz.

Voor een ternair stelsel met de composanten F_1 F_2 en F_0 heeft men, als men F_0 tot fundamentaal component kiest:

$$F = m F_1 + n F_2 + (1 - m - n) F_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Stelt men de samenstellingen der composanten door α en β voor met den correspondeerenden index, dan gaan de vergelijkingen (9) over in:

$$\left.\begin{array}{l} m(\alpha_1 - \alpha_0) + n(\alpha_2 - \alpha_0) = x - \alpha_0 \\ m(\beta_1 - \beta_0) + n(\beta_2 - \beta_0) = y - \beta_0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wij zullen deze vergelijkingen thans ook op eene andere wijze afleiden, waardoor tevens de beteekenis van m en n in de grafische voorstelling duidelijk wordt.

Wij nemen een coördinatenstelsel met de assen OX en OY (Fig. 1), waarin wij de samenstellingen der phasen voorstellen, uitgedrukt in

Fig. 1.

de komponenten. Wij denken ons de drie composanten F_0 F_1 en F_2 en de willekeurige phase F voorgesteld door de punten F_0 F_1 F_2 en F. In de figuur is dus $F_0v = \alpha_0$, $F_0u = \beta_0$, enz. Wij nemen nu F_0F_1 tot nieuwe X-as en F_0F_2 tot nieuwe Y-as; de nieuwe coördinaten van het punt F zijn dan Fq en Fr; wij stellen $Fq = x'$ en $Fr = y'$. Noemt men de hoeken, die de nieuwe assen F_0F_1 en

F_0F_2 met de oorspronkelijke X-as maken, φ_1 en φ_2 dan volgt uit de figuur:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_0 + x' \cos \varphi_1 + y' \cos \varphi_2 \\ y = \beta_0 + x' \sin \varphi_1 + y' \sin \varphi_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Stelt men de lengte van F_0F_1 en F_0F_2 door l_1 en l_2 voor, dan kan men voor (17) schrijven:

$$\left.\begin{array}{l} x - \alpha_0 = \dfrac{x'(\alpha_1 - \alpha_0)}{l_1} + \dfrac{y'(\alpha_2 - \alpha_0)}{l_2} \\[2ex] y - \beta_0 = \dfrac{x'(\beta_1 - \beta_0)}{l_1} + \dfrac{y'(\beta_2 - \beta_0)}{l_2} \end{array}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Wij zullen nu de samenstelling der phase F uitdrukken in die der drie composanten F_0 F_1 en F_2. Men vindt:

$$\text{hoev. } F_2 : \text{hoev. } (F_0 + F_1) = Fs : FF_2$$
$$\text{of hoev. } F_2 : \text{hoev. } (F_0 + F_1 + F_2) = Fs : F_2s$$

Stelt men de totale hoeveelheid van $F = F_0 + F_1 + F_2$ gelijk 1 en bedenkt men dat:

$$Fs : F_2s = Fr : F_2F_0 = y' : l_2$$

dan volgt: hoev. $F_2 = \dfrac{y'}{l_2}$.

Op overeenkomstige wijze vindt men: hoev. $F_1 = \dfrac{x'}{l_1}$.

Om de eenheid van hoeveelheid der phase F te vormen zijn dus noodig $\dfrac{x'}{l_1}$ hoev. F_1 en $\dfrac{y'}{l_2}$ hoev. F_2 en dus ook $1 - \dfrac{x'}{l_1} - \dfrac{y'}{l_2}$ hoev. F_0. Wij kunnen dus schrijven:

$$F = \frac{x'}{l_1} F_1 + \frac{y'}{l_2} F_2 + \left(1 - \frac{x'}{l_1} - \frac{y'}{l_2}\right) F_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Stelt men $\dfrac{x'}{l_1} = m$ en $\dfrac{y'}{l_2} = n$ dan gaan (18) en (19) over in (15) en (16).

Hieruit blijkt o.a. dat m en n niet de coördinaten x' en y' van de phase F voorstellen, maar wel er mede in verband staan; zijn m en n bekend, dan zijn het ook x' en y' en omgekeerd. Wij kunnen daarom m en n toch ook coördinaten noemen. De coördinaten van de composant

F_0 zijn $x' = 0$ $y' = 0$ dus $m = 0$ en $n = 0$
F_1 „ $x' = l_1$ $y' = 0$ „ $m = 1$ „ $n = 0$
F_2 „ $x' = 0$ $y' = l_2$ „ $m = 0$ „ $n = 1$

Dit is natuurlijk ook in overeenstemming met (15); stelt men hierin b.v. $m=1$ en $n=0$ dan stelt phase F de composant F_1 voor.

Drukt men de samenstelling eener phase uit in haar komponenten, dus in x en y, dan zijn x en y positief en is $x+y \leqq 1$. Drukt men haar samenstelling echter uit in composanten, dan kunnen m en n ook negatief zijn en ook $m+n>1$. Dit laatste is b.v. het geval voor eene phase voorgesteld door het punt P. In (15) zijn m en n dan positief en $1-m-n$ is negatief.

Heeft men een quaternair stelsel, dan bestaan er tusschen de coördinaten overeenkomstige betrekkingen nl.

$$x' = m\, l_1 \qquad y' = n\, l_2 \qquad z' = p\, l_3$$

Wij hebben tot nog toe aangenomen dat elk der n composanten van een stelsel van n komponenten ook deze n komponenten bevat. Het is echter duidelijk dat men de composanten ook zóó kan kiezen, dat één of meer of zelfs alle minder dan n komponenten bevatten. Natuurlijk moeten de n composanten samen de n komponenten bevatten. Men kan de voorstelling met behulp van komponenten beschouwen als een bijzonder geval van de voorstelling met behulp van composanten; elk der composanten bevat dan slechts een enkele komponent. Wij zullen dit echter eene voorstelling met behulp van komponenten blijven noemen. Is echter tenminste één composant, die meer dan een komponent bevat, dan zullen wij van eene voorstelling met behulp van composanten spreken.

Zooals bekend worden de afgeleide functies van de thermodynamische potentiaal oneindig groot als de hoeveelheden van een of meer der komponenten tot nul naderen. Zoo wordt in een quaternair stelsel b.v. $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ oneindig groot, als x of $1-x-y-z$ tot nul nadert; $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ als y of $1-x-y-z$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ als z of $1-x-y-z$ tot nul nadert.

Bij het gebruik van composanten is dit echter anders. Uit (11) volgt nl. dat $\frac{\partial \zeta}{\partial m}, \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial p}$ slechts oneindig groot worden, als een of meer der functies $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ oneindig groot zijn en dit kan, zooals wij boven zagen, alleen als aan één of meer der voorwaarden:

$$x=0 \qquad y=0 \qquad z=0 \qquad 1-x-y-z=0 \quad . \quad (20)$$

is voldaan. In het algemeen worden $\frac{\partial \zeta}{\partial m}, \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ of $\frac{\partial \zeta}{\partial p}$ dus oneindig

54

groot, als men aan m, n en p zulke waarden geeft, dat aan één of meer der voorwaarden (20) wordt voldaan. Het is duidelijk dat dit slechts toevallig kan zijn voor $m=0$ of $n=0$ of $p=0$ of $1-m-n-p=0$.

Tevens blijkt nog het volgende. Geeft men m, n en p zulke waarden, dat b.v. $x=0$ wordt, dan wordt in (11) $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ oneindig groot, zoodat $\frac{\partial \zeta}{\partial m}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial p}$ tegelijkertijd oneindig groot worden. Heeft men de composanten echter zóó gekozen, dat $\alpha_1=\alpha_4$ dan worden alleen $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial p}$ oneindig groot, terwijl $\frac{\partial \zeta}{\partial m}$ eindig blijft.

Heeft eene vloeistof de samenstelling

$$L = xX + yY + zZ + \dots$$

waarin X, Y enz. komponenten voorstellen, dan vordert de stabiliteit, dat voor alle waarden van dx, dy enz.:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \dots\right)^{(2)} > 0 \quad \dots \dots \quad (21)$$

Denkt men zich nl. L gesplitst volgens:

$$L = \varkappa L_1 + (1-\varkappa) L_2$$

waarin:

$$L_1 = (x + dx_1) X + (y + dy_1) Y + \dots$$
$$L_2 = (x + dx_2) X + (y + dy_2) Y + \dots$$

dan moet

$$\zeta < \varkappa \zeta_1 + (1-\varkappa) \zeta_2$$

waaruit (21) volgt. Drukt men de samenstelling van L nu uit in composanten, nl.:

$$L = m M + n N + p P + \dots$$

dan volgt op dezelfde wijze dat

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial m} dm + \frac{\partial \zeta}{dn} dn + \dots\right)^{(2)} > 0$$

moet zijn voor alle waarden van dm, dn, enz.

(*Wordt vervolgd*)

Leiden. Anorg. Chem. Laboratorium.

Meteorologie. — S. W. Visser: *„Een niet rakende infralaterale boog"*.

(Aangeboden door de Heeren E. van Everdingen en J. P. van der Stok).

Den 24en Juni 1923 zag ik op de Sterrewacht te Lembang een fraaien halo, waarvan ik in het volgende een beschrijving zal geven.

Reeds in den vroegen morgen was rechts van de zon een bijzon zichtbaar. Directe metingen van den afstand waren onmogelijk, omdat de zon zelve achter zware wolken schuil ging. Omstreeks twaalf uur verscheen een bijzonder heldere benedenraakboog, die na eenige minuten zoo fel van licht werd, dat hij nu en dan door de lage bewolking heen zichtbaar bleef. Weldra breidde deze boog zich uit en vormde een volledigen omgeschreven halo, waarbinnen een zwakke gewone kring mede zichtbaar werd. Ik slaagde er in tusschen 12u 17m en 12u 49m een 26tal metingen op beide kringen te verrichten met behulp van den op de sterrewacht speciaal voor halowaarnemingen opgestelden wolken-theodoliet. Op deze metingen kom ik straks terug. Ondertusschen speurde ik scherp naar andere halo's. Eerst na 12u 49m werd mijn moeite beloond door de verschijning van een lichte vlek links beneden de zon, in de buurt, waar de groote kring zou moeten staan. Deze vlek werd weldra lichter en ontwikkelde zich tot een kort, schuingesteld boogje. Kleuren (rood en groen) konden worden gezien. Aan den anderen kant van de zon was niets te zien, omdat hier de cumulusbewolking rondom den Tangkoeban Prahoe het uitzicht op de cirruslaag benam. Ik vestigde nu mijn volle aandacht op dezen boog en verkreeg tot 1u 4m twaalf metingen. Enkele malen beletten wolken de waarneming. Bovendien werden tusschen 12u 16m en 1u 2m veertien contrôlemetingen op de zon verricht. Te 1u 4m was de lage bewolking zoo toegenomen, dat de metingen gestaakt moesten worden. 's Avonds te half acht bleek de Ci-St nog steeds aanwezig te zijn; er stond een heldere kring om de maan, evenwel zonder bijzonderheden.

Dezelfde halo's werden door de Heeren Voûte en Rijken Rapp gezien op hun treinreis tusschen Tjimahi en Bandoeng. Zij zagen evenwel het boogje niet links (westelijk) van de zon, maar rechts (oostelijk). Hoewel de lucht aan de linkerzijde een even egaal cirrusdek vertoonde als rechts, was daar niets te zien. Volgens Rijken

Rapp was het boogje sterk gekleurd en gebogen als een deel van den grooten kring. Kromming heb ik te Lembang niet kunnen opmerken.

Aan een bespreking van mijn metingen laat ik een kort overzicht van de theorie van den infralateralen boog voorafgaan.

Bravais verklaart dezen boog door de breking van het licht in ijskristallen met horizontale hoofdas, waarbij het licht door een vertikaal basisvlak (het 6-zijdige sluitvlak van het kristal) intreedt en door een prismavlak uittreedt. De brekende hoek is hierbij 90°. Bij een bepaalden stand van de hoofdas (bepaald b.v. door haar azimuth) behoort een cirkelvormige boog loodrecht op deze as en op een afstand van de zon, die afhangt van de zonshoogte. Men krijgt op eenvoudige wijze een voorstelling van dezen cirkel door het geval van den circumzenithalen boog te teekenen en de teekening vervolgens 90° te draaien, zoodat de eerst vertikale as nu horizontaal komt te liggen. Bij ieder azimuth van de as behoort een dergelijke cirkelboog. De omhullende van al deze kleine cirkels is de infralaterale boog. Onder deze cirkels is er één, die raakt aan den grooten kring. Overigens voldoet deze boog evenmin als de circumzenithale boog aan de voorwaarden voor minimale deviatie van de gebroken lichtstralen.

Pernter (Meteorologische Optik, 1e Druk) houdt aan deze voorwaarden vast. Hij beschouwt den boog als een „boog van Lowitz aan den grooten kring" en leidt den vorm en de plaats van deze zijdelingsche bogen aan den kleinen en aan den grooten kring op onderling geheel analoge wijze af. Zonder ons in de berekeningen te verdiepen, kunnen wij vaststellen, dat de boog volgens Pernter zich tengevolge van den gestelden eisch van minimum van deviatie over het algemeen op kleineren afstand van den kring bevindt dan de boog volgens Bravais.

Besson (Sur la Théorie des Halos, Paris 1909, p. 51, p. 70) heeft aangetoond, dat de theorie van Pernter weinig bevredigt. Exner, (Pernter-Exner, Meteorologische Optik, zweite Auflage 1922 pag. 405) geeft dit toe en ontwikkelt een nieuwe theorie. Bij den normalen val van een ijs-zuiltje liggen de hoofdas en een van de grootste diagonalen van den zeshoek horizontaal. Er kan dan een infralaterale boog gevormd worden door licht, dat op het basisvlak invalt en uit een der schuingerichte prismavlakken uittreedt. Het vlak loodrecht op de brekende ribbe maakt een hoek van 30° met den horizon. Bij één bepaalde zonshoogte (27° 45′) raakt de zijdelingsche boog den kring. Voor alle andere zonshoogten wijkt de boog naar buiten af. Laat men wentelingen om de hoofdas toe, dan kunnen

bij zonshoogten tot 81° 50′ toe minimum-afwijkingen voorkomen. Volgens EXNER (o. a. pag. 409) ontbreken metingen. Er bestaat er evenwel één van BESSON (l.c. pag. 71). Op 23 April 1908 zag hij bij een zonshoogte van 53° een infralateralen boog links beneden de zon op een hoogte van 19°, terwijl volgens de theorie van BRAVAIS vereischt wordt een hoogte van 18° 57′.

Dit geval vertoont eenige overeenkomst met dat van Lembang: „Drie minuten later" schrijft BESSON, „vertoonden zich de kring van 22° en de omgeschreven halo, volledig maar nauwelijks zichtbaar". Bij beide waarnemingen waren dezelfde halovormen aanwezig [1]).

Bij de metingen te Lembang werd als regel ingesteld op het rood van den boog. Eenmaal werd het groen opgemeten. Tweemaal werden de linker- en rechter-uiteinden van het rood bepaald.

De waarnemingen en enkele hieruit berekende afstanden en hoeken zijn in de volgende tabel opgenomen.

Nr.	M. J. T.	⊙ az.	⊙ h′	Az_w	h_w	Δ_w	A_w	h_b	Δ_b	A_b	h_{w-b}	Δ_{w-b}	A_{w-b}
1	12u 50m	N 17.2 W	58.2	N 60.1 W	22.8	46° 44′							
2	"	"	"	58.3	22.4	46 17	58° 19′	20.6	45.7	48.0	+1.9°	+0.9	10.1°
3	12 51	17.6	"	60.3	22.4	47 0							
4	"	"	"	58.9	22.5	46 17							
5	12 52	18.0	58.1	60.4	22.9	46 23	56 10	20.5	45.5	48.4	+1.4	+0.9	7.8
6	"	"	"	56.4	20.9	46 24							
7	12 54	18.8	57.9	58.2	21.5	46 10	54 57	20.5	45.3	48.8	+1.0	+0.9	6.2
8	12 55	19.3	57.8	56.4	20.3	46 11	54 10	20.5	45.2	49.1	+0.5	+1.0	5.1
9	12 56	19.7	57.7	60.3	21.8	46 19							
10	12 57	20.1	57.6	60.2	20.3	47 22	55 13	19.4	46.2	50.5	+0.4	+1.2	4.8
11	12 58	20.5	57.5	59.6	21.1	46 10	54 39	20.4	45.3	49.6	+0.7	+0.9	5.1
12	1 4	23.0	57.1	59.5	20.0	45 46	51 17	20.3	45.2	50.3	—0.3	+0.6	1.0

De waarnemingen 5 en 9 hebben betrekking op het linkeruiteinde, 6 en 8 op het rechteruiteinde, 10 op het groen. De tijd is Midden-Java-Tijd. Zonshoogte en -azimuth werden uit berekening verkregen en hiermede de aflezingen van den theodoliet herleid. Az_w en h_w stellen waargenomen azimuth en hoogte van den boog voor; Δ_w is

[1]) Zie inmiddels ook: E. VAN EVERDINGEN. Halo's in April, Hemel en Dampkring 21, 1923, p. 216, 217.

de uit de 4 voorafgaande kolommen berekende afstand van de waargenomen punten tot de zon; A_w is de uit de waarnemingen afgeleide hoek tusschen de zonnevertikaal en de verbindingslijn van den boog met de zon.

Uit de kolom Δ_w blijkt, dat de opgemeten punten merkbaar van den kring afwijken. Het rood toch van den kring vormt zich op 45°6′ van de zon. Gemiddeld bedraagt de afwijking 1.1°. De afstand wordt langzamerhand kleiner, maar is voor Nr. 12 toch nog 0.6° grooter dan die van den kring. Deze afwijking is zoo groot en bovendien zoo systematisch, dat aan waarnemingsfouten niet gedacht kan worden. Inderdaad is hier sprake van een *niet rakenden* boog. Overeenkomstig de theorie van Bravais werd de plaats van het raakpunt van den boog berekend. De uitkomsten zijn opgenomen in de kolommen h_b, Δ_b en A_b. De berekeningen werden voor de 10e waarneming voor groen ($n = 1.3115$) doorgevoerd, overigens voor rood ($n = 1.307$). Bij de bepaling van de afwijkingen tusschen waarneming en theorie werden de eerste vier punten, die tengevolge van de aanvankelijke lichtzwakte van den boog minder nauwkeurig zijn uitgevallen dan de andere, gemiddeld. De waarnemingen 5 en 6, 8 en 9, die op de uiteinden van den boog betrekking hebben, werden door hun gemiddelden vervangen.

De waargenomen punten liggen vrijwel alle te hoog (kolom h_{w-b} geeft het verschil tusschen waarneming en berekening), maar naderen tot de theoretisch berekende hoogte. De hoek A, die theoretisch voor dalende zon moet toenemen, neemt in werkelijkheid sterk af. Het gevolg is een van 10° tot 1° afnemend verschil tusschen waarneming en theorie. De afstand ten slotte tot de zon blijft vrijwel constant 0.9° te groot. Neiging tot afneming ontbreekt bijna geheel.

De boog blijft gedurende den geheelen waarnemingsduur buiten den boog van Bravais; de richting ten opzichte van de zon nadert meer en meer tot die van het theoretische raakpunt.

Deze boog wijkt van dien van Bravais af en dus des te sterker van dien van Pernter. Ook voldoet hij niet aan de theorie van Exner. In dit geval toch moeten wij een normaal vlak aannemen onder een helling van 30°. In ons geval hellen de zonnestralen ten opzichte van dit vlak nog weer onder een hoek van minstens 57.1°—30° = 27.1°. De kleinste afstand van boog tot zon bedraagt dan 57.6° en komt dus bij den waargenomen boog in het geheel niet in aanmerking.

Zooals boven uiteengezet is, werken kristallen, waarvan de hoofd-

assen in het horizontale vlak verschillend georiënteerd zijn, mede tot de vorming van den infralateralen boog.

Daarom heb ik berekend, welke de stand in de ruimte moet zijn van de as om het verschijnsel op te wekken, zooals het gezien werd. Ik heb aangenomen, dat de breking plaats had in het normaal vlak; hierbij toch wordt de deviatie zoo klein mogelijk en tevens de lichtsterkte een maximum.

Beschouwen we nu den boldriehoek ZSN, gevormd door het zenith Z, de zon S en het vluchtpunt van de kristalas N. Bekend zijn ZS, het complement van de zonshoogte; $\angle S$, het supplement van den reeds bepaalden $\angle A$, en boog SN. Deze laatste is de invalshoek i der lichtstralen en wordt uit den waargenomen Δ afgeleid. Men kan nu boog ZN en $\angle Z$ berekenen. ZN geeft de hoogte van het vluchtpunt, $\angle Z$ is het azimuthsverschil met de zon. Hieruit volgt het azimuth van de as, omdat het azimuth van de zon bekend is.

De resultaten zijn de volgende:

Nr	i	ZN	Z	az.as
1—4	74.6°	92.4°	55.2°	N 72.7°W
5—6	74.2	93.0	53.2	71.2
7	73.5	93.0	51.8	70.6
8—9	73.2	93.7	51.3	70.8
10	74.4	93.6	52.4	72.5
11	73.5	93.4	51.6	72.1
12	72.2	93.9	48.1	72.1

Hieruit volgt, dat de kristalas gemiddeld 3.3° helt op den horizon en dat het azimuth N 71.8 W bedraagt.

Er komt een standvastige ligging van de as voor den dag. De verschillen met de gemiddelden zijn als regel kleiner dan 1°. Deze conclusie is vooral merkwaardig voor het azimuth, omdat het azimuthsverschil met de zon in den loop der waarnemingen meer dan 7° afneemt.

Bij een poging, om van een dergelijken stand een verklaring te zoeken in verband met den invloed van zwaartekracht, wind [1]) en luchtelectriciteit op den stand der ijskristallen, stuitte ik o.a. op het

[1]) M. PINKHOF. Bijdrage tot de theorie der halo-verschijnselen. Verhandelingen Kon. Akademie van Wetenschappen 1e Sectie, Dl. **13**, N°. 1, pag. 21, 1919.

bezwaar, dat de volledige ontwikkeling van den omgeschreven halo in strijd scheen met de opgestelde verklaring. Ik hoop daarom later op dit punt terug te komen. Bij elke verklaring kunnen echter de waarnemingen op den kring en zijn omhullende noodig zijn. Daarom volgen zij tot slot van mijn beschouwingen. (Zie onderstaande tabellen).

BRB = beneden raakboog; O.H = omhullende halo; K = kring van 22°; l = links: r = rechts.

De overige letters hebben dezelfde beteekenis als in de andere tabellen. Het gemiddelde van de 6 waarnemingen op het rood van den kring is 21° 54′, slechts 2′ grooter dan het uit de topmetingen bepaalde.

De berekende Δ_b geldt voor wit licht, de waargenomen Δ_w voor rood.

Afgezien van de sterk uiteenloopende verschillen voor de eerste 4 waarnemingen, is het gemiddelde verschil tusschen waarneming en berekening bij den omgeschreven halo —0.3°, dat is juist het afstandsverschil van rood en wit. Deze waarnemingen komen dus met het berekende rood overeen. In de 15 metingen op den gewonen kring verricht, blijft daarentegen een zeer duidelijk verschil +0.3° over.

A. Metingen op den boven- en den ondertop (rood).

M. J. T.	⊙ h	hoogte van den top		Δ	
		onder	boven	onder	boven
12u 18m	59.7°	37.5°	—	22.2°	—
21	59.6	—	81.3°	—	21.7°
22	59.6	—	81.7	—	22.1
24	59.5	38.0	—	21.5	—
31	59 4	—	81.1	—	21.7
32	59.3	37.7	—	21.6	—
35	59.2	37.1	—	22.1	—
36	59.1	—	80.9	—	21.8
48	58.4	36 3	—	22.1	—
			Gemiddeld	21.9	21.8

Gemiddelde van alle metingen 21° 52′. voor rood volgens Pernter 21°34′

B. Metingen op den kring en den omgeschreven halo.

Nr.	Tijd	⊙ h	⊙ az	h_w	az_w		Δ_w	A_w	Δ_b	Δ_{w-b}
1	12u 17m	59.7°	N2.8° W	38.1°	N 0° 0 W	BRB r	22°37′	5°49′	21.9°	+0.7°
2	17	59.7	2.8	38.1	7.6	„ l	22 48	9 55	22.0	+0.8
3	19	59.7	3 5	39 3	—11.7	„ r	22 32	31 58	22.8	—0 3
4	20	59.7	4.2	39.3	17.2	„ l	21 59	27 42	23.0	—1.0
5	26	59.5	7.0	58.5	55.0	O.H l	24 11	108 34	24.4	—0.2
6	27	59.5	7.4	58.5	50.6	K l	21 53	106 20	—	—
7	29	59.4	8.3	59.4	56.0	O.H l	24 11	110 40	24.4	—0.2
8	29	59.4	8.3	59.4	52.3	K l	21 58	109 1	—	—
9	37	59.0	11.8	59.0	60.0	O.H l	24 15	110 47	24.5	—0.2
10	38	59.0	12.2	59.0	—36.7	O H r	24 35	111 5	24.5	+0.1
11	41	58.9	13.5	58.9	56.8	K l	21 58	108 45	—	—
12	43	58.8	14.3	58.8	—28.8	K r	21 54	108 22	—	—
13	43	58.8	14.3	58.8	—33.0	O.H r	23 58	110 23	24.5	—0.5
14	46	58.5	15.6	43.7	—16.4	O.H r	24 34	69 11	25 0	—0.4
15	47	58.5	16.0	51.6	—20.8	K r	21 52	87 15	—	—
16	47	58.5	16.0	50.9	—25.7	O.H r	24 31	90 0	25.1	—0.6
17	49	58.3	16.8	41.1	44.8	K r	21 46	72 32	—	—

Weltevreden, Juli 1923.

Natuurkunde. — A. MICHELS: „*Invloed der rotatie op de gevoeligheid en nauwkeurigheid van een drukbalans*". (Twaalfde mededeeling van resultaten verkregen bij onderzoekingen gesteund door het v. D. WAALS-Fonds).

(Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en W. H. JULIUS).

Voor de nauwkeurige meting van groote drukken zijn thans algemeen methoden in toepassing, gebaseerd op het gebruik van den z.g. Amagat-cilinder. Bij al deze methoden wordt de kracht nagegaan, welke een onder druk staande vloeistof uitoefent op een zuiger van bekenden diameter. De uitwerking van dit grondidee heeft het aanzien gegeven aan verschillende drukbalans-typen als die van WAGNER, STÜCKRADT, SCHÄFFER und BUDENBERG en HOLBORN [1]).

Ten einde een zoo groot mogelijke nauwkeurigheid te bereiken is men verplicht de wrijvingskrachten tusschen zuiger en gatwand tot een minimum te beperken. Goede resultaten verkreeg WIEBE reeds in dit opzicht door kloppen met een hamer tegen den wand van zijn toestel. In den lateren tijd werd vrij algemeen een draaien van den zuiger toegepast, hoewel HOLBORN [2]) een heen en weer gaande beweging de voorkeur geeft.

Over de motieven, waarom deze bewerkingen zulk een invloed hebben, is nog slechts weinig bekend. KLEIN (l.c.) tracht wel een oplossing te geven van de werking der rotatie, doch slaagt hierin niet.

Het was nu de bedoeling van ons onderzoek een oplossing te vinden, benevens de omstandigheden op te sporen, waaronder het grootste effect bereikt wordt.

Waar de plaatsruimte een uitvoerige behandeling van onze resultaten niet toestaat, zullen we hieronder volstaan met een korte mededeeling, terwijl voor uitvoerige besprekingen verwezen wordt naar „Annalen der Physik" Bd. 72, 1923, pag. 285—320.

Theoretisch werd aansluiting gezocht bij de nieuwere theorie der rondom gesmeerde lagers [3]). Wanneer toch de zuiger rond draait in een cilindrisch gat, terwijl van onder steeds vloeistof wordt aangevoerd, moet er zeker een analogie bestaan tusschen de wrijvings-

[1]) Voor de verschillende typen verwijs ik naar KLEIN. G. Untersuchung und Kritik von Hochdruckmesser Diss. Berlin 1909.

[2]) Ann. d. Physik 1915, pag. 1087.

[3]) SOMMERFELD. Zeitschr. für Math. und Physik 1904, GÜMBEL. Das problem der Lagerreibung Jahresb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1917.

invloeden, welke onze zuiger ondervindt en die welke op een gewone as, rustende in een lagerblok, worden uitgeoefend.

Zeker bestaan er ook verschilpunten, welke vooral daar in te zoeken zijn, dat in ons geval de z.g. lagerdruk ontbreekt wegens het verticaal staan van den zuiger. Omwerking van de theorie leerde nu, dat bij voldoende omtreksnelheid zich overal tusschen zuiger- en gatwand een vloeistoflaag zal instellen. Het toerental waarbij dit geschiedt noemen we het kritische toerental ω_k. Het is afhankelijk van de viscositeit van de gekozen vloeistof. Boven dit toerental zou dan, bij gebrek aan eenig metaalcontact, ook de axiale wrijving een vloeistofwrijving zijn.

Ten einde de geldigheid van deze theorie na te gaan, werd de ter beschikking staande drukbalans van het v. d. WAALS-Fonds gewijzigd, zoodat zij een mechanisch regelbare aandrijving verkreeg. Deze verandering geschiedde door den aan het laboratorium verbonden instrumentmaker, den Heer J. WASSENAAR.

Karakteristiek voor een vloeistofwrijving is hare evenredigheid met de snelheid. Wordt nu den zuiger een bepaald aanvangstoerental Ω gegeven en daarna de aandrijving uitgeschakeld, dan zal de beweging vertraagd worden en de in den tijd t afgelegde hoek α zal een waarde verkrijgen

$$\alpha = \frac{\Omega}{A}\left(1 - e^{-At}\right)$$

waarin A een constante is. Zoodra echter het toerental onder de kritische waarde daalt, treedt metaalcontact op en verandert het beeld van de beweging.

Over het geheele meetbereik van de drukbalans werd op deze manier het verloop nagegaan en overeenstemming tusschen experiment en theorie geconstateerd. Het kritische toerental bleek hierbij, zooals te verwachten was, wel afhankelijk van de temperatuur, daar deze de viscositeit beïnvloedt, doch onafhankelijk van de belasting.

Nog duidelijker wijst een electrische bepaling de geldigheid der veronderstellingen aan. Werd toch de electrische weerstand tusschen as en wand gemeten, dan bleek deze boven een bepaald toerental omstreeks 700 Ohm, om bij daling der snelheid vrij plotseling op 0.2 Ohm terug te vallen. Onder deze waarden is de weerstand der leidingdraden inbegrepen.

Conclusie: Voor een gunstig gebruik van de drukbalans moet men steeds boven het kritische toerental werken. Dit toerental is voor iedere vloeistof en temperatuur experimenteel vast te leggen.

Natuurkunde. — J. A. SCHOUTEN: „*Over een niet-symmetrische affine veldtheorie.*"

(Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en P. ZEEMAN).

1. *Inleiding.* In zijn jongste publicaties[1]) heeft EINSTEIN getracht een theorie der gravitatie op te bouwen, waarbij uitsluitend een symmetrische lineaire overbrenging (affine Uebertragung) en een variatiebeginsel ten grondslag gelegd worden. Daarbij wordt in de eindvergelijkingen het electromagnetische veld uitsluitend afhankelijk van de rotatie van den stroomvektor, zoodat de moeilijkheid optreedt, dat een electromagnetisch veld niet zou kunnen bestaan op een plaats, waar de stroomdichtheid nul is.

In het volgende wordt aangetoond, dat deze moeilijkheid verdwijnt, indien men van de iets algemeenere onderstelling uitgaat, dat de ten grondslag gelegde overbrenging niet symmetrisch behoeft te zijn.

De vergelijkingen van een dergelijke overbrenging luiden:

$$\nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\, v_\nu$$

$$\nabla_\mu w_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} w_\nu \;,$$

waarin de parameters, die wij ter onderscheiding met $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ aanduiden, niet symmetrisch zijn in $\lambda\mu$.

EINSTEIN heeft ten gunste van symmetrische parameters aangevoerd,[2]) dat bij niet-symmetrische parameters niet slechts

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\, w_\nu$$

doch ook

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\mu\lambda}\, w_\nu$$

als differentiaalquotient (Erweiterung) van een kovarianten vektor w_λ

[1]) Berliner Sitzungsberichte 1923 blz. 32—38, 76—77, 137—140.

[2]) T. a. p. blz. 33.

in aanmerking zou kunnen komen en dus het eenduidige karakter van dit quotient verloren zou gaan. Men moet echter opmerken, dat bij gebruik van de tweede uitdrukking de overschuiving $v^\lambda w_\lambda$ van twee vektoren v^ν en w_λ niet meer invariant zou zijn bij pseudoparallele verschuiving, zoodat toch steeds het volgens de eerste formule gevormde quotient een wel onderscheidbare bevoorrechte positie inneemt.

Wij zullen nu niet het algemeenste geval beschouwen, dat zich kan voordoen, doch het *halfsymmetrische* geval, waarbij het alterneerende deel der parameters den vorm heeft:

$$^1/_2(\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\mu\lambda}) = {}^1/_2(S_\lambda A^\nu_\mu - S_\mu A^\nu_\lambda) \quad ; \quad A^\nu_\lambda = \begin{cases} 1, \nu = \lambda \\ 0, \nu \neq \lambda, \end{cases}$$

waarin S_λ een niet aan eenige voorwaarde gebonden kovariante vektor is[1]). Het zal blijken, dat het met deze vereenvoudigende onderstelling toch nog mogelijk is de bovengenoemde moeilijkheid uit den weg te ruimen.

Bij het onderzoek is geen enkele onderstelling gemaakt ten aanzien van den *specialen vorm* der wereldfunctie $\mathfrak{H}$, zoodat de resultaten algemeene geldigheid hebben.

2. *Afleiding der veldvergelijkingen.*

De parameters $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ eener halfsymmetrische overbrenging laten zich steeds op de volgende wijze splitsen in een symmetrisch en een alterneerend bestanddeel:

(1) $$\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} = \Lambda^{\nu}_{\lambda\mu} + S_{[\lambda} A^\nu_{\mu]} \quad ; \quad \Lambda^\nu_{\lambda\mu} = \Lambda^\nu_{\mu\lambda}\ ^2).$$

Is nu $R'^{\dots\nu}_{\omega\lambda\mu}$ de bij $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ behoorende kromtegrootheid:

(2) $$R'^{\dots\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\omega} - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\omega}\Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\mu}\Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\omega},$$

$\overset{*}{R}{}^{\dots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ de kromtegrootheid, die op dezelfde wijze uit de parameters $\Lambda^\nu_{\lambda\mu}$ gevormd is, $R'_{\mu\lambda}$ de uit $R'^{\dots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ door sommeeren over $\omega\nu$ verkregen grootheid:

---

[1]) Dat de verschillen $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\mu\lambda}$ in elk geval de kentallen zijn van een grootheid van den derden graad moge als bekend verondersteld worden. Vgl. de verhandeling van den schrijver in Math. Zeitschrift 13 (1922), blz. 56—81, Nachtrag 15 (1922) blz. 168.

[2]) Met $v_{[\lambda} w_{\mu]}$ wordt in het volgende steeds bedoeld $^1/_2(v_\lambda w_\mu - v_\mu w_\lambda)$.

$$(3) \qquad R'_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma'^{\alpha}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \Gamma'^{\alpha}_{\lambda\mu} - \Gamma'^{\alpha}_{\varkappa\alpha} \Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\alpha}_{\varkappa\mu} \Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\alpha}$$

en $R^{*}_{\mu\lambda}$ de grootheid, die op dezelfde wijze ontstaat uit $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, dan leidt men gemakkelijk de betrekking af

$$(4) \; R'_{\mu\lambda} = R^{*}_{\mu\lambda} - {}^1/_2\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\lambda}\right) + {}^1/_2(n-1)\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \overset{*}{A}{}^{\nu}_{\lambda\mu} S_\nu\right) - {}^1/_4(n-1) S_\lambda S_\mu =$$

$$= R^{*}_{\mu\lambda} - \overset{*}{\nabla}_{[\mu} S_{\lambda]} + {}^1/_2 (n-1) \overset{*}{\nabla}_{\mu} S_\lambda - {}^1/_4 (n-1) S_\lambda S_\mu,$$

waarin ∇^* de bij $\overset{*}{A}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$ behoorende kovariante differentiaaloperator is. We onderstellen, dat de determinant $R' = |R'_{\lambda\mu}|$ niet verdwijnt, en dat er dus een inverse grootheid $r'^{\lambda\mu}$ bestaat:

$$(5) \qquad R' r'^{\mu\nu} = \frac{\partial R'}{\partial R'_{\lambda\mu}} \quad ; \quad r'^{\nu\mu} R'_{\mu\lambda} = r'^{\mu\nu} R'_{\lambda\mu} = A^{\nu}_{\lambda} \,.$$

Zijn $F'_{\mu\lambda}$ en $G'_{\mu\lambda}$ het alterneerende en het symmetrische deel van $R'_{\mu\lambda}$:

$$(6) \qquad F'_{\mu\lambda} = R'_{[\mu\lambda]} \quad ; \quad G'_{\mu\lambda} = R'_{(\mu\lambda)} \text{ }^{1})$$

en is de wereldfunctie $\mathfrak{H} = H\sqrt{-R}$ (skalaire dichtheid) een vooralsnog onbekende functie van $G'_{\mu\lambda}$ en $F'_{\mu\lambda}$, dan luidt de variatievergelijking:

$$(7) \qquad \overline{d}\int \mathfrak{H}\, d\tau = \int \mathfrak{v}'^{\lambda\mu} \overline{d} R'_{\mu\lambda}\, d\tau = 0 \text{ }^{2}) \,,$$

waarin

$$(8a) \qquad \mathfrak{v}'^{\lambda\mu} = v'^{\lambda\mu} \sqrt{-R'} = (g'^{\lambda\mu} + f'^{\lambda\mu}) \sqrt{-R'}$$

$$(8b) \qquad g'^{\lambda\mu} \sqrt{-R'} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial G'_{\mu\lambda}} \quad ; \quad f'^{\lambda\mu} \sqrt{-R'} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F'_{\mu\lambda}}.$$

Wordt in (7) de waarde uit (4) gesubstitueerd, dan ontstaat voor $n = 4$:

$$(9) \; 0 = \int \mathfrak{v}'^{\lambda\mu}\, d\tau \left\{ \overline{d} R^{*}_{\mu\lambda} - {}^1/_2 \overline{d}\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\lambda}\right) + 2\overline{d}\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} S\right) - {}^3/_4 \overline{d}(S_\lambda S_\mu) \right\},$$

welke vergelijking zich, daar $R^{*}_{\mu\lambda}$ niet van S_λ afhangt, laat omzetten in de twee vergelijkingen

---

[1]) Met $v_{(\lambda} w_{\mu)}$ wordt in het volgende steeds bedoeld $^1/_2 (v_\lambda w_\mu + v_\mu w_\lambda)$.

[2]) Als variatiesymbool is hier het teeken $\overline{d}$ in plaats van δ gebruikt om verwarring met het teeken δ van den kovarianten differentiaal te voorkomen.

$$(10)\qquad d\,\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\mu}\{-\Lambda^{\mu}_{\alpha}(\overset{*}{\nabla}_{\beta}\,v'^{\lambda\beta}-P_{\beta}v'^{\lambda\beta})+\nabla_{\alpha}v'^{\lambda\mu}-P_{\alpha}v'^{\lambda\mu}-{}^{3}/_{2}\,S_{\alpha}v'^{\lambda\mu}\}=0$$

$$(11)\quad d\,S_{\lambda}\{\overset{*}{\nabla}_{\mu}f'^{\lambda\mu}-P_{\mu}f'^{\lambda\mu}-{}^{3}/_{2}(\overset{*}{\nabla}_{\mu}\,v'^{\lambda\mu}-P_{\mu}\,v'^{\lambda\mu})-{}^{3}/_{2}\,S_{\mu}\,g'^{\lambda\mu}\}=0\,,$$

waarin P_{λ} een vector is, die op de volgende wijze van $R'_{\mu\lambda}$ en $r'^{\lambda\mu}$ afhangt:

$$(12)\qquad P_{\mu}={}^{1}/_{2}\,R'_{\lambda\nu}\overset{*}{\nabla}_{\mu}\,r'^{\nu\lambda}=-\frac{\partial\,log\,\sqrt{-R'}}{\partial x^{\mu}}+\Lambda^{\alpha}_{\alpha\mu}.$$

De symmetrie van $\Lambda^{\nu}_{\lambda\mu}$ in aanmerking nemende, volgt uit (10):

$$(I)\qquad \boxed{\begin{aligned}-\Lambda^{(\mu}_{\alpha}\overset{*}{\nabla}_{\beta}\,g'^{\lambda)\beta}+\Lambda^{(\mu}_{\alpha}P_{\beta}\,g'^{\lambda)\beta}-\Lambda^{(\mu}_{\alpha}\overset{*}{\nabla}_{\beta}f'^{\lambda)\beta}+\Lambda^{(\mu}_{\alpha}P_{\beta}f'^{\lambda)\beta}+\\+\overset{*}{\nabla}_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}-P_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}-{}^{3}/_{2}\,S_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}=0\end{aligned}}$$

en uit (11):

$$(II)\qquad \boxed{\overset{*}{\nabla}_{\mu}f'^{\lambda\mu}-P_{\mu}f'^{\lambda\mu}-{}^{3}/_{2}(\overset{*}{\nabla}_{\mu}\,r'^{\lambda\mu}-P_{\mu}\,r'^{\lambda\mu})-{}^{3}/_{2}\,S_{\mu}\,g'^{\lambda\mu}=0.}$$

Voor $\overset{*}{\nabla}_{\mu}f'^{\lambda\mu}-P_{\mu}f'^{\lambda\mu}$ voeren we het teeken i'^{λ} in. Men toont gemakkelijk aan, dat

$$(13)\qquad i'^{\lambda}=\overset{*}{\nabla}_{\mu}f'^{\lambda\mu}-P_{\mu}f'^{\lambda\mu}=\frac{1}{\sqrt{-R'}}\,\frac{\partial\,f'^{\lambda\mu}\sqrt{-R'}}{\partial\,x^{\mu}}.$$

Uit (I) volgt bij sommeeren over $\alpha\,\mu$:

$$(14)\qquad \overset{*}{\nabla}_{\mu}\,g'^{\lambda\mu}-P_{\mu}\,g'^{\lambda\mu}=-\quad i'^{\lambda}-S_{\mu}\,g'^{\lambda\mu}.$$

Wordt deze waarde in (I) gesubstitueerd, dan volgt:

$$(15)\quad \overset{*}{\nabla}_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}-P_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}=-{}^{2}/_{3}\,\Lambda^{(\mu}_{\alpha}\,i'^{\lambda)}-\Lambda^{(\mu}_{\alpha}g'^{\lambda)\beta}S_{\beta}+{}^{3}/_{2}\,S_{\alpha}\,g'^{\lambda\mu}.$$

In de onderstelling, dat ook de determinant $|g'^{\lambda\mu}|$ niet verdwijnt, kan deze vergelijking nu belangrijk vereenvoudigd worden door de invoering van den tensor

$$(16)\qquad g^{\lambda\mu}=\frac{\sqrt{-R'}}{\sqrt{-g}}\,g'^{\lambda\mu}\quad;\quad g=|\,g^{\lambda\mu}\,|^{-1}$$

als *fundamentaaltensor* en den vector

$$(17) \qquad i_\nu = \frac{\sqrt{-R'}}{\sqrt{-g}}\, i'^{\nu} \; .$$

Daar toch

$$(18) \qquad P_\mu - {}^1/_2\, g_{\lambda\nu} \nabla^*_\mu g^{\lambda\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \log \frac{\sqrt{-R'}}{\sqrt{-g}},$$

gaat (15) over in:

$$(19) \quad \nabla^*_\alpha g^{\lambda\mu} - {}^1/_2\, g^{\lambda\mu} g_{\beta\gamma} \nabla_\alpha g^{\beta\gamma} = -{}^2/_3\, A^{(\mu}_\alpha i^{\lambda)} - A^{(\mu}_\alpha S^{\lambda)} + {}^2/_3\, S_\alpha g^{\lambda\mu}.$$

Overschuift men deze vergelijking met $g_{\lambda\mu}$, dan volgt

$$(20) \qquad - g_{\beta\gamma} \nabla_\alpha g^{\beta\gamma} = -{}^2/_3\, i_\alpha + 5\, S_\alpha,$$

zoodat tenslotte resulteert:

$$(21) \qquad \nabla^*_\alpha g^{\lambda\mu} = -{}^2/_3\, A^{(\mu}_\alpha i^{\lambda)} + {}^1/_3\, i_\alpha g^{\lambda\mu} - A^{(\mu}_\alpha S^{\lambda)} - S_\alpha g^{\lambda\mu}$$

en

$$(III) \qquad \boxed{\nabla'_\alpha g^{\lambda\mu} = -{}^2/_3\, A^{(\mu}_\alpha i^{\lambda)} + {}^1/_3\, i_\alpha g^{\lambda\mu} - 2\, S_\alpha g^{\lambda\mu},}$$

waarin ∇' de bij $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ behoorende kovariante differentiaaloperator is.

Uit (21) leidt men af:

$$(22) \quad A^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} - {}^1/_2\, g_{\lambda\mu} i^\nu + {}^1/_6\, A^\nu_\lambda i_\mu + {}^1/_6\, A^\nu_\mu i_\lambda - {}^1/_2\, A^\nu_\lambda S_\mu - {}^1/_2\, A^\nu_\mu S_\mu.$$

zoodat, in verband met (1):

$$(23) \qquad \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} - {}^1/_2\, g_{\lambda\mu} i^\nu + {}^1/_6\, A^\nu_\lambda i_\mu + {}^1/_6\, A^\nu_\mu i_\lambda - A^\nu_\lambda S_\mu.$$

Wordt (22) gesubstitueerd in (3), dan ontstaat:

$$(24) \qquad R^*_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} + {}^1/_6\, (\nabla^*_\mu i_\lambda - \nabla^*_\lambda i_\mu) + {}^1/_6\, i_\mu i_\lambda - {}^1/_2 (\nabla^*_\mu S_\lambda - \nabla^*_\lambda S_\mu) -$$
$$- {}^3/_2\, \nabla_\mu S_\lambda + {}^9/_4\, S_\mu S_\lambda,$$

waarin $K_{\lambda\mu}$ de over $\omega\nu$ gesommeerde kromtegrootheid $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ is, die bij den fundamentaaltensor $g_{\lambda\mu}$ behoort. Bij substitutie van (24) in (4) ontstaan de veldvergelijkingen:

$$(IV)\qquad \begin{aligned} R'_{\mu\lambda} &= K_{\mu\lambda} + {}^1/_6\,(\nabla^*_\mu\, i_\lambda - \nabla^*_\lambda\, i_\mu) + {}^1/_6\, i_\mu\, i_\lambda - (\nabla^*_\mu S_\lambda - \nabla^*_\lambda S_\mu) \\ &= K_{\mu\lambda} + {}^1/_6\left(\frac{\partial i_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial i_\mu}{\partial x^\lambda}\right) + {}^1/_6\, i_\mu\, i_\lambda - \left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\lambda}\right) \end{aligned}$$

Uit (IV) volgt voor den bivektor $F'_{\mu\lambda}$ van het electromagnetische veld:

$$(25)\qquad F'_{\mu\lambda} = R'_{[\mu\lambda]} = {}^1/_6\left(\frac{\partial i_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial i_\mu}{\partial x^\lambda}\right) - \left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial S_\mu}{\partial x_\lambda}\right).$$

Wij keeren nu terug tot de tweede uit het variatiebeginsel voortgekomen vergelijking (II). In verband met (13), (14) en (17) voert deze vergelijking tot

$$(26)\qquad i^\nu = 0.$$

Daar i^ν het karakter van een stroomvektor heeft, mogen wij dus het *alterneerende* deel van $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ niet varieeren, wil de stroomvektor niet uit de formules verdwijnen. Over gebieden, waar alleen een elektromagnetisch veld is en geen stroom, blijft het variatiebeginsel onbeperkt geldig.

De verkregen uitdrukkingen (IV) en (25) verschillen met die van EINSTEIN alleen door het optreden van de termen met S_λ, er is dus een electromagnetisch veld mogelijk ook waar de stroomvektor i_ν verdwijnt, en de vector S_λ vervult daar de rol van potentiaalvektor. Verder kunnen de volgende belangrijke punten opgemerkt worden.

1. In de veldvergelijkingen (IV) draagt S_λ niet bij tot het *symmetrische* deel van $R'_{\mu\lambda}$.

2. Bij afwezigheid van stroom is de overbrenging blijkens (III) *konform*, daar de fundamentaaltensor bij een pseudoparallele verplaatsing over dx^ν verandert met $-2dx^\alpha\, S_\alpha g^{\lambda\mu}$.

3. Bij afwezigheid van stroom en potentiaal gaat (23) als bij EINSTEIN over in de gewone vergelijking van het gravitatieveld.

3. *De potentiaalvektor* S_λ.

Het is opmerkelijk, dat de potentiaalvektor S_λ hier als een vaste grootheid optreedt, en niet zooals men verwachten en wenschen zou als een vector, die slechts op een willekeurigen gradientvektor na bepaald is. Ook dit bezwaar kan worden opgeheven, zij het dan

ook ten koste van de overschuivingsinvariantie, wanneer men de onderstelling loslaat, dat de parameters der overbrenging voor ko- en kontravariante vektoren dezelfde moeten zijn [1]). Kovariante parameters laten zich toch, onafhankelijk van de transformatie der oervariabelen wijzigen door verandering van de *maat* [2]) der *kovariante* vektoren. Bij de maatverandering

$$(27) \qquad \tau\,'w_\lambda = w_\lambda$$

waar τ een willekeurige functie van de plaats is, blijven de parameters der kontravariante overbrenging onveranderd, terwijl de parameters der kovariante overbrenging, die wij met $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ blijven aanduiden zich als volgt transformeeren

$$(28) \qquad '\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{\partial\, lg\, \tau}{\partial x^{\mu}} A^{\nu}_{\lambda}\,.$$

Een dergelijke verandering van maat laat zich bij kontravariante vektoren niet even gemakkelijk doorvoeren, daar de nieuwe kentallen $\tau^{-1}\, dx^{\nu}$ in het algemeen geen exacte differentialen meer zouden zijn. Men zou er dan toe moeten komen de ruimte-tijd-wereld te beschouwen als een stelsel van niet exacte differentialen, en het zou niet meer mogelijk zijn de plaats van een punt door vier eindige koördinaten vast te leggen, een vooruitzicht, dat, zoolang er nog andere mogelijkheden zijn, voorloopig zeker nog weinig aanlokkends heeft.

Om den vektor S_ν in den bovenomschreven zin „los" te maken, is nu alleen noodig dat men de $\Gamma'^{\nu}_{\nu\mu}$ beschouwt als de parameters der *kovariante* overbrenging, terwijl men bovendien de $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, de parameters der kontravariante overbrenging, als volgt definieert:

$$(29) \quad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} + S_\mu A^{\nu}_{\lambda} = \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} - {}^1/_2\, g_{\lambda\mu} i^{\nu} + {}^1/_6\, A^{\nu}_{\lambda}\, i_\mu + {}^1/_6\, A^{\nu}_{\mu}\, i_\lambda,$$

Daarmede is dan bereikt, dat $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ onafhankelijk van S_λ is en dat S_λ zich bij verandering van de kovariante maat als volgt transformeert:

$$(30) \qquad 'S_\mu = S_\mu + \frac{\partial\, lg\, \tau}{\partial x_\mu}$$

Het is zeer opmerkelijk, dat $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ blijkens (23) een vorm heeft,

[1]) Deze overbrengingen zijn door den schrijver behandeld in de reeds aangehaalde verhandeling in Math. Zeitschrift.

[2]) Deze maatverandering heeft niets te maken met een „Maszbestimmung".

die juist leidt tot de gewenschte transformatie van den potentiaalvektor. Indien bijv. $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ een term met $S_\lambda A^{\nu}_{\mu}$ bevatte, ware het niet mogelijk van den vorm (30) te bereiken.

Wordt nu de door $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ en $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ bepaalde kovariante differentiaaloperator aangeduid met ∇, dan gaat (III) over in:

$$(III') \qquad \begin{aligned} \nabla_\alpha g^{\lambda\mu} &= -\,{}^2/_3\, A^{(\mu}_{\alpha}\, i^{\lambda)} + {}^1/_3\, i_\alpha\, g^{\lambda\mu} \\ \nabla_\alpha g_{\lambda\mu} &= -\,{}^1/_3\, g_{\alpha\mu}\, i_\lambda - {}^1/_3\, g_{\alpha\mu}\, i_\mu + {}^1/_3\, i_\alpha\, g_{\gamma\mu} - 2\, S_\alpha\, g_{\lambda\mu}\,. \end{aligned}$$

De tensor $g_{\lambda\mu}$ is een bij verandering van de kovariante maat veranderlijke grootheid, want zijn kentallen veranderen *niet*, terwijl de kentallen van een vaste grootheid van den tweeden graad een faktor τ^{-2} krijgen. Is de stroom nul, dan gedraagt zich deze grootheid dus volkomen op dezelfde wijze als de bewegelijke fundamentaaltensor der Weylsche theorie, en $-2\,S_\alpha$ vervult geheel de rol van den vektor, die bij Weyl met φ_α wordt aangeduid.

4. *Iets over de impuls-energievergelijking.*

De impuls-energievergelijking volgt in de gravitatietheorie uit de bekende identiteit van Bianchi. De vorm dezer identiteit voor nietsymmetrische en niet-overschuivingsinvariante overbrengingen is bekend [1]). Het moet dus mogelijk zijn, uitgaande van deze identiteit, een vergelijking af te leiden, die als een analogon der impuls-energievergelijking kan worden beschouwd. Deze mogelijkheid bestaat reeds vóór dat eenige onderstelling ten aanzien van den specialen vorm der Hamiltonsche functie is gemaakt.

[1]) Math. Zeitschrift 1923, 17, blz. 111—115; Weitzenböck Invariantentheorie blz. 357.

Palaeo-botanie. — O. POSTHUMUS: „*Etapteris Bertrandi Scott, een nieuwe Etapteris van het Boven-Carboon van Engeland* (*Lower Coal-Measures*), *en zijne beteekenis voor de stelair-morphologie.*"

(**Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en J. C. SCHOUTE**).

Resten van deze plant zijn aangetroffen in een „coal-ball" van Shore (Lancashire), waarvan slijpplaatjes zijn vervaardigd door J. LOMAX; van de serie bevinden zich 3 stuks in de Palaeobotanische collectie van het Mineralogisch-Geologisch Instituut der Rijksuniversiteit te Groningen (N°. 140, 141, 142), 6 andere zijn in de collectie van Dr. SCOTT in het Britsch Museum (Natuurlijke Historie) te Londen (N°. 2835—2840). Door Dr. SCOTT is deze soort in zijn getypten catalogus aangegeven als Etapteris Bertrandi n.sp., met de opmerking dat deze afwijkt van de andere soorten van het geslacht door de diepere sinus in het xyleem van den vaatbundel der rhachis.

De exemplaren van de Groninger collectie, hoewel minder in aantal, vertoonen eenige structuren die niet aanwezig zijn in de exemplaren van Londen en die ons een inzicht geven in de plaats van dezen vorm ten opzichte van verwante soorten. Het volgende is in hoofdzaak aan de Groninger exemplaren ontleend.

De volgorde der coupes is Praep. 140—141—142; de plaats der exemplaren van Londen ten opzichte van deze kan ik niet aangeven; de uiterste coupes der serie zijn evenwel te Groningen. Het zijn alle dwarse doorsneden van de rhachis, die 2 bij 3 mM. dik is[1]).

De epidermis ontbreekt; of zich eronder assimileerend weefsel met intercellulairen heeft bevonden is niet te zeggen, maar lijkt naar analogie der andere vormen niet waarschijnlijk. De volgende cellagen bestaan uit sclerenchym: dikwandige elementen met nauw lumen, zonder intercellulairen.

Naar binnen neemt gaandeweg de dikte der celwanden af, terwijl het lumen wijder wordt. Het binnenste der schors is slechts op enkele plaatsen aan de uiteinden van den centraal gelegen vaatbundel bewaard gebleven en blijkt te bestaan uit dunwandig

[1]) De overige maten zijn af te leiden uit de foto's, die 45-maal vergroot zijn.

parenchym zonder intercellulairen. Als idioblasten komen iets grootere, met zwarten inhoud gevulde cellen voor, terwijl in de holte, ontstaan door het te niet gaan van dit weefsel, zwarte pigmentstukken, uit deze cellen afkomstig, verspreid liggen.

Met het xyleem van den vaatbundel is het omliggende weefsel op vele plaatsen bewaard gebleven; dit blijkt te bestaan uit dunwandige elementen met nauw lumen, zonder intercellulairen, en meestal moeilijk te onderscheiden; bij den vaatbundel, ontstaan uit de versmelting van de bundels van de pinnae even voor zijn versmelting met den bundel der rhachis, is het overeenkomstig weefsel duidelijker op sommige plaatsen; de binnenste elementen blijken daar iets wijder te zijn dan de buitenste; dit weefsel zal ongetwijfeld het phloeem zijn. Naar buiten wordt het omsloten door een dubbele rij van tangentiaal gerekte cellen: de endodermis.

Het xyleem van den vaatbundel der rhachis en der pinnae levert de meest karakteristieke kenmerken op. De structuur staat in nauw verband met de symmetrie der rhachis en hare aanhangselen.

De pinnae staan in paren, die alterneeren; hun stand ten opzichte van de rhachis is als van een blad aan een rechtopstaanden stengel; de bovenzijde is naar den stengel gekeerd, het geheel is tweezijdig symmetrisch ten opzichte van een vlak, gaande door de as van de rhachis en tusschen de beide pinnae van een paar. Daar de pinnae alterneeren, is de structuur aan de eene zijde van den vaatbundel der rhachis gelijk aan die van de andere zijde op een iets lager of hooger niveau; door vergelijking der overeenkomstige niveau's blijkt dat de paren pinnae niet geheel en al alterneerden, maar elkaar iets waren genaderd, zooals ook bij de lagere pinnae der recente Varens meestal het geval is.

In coupe 142 zijn aan de eene zijde de vaatbundeltjes der pinnae (pinna-bundels) duidelijk zichtbaar, waar ze zich in de schors bevinden, halverwege tusschen den bundel der rhachis en de oppervlakte. Ze zijn rond en door een endodermis van het omringende sclerotische schorsweefsel afgescheiden. Het xyleem is door nauwlumig, dunwandig weefsel omgeven. Het xyleem zelve is ongeveer rond, met de nauwere elementen (protoxyleem) aan de binnenzijde, de buitenste rij tracheiden was blijkbaar nog niet geheel verhout.

Naar beneden vervolgd, vereenigen deze beide pinna-bundels zich en vormen een in de tangentiale richting gerekten niervormigen bundel, aan de binnenzijde voorzien van twee protoxyleemstrengen (de pinnabar). Deze bundel is in alle coupes in verschillende stadia zichtbaar. Naar beneden wordt hij iets vlakker, nadert den bundel der rhachis, terwijl de endodermis erbij aansluit. De vaatbundel der rhachis is

tweezijdig symmetrisch ten opzichte van het symmetrievlak der pinnabar. Het xyleem vertoont in een dwarse doorsnede den H-vorm, zoo karakteristiek voor dit geslacht. Van een in het midden eenigszins dikker tusschenstuk, uit grootere elementen bestaande, gaan aan beide uiteinden naar weerszijden twee armen (antennen) uit, die zwak teruggebogen zijn, en op deze hoogte bij hun aanhechting aan het middenstuk eenigszins naar buiten uitsteken, zoodat daar ertusschen aan de buitenzijde een min of meer scherp geaccentueerde sinus aanwezig is. De elementen der armen zijn doorgaans kleiner dan van het middenstuk, de kleinste elementen zijn aan weerszijden der sinus aan te treffen. De endodermis gaat aan de beide zijden tusschen de antennen slechts weinig naar binnen.

Naar beneden vervolgd sluit de pinna-bar aan de buitenzijde van het xyleem van den bundel der rhachis aan, die hier bijna vlak is; de aanhechting vindt plaats aan de eenigszins uitstekende gedeelten (N°. 140). Hierdoor wordt een eenigszins langgerekte massa parenchym, althans dunwandig weefsel, ingesloten. In een lager stadium, (in N°. 141 zichtbaar), heeft de pinna-bar zich geheel aan den bundel der rhachis aangesloten, terwijl de ingesloten parenchym-massa aan den binnenkant in omvang is afgenomen; ze is nu ongeveer rond.

De buitenwaartsche begrenzing is dunner, in het midden slechts nog weinige elementen dik.

Nog iets lager is deze verbroken; aan de buitenzijde van het overigens vrij vlakke xyleem is een diepe sinus zichtbaar, die aan beide zijden door een uitspringende xyleemlijst wordt begrensd. Naar beneden wordt deze meer afgerond, waardoor de begintoestand weer wordt bereikt.

De continuiteit van het periphere xyleem, ontstaan door versmelting der pinna-bar met den bundel der rhachis komt in de preparaten van Groningen tweemaal voor; in de Londensche preparaten ontbreekt dit stadium. Echter is de scherpe sinus in deze zeer duidelijk, welk kenmerk de coupes sterk doen afwijken van die der andere soorten van het geslacht. Op grond vooral hiervan meent Scott in zijn Catalogus deze soort van de andere te mogen onderscheiden, Zooals uit het vorige blijkt, is deze goed ontwikkelde sinus het gevolg van het tijdelijk continue zijn van het periphere xyleem, wat in dit geslacht een ongewoon kenmerk is.

Tracht men uit de opeenvolgende coupes het ruimtebeeld te construeeren, dan komt men tot een beeld als in fig. 4. In de andere soorten van Etapteris, b. v. E. Scotti Bertrand, zijn de pinnabundels eveneens in paren; deze vereenigen zich eveneens tot een

pinna-bar, welke echter iets lager weer splijt in twee bundeltjes, die elk voor zich met het xyleem van den bundel der rhachis versmelten. Er is dus nooit eenig weefsel aan de buitenzijde van den bundel geheel door het xyleem ingesloten.

Dat dit verschil met den vorigen vorm echter slechts betrekkelijk is, leert ons de beschouwing der ruimtebeelden, die men zich van deze structuren kan ontwerpen. Fig. 4 stelt deze voor van E. Bertrandi, fig. 5 van E. Scotti.

Wij zien aan de eerste de pinna-bar den bundel der rhachis naderen en zijn zijden er mee versmelten. Iets lager wordt in het midden de continuiteit verbroken, de benedenwaartsche voortzetting der beide helften der pinna-bar begrenzen aan weerszijden de benedenwaartsche voortzetting der ingesloten parenchym-massa, de volgende pinna-bar zet zich met zijn randen eraan.

Bij E. Scotti zien wij eveneens de pinna-bar den bundel der rhachis naderen en ermee versmelten. Vóór deze versmelting echter plaats grijpt, is de pinna-bar in het midden reeds gespleten, zoodat beneden dit niveau weer twee bundels aanwezig zijn, die zich apart aan den bundel der rhachis aansluiten. Wij merken dus hier eenzelfde versmelting en eenzelfde mediane continuiteitsstoring van de pinna-bar op; echter is de hoogte dezer twee punten verschillend in de beide vormen. Naar beneden gaande, ter hoogte van de inkomende pinna-bar, is er echter steeds een onderbreking in het periphere xyleem aanwezig. Deze is n.l. gebonden aan de insertie der inkomende pinna-bar. Is de hoogte der onderbreking gering, dan zal het periphere xyleem over een tamelijk groote uitgestrektheid ononderbroken zijn. Nadert de lengte die van den afstand tusschen twee opeenvolgende paren pinnae, dan is de afstand, over welke deze continuiteit bestaat, slechts kort. Is de hoogte der onderbreking grooter dan de afstand van twee opeenvolgende paren pinnae, dan is de continuiteit nergens aanwezig. Behalve met de grootere lengte der onderbrekingen staat dit ook in verband met den korten afstand tusschen twee opeenvolgende paren pinnae; zoo is in E. Scotti vaak in een dwarse doorsnede de dwarse doorsnee van de pinna-bundeltjes van twee opeenvolgende paren zichtbaar.

Is dus uit de structuur van Etapteris Bertrandi eenerzijds die van de meer gecompliceerde soorten af te leiden, anderzijds geeft zij dus ook aanknoopingspunten aan de in dit opzicht eenvoudiger vormen, b.v. Diplolabis Römeri (Solms) Gordon, waar eveneens in het periphere xyleem een onderbreking aanwezig is, afhankelijk van de insertie der pinna-bar.

Indien men in deze plant, wat ons door de gedetailleerde onder-

zoekingen aan uitgebreide series door W. T. GORDON [1]) mogelijk is, het verloop der weefsels in het onderste deel van den bladsteel nagaat, dan blijkt dat ook hier de laatste pinna-bar een hoeveelheid parenchym insluit, waarna de beide protoxyleemstrengen, die eerst aan beide zijden ervan gelegen zijn, versmelten. Het parenchymatisch weefsel neemt, naar beneden vervolgd, in omvang af en eindigt blind; het is evenwel tot het laatst toe aan het protoxyleem verbonden, langs hetwelk het als een kegel in de tracheiden van het metaxyleem zich uitstrekt.

Opmerking verdient nu, dat in deze planten in de pinnae en in bijna de geheele rhachis, behalve in het onderste gedeelte, het protoxyleem aan de adaxiale zijde aan parenchymatisch, althans dunwandig, weefsel grenst. Dit kan tot geheel onderaan in den bladsteel vervolgd worden. Wanneer men aanneemt, dat in deze zone de vorming van tracheiden is onderdrukt, zoodat alleen dunwandige elementen zich kunnen ontwikkelen, dan kan hierdoor rekenschap worden gegeven van het bestaan der onderbrekingen boven de insertie der pinna-bar aan den bundel der rhachis.

Wanneer de pinna-bar met het xyleem der rhachis versmelt, wordt dit parenchym ingesloten. Dat behoorende bij de volgende pinna-bar echter stuit nu op het periphere xyleem, door de vorige pinna-bar gevormd. In deze zone is de ontwikkeling van tracheale elementen onmogelijk geweest, waardoor in de continuiteit ervan een onderbreking ontstond: de opening boven de insertie der pinna-bar.

Deze onderbrekingen in het periphere xyleem vertoonen overeenkomst met de bladopeningen in de stelen van vele Filices; ook hier wordt door het adaxiaal van het protoxyleem gelegen parenchym het xyleem van den stam gereduceerd, zoodat òf de weefsels in het centrum van den stam met de meer naar buiten gelegene in verbinding komen, òf de opeenvolgende parenchymformaties samenvloeien, en zoo het merg vormen; in het eerste geval zal men steeds een blind eindigend parenchymstrengetje aantreffen in den stam op geringen afstand onder de insertie der bladspoor wat in het tweede geval ontbreekt.

De binnen het periphere xyleem ingesloten massa parenchym, die bij elke opening met de meer naar buiten gelegen weefsels in verbinding treedt, is in zijn vorming te vergelijken met het merg gevormd volgens het tweede schema; echter ontstaat de verbinding, doordat de opeenvolgende deelen adaxiaal parenchym reeds tegen aanwezig weefsel wordt ingesloten, niet doordat de reductie in reeds

[1]) W. T. GORDON, 1911.

O. POSTHUMUS: „Etapteris Bertrandi Scott, een nieuwe Etapteris van het Boven-Carboon van Engeland (Lower Coal-Measures), en zijne beteekenis voor de stelair-morphologie”.



Fig. 1.

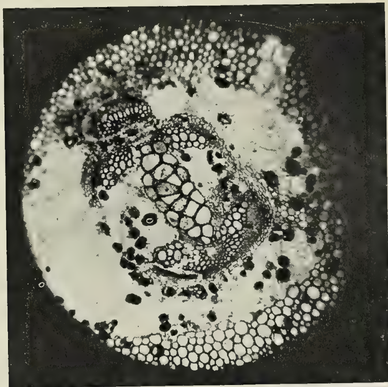


Fig. 2.



Fig. 4.

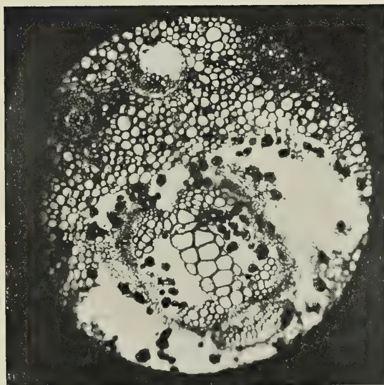


Fig. 3.



Fig. 5.

aanwezig weefsel voortschrijdt. Door de eigenaardige symmetrie van den vaatbundel der rhachis heeft het hier aan beide zijden vrijwel onafhankelijk van elkaar plaats.

In den vorm der armen komt E. Bertrandi Scott het meest overeen met E. Scotti Bertrand [1]), wijkt echter af door den eenvoudiger bouw der pinna-bundeltjes, de kleinere afmetingen en de verspreide ligging der idioblasten in de binnenste schors. Van E. shorensis Bertrand [2]) door de verdikking van het tusschenstuk; in deze soort blijft de continuiteit der pinna-bar eenigen tijd gehandhaafd, hoewel het gesloten zijn van het periphere xyleem niet werd waargenomen. De continuiteit van het periphere xyleem is volgens Bertrand [3]) een enkele maal geconstateerd in E. Tubicaulis Göppert sp., van het Beneden-Carboon van Silezie. In vele andere opzichten wijkt deze vorm echter van de onze af. Hoewel de mogelijkheid niet uitgesloten is, dat door het bekend worden van meerdere gegevens blijkt dat E. Bertrandi en een andere vorm, speciaal E. Scotti of E. shorensis, identiek zijn, leek het mij toch wel gemotiveerd dezen interessanten vorm te definieeren.

Groningen. *Botanisch Laboratorium.*

VERKLARING DER PLAAT.

Fig. 1–3. Etapteris Bertrandi Scott. Dwarse doorsneden door den rhachis (resp. N⁰. 140, 141, 142, 45 maal vergroot).

Fig. 4. Etapteris Bertrandi Scott. Model van het xyleem der rhachis (de zijden der sinus zijn iets te scherp aangegeven).

Fig. 5. Etapteris Scotti Bertrand. Model van het xyleem der rhachis.

LITERATUUR.

P. Bertrand, 1909. P. Bertrand. Étude sur la fronde des Zygopteridées. Thèse, Lille, avec atlas, 1909.

P. Bertrand, 1911. P. Bertrand. Nouvelles remarques sur la fronde des Zygopteridées. Bulletin du societé d'histoire naturelle d'Autun. t. 25, 1911, p. 18–25, 2 pl.

W. T. Gordon, 1911. W. T. Gordon. On the Structure and Affinities of Diplolabis Römeri (Solms). Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. 47, 1911, p. 711–736; 4 pl.

[1]) P. Bertrand, 1909, p. 140—147, 209, pl. 16, fig. 111, 112.

[2]) P. Bertrand, 1911, p. 30—38, pl. II, fig. 23—31, 34, 35.

[3]) P. Bertrahd, 1909, p. 147, 209, pl. 1, fig. 2, pl. 13, fig. 93, pl. 16, fig. 109.

Hydrodynamica. — J. M. BURGERS: „*Over het omslaan van den laminairen stroomingstoestand in de grenslaag in den turbulenten toestand*". Mededeeling N°. 4 uit het Laboratorium voor Aerodynamica en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.

(Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ).

Door PRANDTL is er op gewezen dat de strooming in de *grenslaag* — d. i. de laag waarin zich de vertragende werking van de wrijvingskrachten doet gevoelen — langs de wanden van een vlakke, gladde plaat die aan de voorzijde is toegespitst, zoodat de strooming daar zoo min mogelijk gestoord wordt, aanvankelijk *laminair* zal zijn, en eerst op een zekeren afstand van den voorrand *turbulent* wordt [1]).

Noemt men δ de dikte van de grenslaag, is V de snelheid van de ongestoorde strooming, welke buiten de grenslaag aanwezig is, en is $\nu = \mu/\varrho$ de kinematische wrijvingscoëfficiënt, dan kan men op grond van de bestaande onderzoekingen over het optreden van den turbulenten stroomingstoestand verwachten, dat de laminaire strooming in de grenslaag labiel wordt tegenover storingen van eindige grootte, wanneer het getal $R^* = V\delta/\nu$ een kritische waarde, op ca. 2000 te stellen, gepasseerd is. Zijn de storingen groot, dan treedt de turbulentie spoedig op; zijn de storingen klein, dan kan R^* het genoemde bedrag eenige malen overschrijden, eer dat de turbulentie intreedt.

Indien men aanneemt dat het omslaan van den laminairen naar den turbulenten toestand in de grenslaag zich voltrekt over een korten afstand Δx, zoodat de wrijvingskracht door de strook ter lengte Δx van den wand uitgeoefend, te verwaarloozen is t. o. v. het transport van impuls in de grenslaag, dan kan men een betrekking vinden tusschen de *dikten* van de grenslaag vóór en ná de verandering. Deze betrekking vindt men door de impulsvergelijking van VON KÁRMÁN [2]), die voor een stationaire beweging en bij afwezigheid van een drukverval luidt:

[1]) L. PRANDTL, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, I, p. 135, 1921.

[2]) TH. VON KÁRMÁN, Zs. f. angew. Math. u. Mech. 1, p. 235, 1921 (verg. 5).

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u^2\,dy - V\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u\,dy = -\tau$$

(τ is de wrijvingskracht per eenheid van oppervlak door den wand uitgeoefend) over den afstand Δx te integreeren:

$$\left(\int_0^\delta \varrho u^2\,dy\right)_2 - \left(\int_0^\delta \varrho u^2\,dy\right)_1 - V\left(\int_0^\delta \varrho u\,dy\right)_2 + V\left(\int_0^\delta \varrho u\,dy\right)_1 = -\tau\,\Delta x \underline{\underline{\infty}}\ 0. \quad (I)$$

Daarbij heeft de index 1 betrekking op het laminaire gedeelte, 2 op het turbulente. Deze vergelijking drukt het behoud van de hoeveelheid van beweging uit: het meerdere bedrag aan hoeveelheid van beweging dat door de turbulente grenslaag gaat, is te danken aan de omstandigheid dat door de turbulente laag meer vloeistof stroomt, welke uit den ongestoorden stroom, die de snelheid V heeft, is opgenomen.

Rekent men voor de laminaire strooming met een benaderde formule voor de snelheidsverdeeling:

$$u = V\left(\frac{2y}{\delta_1} - \frac{y^2}{\delta_1^2}\right) \text{ [1]}$$

dan is:

$$\left(\int_0^\delta u\,dy\right)_1 = \frac{2}{3}V\delta_1 \quad ; \quad \left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_1 = \frac{8}{15}V^2\delta_1.$$

In de turbulente grenslaag is:

$$u = V\left(\frac{y}{\delta_2}\right)^{1/7};$$

en dus:

$$\left(\int_0^\delta u\,dy\right)_2 = \frac{7}{8}V\delta_2 \quad ; \quad \left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_2 = \frac{7}{9}V^2\delta_2.$$

Voegt men deze waarden in verg. (I), dan levert ze:

$$\frac{7}{9}\delta_2 - \frac{8}{15}\delta_1 - \frac{7}{8}\delta_2 + \frac{2}{3}\delta_1 = 0$$

waaruit volgt:

$$\delta_2 = \frac{48}{35}\delta_1 = ca.\ 1{,}4\ \delta_1 \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

[1] K. Pohlhausen, Zs. f. angew. Math. u. Mech. 1, p. 258, 1921.

Ter verduidelijking van de beteekenis dezer vergelijking kan opgemerkt worden, dat de dikte van de laminaire grenslaag theoretisch samenhangt met den afstand x tot den voorrand van den wand door de betrekking:

$$\delta_{lam} = 5{,}5 \sqrt{\frac{\nu x}{V}} \text{ [1]}$$

De maximale waarde δ_1, en dus ook de waarde van x waarbij het omslaan optreedt, wordt, zooals boven gezegd is, bij gegeven V en ν bepaald door de grootte der in den oorspronkelijken stroom aanwezige storingen.

De door VON KÁRMÁN afgeleide vergelijking voor de dikte van de turbulente grenslaag [2]) moet in het algemeen geschreven worden:

$$\delta_{turb} = 0{,}37\,(x - x_0)^{4/5}\,\nu^{1/5}\,V^{-1/5}.$$

De waarde van de integratie-constante x_0 zal dan moeten volgen uit door verg. (II) gegeven aanvangswaarde van $\delta_{turb.}$ —

Door den Heer B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN, w. i., assistent van het laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica, zijn onder leiding van schrijver dezes talrijke metingen uitgevoerd over het verloop der strooming in de grenslaag langs een vlakke, gladde, glazen plaat van 1650 mm. lengte, met toegespitsten voorrand, welke metingen wij binnenkort hopen te publiceeren. Deze metingen zijn verricht met z.g. „gloeidraad-snelheidsmeters" volgens KING [3]).

Een der reeksen metingen vertoont, blijkens de snelle toeneming

Metingen van 19/20 Sept. 1923; draad N°. 5.6 (dikte 0.005 cm.)

Afstand tot den voorrand der plaat:	Snelheidsverval aan den wand:	Dikte der grenslaag:
$x =$ 50 cm.	$(\partial u/\partial y)_{y=0} =$ 4520 sec.$^{-1}$	$\delta =$ ca. 0.57 cm.
60	4640	ca. 0.67
70	5200	ca. 0.70
75	6040	ca. 0.81
80	7800	ca. 1.1
85	8080	ca. 1.1
90	8800	ca 1.1
100	8800	ca. 1.2

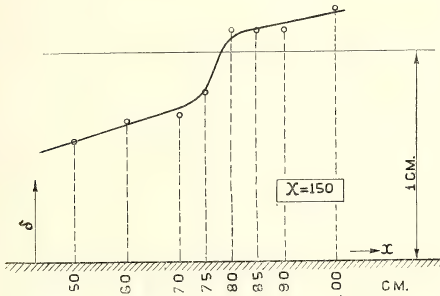
[1]) K. POHLHAUSEN, l.c. fig. 4.

[2]) TH. VON KÁRMÁN, l.c. p. 243.

[3]) L. V. KING, Phil. Transactions London A **215**, p. 373, 1914.

van de waarde van het snelheidsverval aan den wand $(\partial u/\partial y)_{y=0}$, welke bij een bepaalden afstand tot den voorrand optreedt, een vrij snellen overgang van den laminairen naar den turbulenten stroomingstoestand, en daarbij tegelijk een *snelle toeneming van* δ.

Bijgaande figuur doet de vrij plotselinge verdikking duidelijk uitkomen[1]).



Evenwel beantwoordt de experimenteel bepaalde verdeeling der snelheden niet geheel aan de boven aangenomen formules. Men kan echter de impulsvergelijking direct toetsen aan de empirische gegevens, en vindt dan (met weglating van den factor ϱ):

$$x = 70 \text{ cm.}: \left(\int_0^\delta u\,dy\right)_1 = 442 \text{ cm}^2 \text{ sec.}^{-1}; \left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_1 = 304000 \text{ cm}^3 \text{ sec.}^{-2}$$

$$x = 80 \text{ cm.}: \left(\int_0^\delta u\,dy\right)_2 = 727 \text{ cm}^2 \text{ sec.}^{-1}; \left(\int_0^\delta u^2\,dy\right)_2 = 501000 \text{ cm}^3 \text{ sec.}^{-2}$$

terwijl: . . . . . $304000 + (727 - 442) \times 800 = 532000 \text{ cm}^3 \text{ sec.}^{-2}$

Er is een tekort van 31000; hiervan kan aan de werking der wrijving worden toegeschreven (met een gemiddelde waarde van het snelheidsverval ten bedrage van $^1/_2$ $(5200 + 7800) = 6500$):

$$(x_2 - x_1)\, \nu\, (\partial u/\partial y)_{y=0} = ca.\ 10000.$$

Er blijft dus een tekort van 21000, d.i. ca. 4 °/₀ van het verwachte bedrag. Het is mogelijk dat dit nog aan meetfouten te wijten is.

October 1923.

[1]) Het getal $X = 150$ in de fig. vermeld, heeft betrekking op den stand van de plaat in de tunnel: de voorrand van de plaat bevond zich op een afstand van ca. 150 cm. achter den z.g. „collecteur" of gelijkrichter.

— Zoowel voor als achter het overgangsgebied neemt $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ *af* bij toeneming van x, terwijl δ steeds toeneemt.

Natuurkunde. — G. HERTZ: „*Over het opwekken van spectraallijnen door botsingen van electronen.*"

(Aangeboden door de Heeren P. EHRENFEST en W. H. JULIUS.)

Volgens de theorie der quanta kan men verwachten, dat een atoom door botsing met een electron slechts dan in staat gesteld kan worden tot de emissie van een bepaalde spectraallijn, wanneer de kinetische energie van het electron grooter is dan een zekere drempelwaarde, die voor de betrokken lijn karakteristiek is. De spanning, die een electron vrij moet doorloopen, om deze kinetische energie te verkrijgen, noemen we de aanslagspanning der spectraallijn. Voor deze aanslagspanning kan men verschillende waarden verwachten naar gelang van den aard van het systeem, dat het licht uitzendt. In het eenvoudigste geval van den oscillator van PLANCK is de aanslagspanning door de frequentie bepaald en gegeven door de vergelijking $Ve = h\nu$. Gaat men uit van de atoomtheorie van BOHR, dan is de arbeid, die noodig is voor het opwekken van een bepaalde lijn, gelijk aan de energie, die verricht moet worden om het atoom uit zijn normalen toestand over te voeren in de hoogste der beide stationaire toestanden tusschen welke een overgang moet plaats vinden, om tot de uitzending van de bedoelde spectraallijn aanleiding te geven. De aanslagspanning van een bepaalde spectraallijn is hier dus gegeven door de vergelijking $Ve = Ie - hT$, waarin I de ionisatiespanning voorstelt en T de kleinste der beide termen, die de spectraallijn karakteriseeren.

Experimenteel is tot nu toe het bestaan van een individueele aanslagspanning slechts aangetoond voor de resonantielijnen van de alkali- en aardalkalimetalen, en van de metalen, die met de laatstgenoemde in dezelfde groep van het periodiek systeem staan [1]). Ook de waarde der aanslagspanning werd in overeenstemming gevonden met die, welke volgens de theorie der quanta te verwachten is. Hiermede werd het quanteuze karakter van dit verschijnsel rechtstreeks uit het experiment aangetoond; doch omtrent het atoommodel van BOHR konden de gevonden resultaten niets leeren, daar

[1]) J. FRANCK en G. HERTZ, Verh. D. Phys. Ges. **16**, 512, 1914.
J. C. MC LENNAN en HENDERSON, Proc. Roy. Soc. **91**, 485, 1915.
J. C. MC LENNAN en H. I. C. IRETON, Phil. Mag. **36**, 461, 1918.
P. D. FOOTE, W. F. MEGGERS en F. L. MOHLER, Phil. Mag, **42**, 1002, 1921; Astroph. Journ. **55**, 145, 1922; Phil. Mag. **43**, 659, 1922.

voor alle absorptielijnen van het atoom in zijn rusttoestand, en dus ook voor de resonantielijnen, de aanslagspanning uit de frequentie is af te leiden (door de $h\nu$-betrekking) zoowel wanneer het atoommodel van BOHR als de oscillator van PLANCK als uitgangspunt wordt genomen. Om experimenteel uit te maken of de termen eener reeks inderdaad opgevat moeten worden als bepaalde energiewaarden zooals volgens de theorie van BOHR het geval is, is het noodzakelijk waarnemingen te doen over het opwekken van de *hoogere* lijnen der spectrale reeksen. De mogelijkheid dat door electronenbotsingen niet slechts energiequanta overgebracht kunnen worden, overeenkomende met de frequentie der resonantielijnen, maar ook zulke, die beantwoorden aan den overgang van het atoom naar hoogere stationaire toestanden, is door J. FRANCK en E. EINSPORN [1]) voor kwik en door I. FRANCK en P. KNIPPING [2]) voor helium reeds experimenteel aangetoond. Daar de hierbij waargenomen energiequanta goed overeenkomen met de volgens de theorie van BOHR uit de termen der reeksen berekende waarden, is het ook zeer waarschijnlijk dat ook de emissie van de bij deze termen behoorende lijnen beginnen zal bij de waargenomen aanslagspanningen. Nu zijn echter merkwaardig genoeg, bijna alle waarnemers, die in den laatsten tijd het opwekken van spectraallijnen door electronenbotsingen direct spectroscopisch onderzocht hebben, tot een ander resultaat gekomen. Weliswaar heeft RAU [3]) reeds vroeger gevonden, dat in helium de aanslagspanning voor de verschillende termen eener reeks met toenemend rangnummer, grooter wordt. Evenzoo hebben RICHARDSON en C. B. BAZZONI [4]) bij helium voor verschillende lijnen verschillende aanslagspanningen gevonden. Daarentegen komen P. D. FOOTE en W. F. MEGGERS [5]) bij hun onderzoekingen over de lichtopwekking in metaaldampen tot het besluit, dat wel de resonantielijnen vanaf een bepaalde (door de $h\nu$-betrekking gegeven) aanslagspanning kunnen worden opgewekt zonder dat tegelijkertijd het overige deel van het spectrum te voorschijn wordt geroepen, maar dat alle hoogere lijnen der reeksen gelijktijdig eerst optreden wanneer de ionisatiespanning wordt bereikt. Tot hetzelfde resultaat komt A. C. DAVIES [6]) bij helium en G. DÉJARDIN bij helium en kwik [7]). Onder deze omstandigheden leek het mij van belang het opwekken van spectraallijnen door

1) E. EINSPORN, Zeitschr. f. Phys. **5**, 208, 1921.
2) J. FRANCK en P. KNIPPING, Zeitschr. f. Phys. **1**, 320, 1920.
3) H. RAU, Sitzungsber. Phys. Med. Gesellsch. Würzburg 1914, pag. 20.
4) O. W. RICHARDSON en C. B. BAZZONI, Nature **98**, 5, 1916.
5) P. D. FOOTE en F. W. MEGGERS, Bur. Standards Scientif. Paper Nr. 386, 1920.
6) A. C. DAVIES, Proc. Roy. Soc., **100**, 599, 1922.
7) G. DÉJARDIN, C. R. **175**, 952, 1922.

electronenbotsingen nog eens te onderzoeken met behulp van een opstelling, waarbij foutenbronnen zooveel mogelijk vermeden zijn.

De gebezigde methode was in beginsel dezelfde als bij onderzoekingen op dit gebied veelal wordt toegepast. De door een gloeikathode uitgezonden electronen worden door een electrisch veld versneld en komen door een metalen gaasje in een veldvrije ruimte, waarin zij tegen de atomen van het gas of de metaaldamp botsen; dan wordt nagegaan hoe het spectrum van het tengevolge van de botsingen uitgezonden licht afhangt van de spanning, welke de electronen hun versnelling geeft. Een eerste vereischte is, dat de electronen zooveel mogelijk alle dezelfde snelheid hebben. Daar n.l. de aanslagspanningen voor de verschillende lijnen dikwijls slechts enkele tiende deelen van een Volt verschillen, is reeds een betrekkelijk kleine ongelijkmatigheid in de snelheid voldoende om het bepalen er van onmogelijk te maken. Foutenbronnen die in dit opzicht schadelijk kunnen werken zijn: 1. Potentiaalverschillen tusschen verschillende punten der electronenbron (spanningsafval in den gloeidraad). 2. Wijd rooster in plaats van fijn gaasje. 3. Storing door ruimteladingen in de observatieruimte ten gevolge van het gebruik van te groote stroomdichtheden. 4. De mogelijkheid dat de zuivere electronenontlading overgaat in een boogontlading, waartoe voornamelijk bij spanningen in de nabijheid van de ionisatiespanning neiging bestaat. Deze foutenbronnen zijn niet onafhankelijk van elkaar. Zoo wordt bijv. de overgang in een boogontlading in de hand gewerkt door het gebruik van een wijd rooster, terwijl aan den anderen kant door het optreden van de boogontlading de fout ten gevolge van te groote spanningsafval in den gloeidraad gedeeltelijk wordt opgeheven, daar zulk een laagspanningsboog steeds op een bepaald punt van den gloeidraad gaat staan. Neemt men het spectrum van een laagspanningsboog waar, dan vindt men, dat men daarin onder gunstige omstandigheden met electronensnelheden te maken heeft, die onderling vrijwel gelijk zijn; toch zijn deze blijkbaar nog niet voldoende gelijk om de kleine verschillen in de aanslagspanningen der hoogere termen in de reeksen te doen uitkomen.

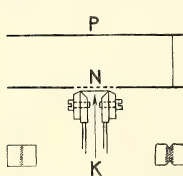


Fig. 1.

Om deze fouten zooveel mogelijk te vermijden werd een opstelling gebruikt, zooals in fig. 1 is voorgesteld. De gloeikathode *K*, een dun platinabandje van 6 mm. breedte, dat op den bovenkant met een plek bariumoxyd is voorzien, staat voor een gaasje *N*, op een afstand van ongeveer

een halve mm. De plaat P is geleidend met N verbonden. Bij enkele proeven werd de ruimte tusschen N en P naar alle zijden afgesloten met metalen wanden, uitgezonderd één enkele spleet; ten einde een volkomen veldvrije ruimte te verkrijgen; de in de figuur weergegeven eenvoudiger vorm is echter ook voldoende gebleken. Bij deze opstelling bestond, wanneer de mazen van het gaas voldoende fijn en de afstand tusschen de gloeikathode en het gaas voldoende klein worden genomen, bij de aangewende drukken geen gevaar voor den overgang in een boogontlading, ook bij spanningen boven de ionisatiespanning. Om ook geen nadeeligen invloed te ondervinden van den spanningsafval in de gloeikathode, werd er voor gezorgd, dat slechts een smalle strook loodrecht op de richting van den gloeistroom electronen uitzond, zoodat tusschen de verschillende punten van de electronenbron geen potentiaalverschillen bestonden van meer dan 0.1 Volt. Bij sommige proeven werd dit daardoor bereikt, dat het oxyd in den vorm van een slechts $^1/_2$ mm. breede dwarsstrook op het platinabandje werd aangebracht. Daar het aanbrengen van zulk een strook echter bezwaarlijk was, werd later gewerkt met een grootere vlek en aan het platinabandje den vorm gegeven, zooals in de figuur beneden rechts geteekend is. Tengevolge van de verhoogde stroomdichtheid in het midden krijgt men daar een tamelijk scherp maximum van de temperatuur. Bij de buitengewoon sterke afhankelijkheid der electronen-emissie van de temperatuur heeft dit tot gevolg, dat practisch de emissie slechts van een smalle, in het gebied van maximale temperatuur gelegen strook uitgaat.

Om storingen door ruimteladingen te vermijden werd de stroomsterkte nooit hooger gekozen dan 10^{-4} amp. Dit is in het bijzonder noodig bij het onderzoeken van edelgassen, waar men wegens het geringere rendement van de onelastische botsingen met hoogere drukken moet werken dan bij metaaldampen. Reeds bij kleine stroomdichtheden veroorzaken de electronen, die in de veldvrije ruimte tallooze malen door de gasatomen heen en weer worden gekaatst, een belangrijke ruimtelading, welke maakt, dat de ruimte niet meer veldvrij is, zoodat de electronen op verschillende plaatsen verschillende snelheden hebben. Dat dit inderdaad zoo is kan men duidelijk zien, wanneer men een spanning aanlegt, die even boven de aanslagspanning van de eerst optredende lijnen is. De ruimtelading verraadt zich dan door een donkere ruimte in de buurt van de grootste electronen-dichtheid (onmiddellijk voor het gaasje). Hier hebben n.l. de electronen als gevolg van de negatieve ruimtelading een kleinere snelheid dan overeenkomt met de aangelegde spanning.

Bij proeven, waarbij het aankomt op een zoo groot mogelijke intensiteit, kan men dezen storenden invloed der ruimteladingen vermijden, door aan het te onderzoeken gas een kleine hoeveelheid van een ander edelgas of metaaldamp toe te voegen, waarvan de ionisatiespanning beneden de laagste aanslagspanning van het te onderzoeken gas ligt. Doet men dit, dan zijn altijd eenige positieve ionen aanwezig, die in staat zijn de ruimtelading der electronen juist te compenseeren. Natuurlijk mag de druk van het toegevoegde gas niet te groot zijn, daar anders de positieve ruimtelading te groot zou worden en te veel electronen hun energie zouden afgeven aan de atomen van het toegevoegde — in plaats van aan die van het te onderzoeken gas. Het is gebleken, dat kwikdamp met de dampspanning, die hij bij kamertemperatuur heeft, toegevoegd aan neon van ongeveer 0.8 mm. druk, juist het gewenschte effect geeft. Men kan in zulk een met neon en kwik gevulde buis nog met stroomen van eenige milliampères werken zonder door de ruimtelading gestoord te worden en men verkrijgt daarbij dan een voldoende intensiteit om de proef ook als demonstratieproef te kunnen uitvoeren. Bijzonder geschikt voor dit doel is een buis gevuld met een mengsel van neon en helium, waaraan kwik is toegevoegd, daar men met zulk een buis achtereenvolgens het optreden van de lijnen van kwik, neon en helium bij de bijbehoorende aanslagspanningen kan waarnemen. Ook het optreden van de resonantielijn van kwik bij ongeveer 5 Volt kan met een dergelijke buis worden aangetoond, daar het optreden van deze ultra-violette lijn door de fluorescentie van den glaswand zichtbaar wordt. Bij de onderhavige onderzoeking werd ter vermijding van mogelijke secundaire effecten — zooals bijv. inwerking van aangeslagen atomen van de eene soort op die van de andere — zonder toevoeging van kwik gewerkt en de stroomsterkte voldoende klein gekozen om storingen door de ruimtelading te ontgaan. De intensiteit van de opgewekte straling was dan betrekkelijk klein; de hierbij gereproduceerde spectrale opnemingen vereischten belichtingstijden van 6 tot 12 uren.

Reeds een oppervlakkig visueele waarneming leerde, dat alle onderzochte lijnen van het boogspectrum van kwik, neon en helium zich in overeenstemming met de theorie van Bohr gedragen, daar zij vanaf bepaalde, voor de afzonderlijke lijnen of groepen van lijnen karakteristieke aanslagspanningen, optreden. Nauwkeurige metingen der aanslagspanningen zijn nog niet uitgevoerd. Daarvoor is het noodig metingen te doen omtrent de afhankelijkheid van de intensiteit der lijnen van de snelheid der electronen. Dergelijke metingen zijn in voorbereiding. Bij de sterkste lijnen kon de aanslagspanning

met de nauwkeurigheid van eenige tiende deelen van een Volt gemeten worden, door de spanning te bepalen, waarbij die lijnen plotseling optreden. Hoewel de zoo verkregen uitkomsten goed overeenstemmen met de waarden, die men uit de waarden der termen kan afleiden, mag deze methode van meten toch niet als in alle opzichten betrouwbaar worden beschouwd.

Ook zonder intensiteitsmetingen kan men het achtereenvolgende optreden der lijnen aantoonen, door verschillende spanningen, kleiner dan de ionisatiespanning, aan te leggen en het bijbehoorende spectrum op te nemen. Men zal dan alleen lijnen waarnemen, waarvan de aanslagspanning beneden de aangelegde spanning ligt. Verhoogt men die spanning met een bepaald bedrag, dan moeten de nieuw optredende lijnen alle lijnen met hoogere aanslagspanning zijn.

Zooals bij alle metingen over botsingen van electronen is ook hier de moeilijkheid om de absolute waarde te weten van de spanning, welke aan de electronen hun snelheid geeft; ook hier kan deze spanning slechts met een nauwkeurigheid van ongeveer 0.5 Volt worden aangegeven. Voor de meting van de aanslagspanning van spectraallijnen is daarom de beste weg, het toestel te ijken met een gas, waarvoor de aanslagspanningen uit de spectrale reeksen kunnen berekend worden, zooals dat meermalen gedaan is bij de meting van aanslagspanningen volgens de electrische methode. Wegens deze onzekerheid in de absolute waarden zijn in het vervolg de waarden van de spanning, die met de werkelijke snelheid der electronen overeenkomt, afgeleid uit de berekende aanslagspanningen der voorkomende resp. ontbrekende lijnen. Het verschil tusschen de aangegeven waarden en de op den Voltmeter afgelezen spanningen was in alle gevallen tusschen 1.5 Volt en 2 Volt gelegen; inderdaad werd ook door direkte metingen van de snelheid der electronen (aanbrengen van een vertragend electrisch veld in vacuum) gevonden, dat de aan te brengen correctie tusschen deze grenzen moet liggen. Uit de hieronder medegedeelde gegevens mag men dus besluiten, dat de absolute waarden met de nauwkeurigheid van 0,5 Volt overeenkomen met die welke volgens BOHR uit de ionisatiespanning en de waarden der termen worden berekend.

In de figuren 2 tot 4 zijn een reeks spectra gereproduceerd, die zijn opgewekt in kwik, helium en neon door de botsingen van electronen met verschillende snelheid. De belichtingstijden zijn bij kwik en helium zoo gekozen, dat de sterkste lijnen, die ook bij lagere spanningen reeds optreden, op beide opnemingen ongeveer dezelfde intensiteit hebben. De getallen welke achter de golflengte tusschen haakjes vermeld staan, beteekenen de uit de ionisatie-

spanning en de waarden der termen berekende aanslagspanningen. De opnemingen met kwik (fig. 2) zijn gemaakt bij een druk van ongeveer 0.03 mM. (de dampspanning bij ongeveer 60°). Men ziet dat bij

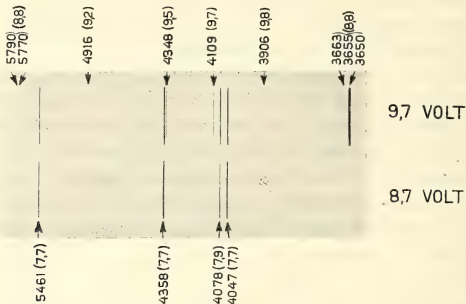


Fig. 2.

lagere spanning slechts lijnen optreden met een aanslagspanning, die kleiner is dan 8 Volt, terwijl de lijnen, die bij verhooging der spanning er bij komen, alle een hoogere aanslagspanning hebben. Bijzonder opvallend is het gedrag van de sterke lijn 3650, die bij de hoogere spanning verreweg de sterkste lijn is, en bij de lagere spanning geheel ontbreekt.

Evenzoo gedragen zich de heliumlijnen (fig. 3). De gereprodu-

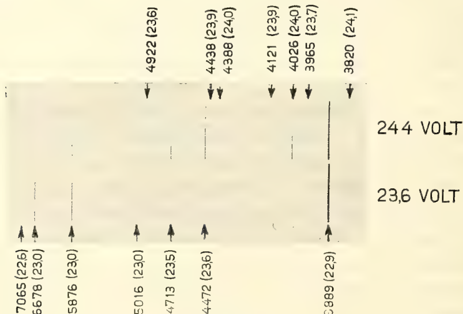


Fig. 3.

ceerde spectrale opnemingen zijn gemaakt met een druk van 0.8 mm. Uit inmiddels verrichte proefnemingen is gebleken, dat het ook bij edelgassen voordeeliger is met lagere drukken te werken; en men krijgt den indruk, dat om scherp het opwekken der lijnen te ver-

krijgen, men in helium met nog kleinere stroomdichtheden moet werken dan b.v. in neon. Het is niet onmogelijk dat hier de vorming van metastabiele heliumatomen nog een rol speelt. Bij voldoende kleine stroomdichtheden kan men ook in helium de verschillende lijnen achtereenvolgens te voorschijn doen komen, overeenkomende met de volgorde hunner aanslagspanningen. Ook hier bestaat dus, zooals uit de spectrogrammen blijkt, zeer goede overeenstemming met de volgens BOHR berekende waarden.

In neon werd gewerkt met drukken tusschen 0.5 en 1 mm. Figuur 4 geeft een reeks van opnemingen, die de ontwikkeling van de groep der roode neonlijnen bij toenemende snelheid der botsende

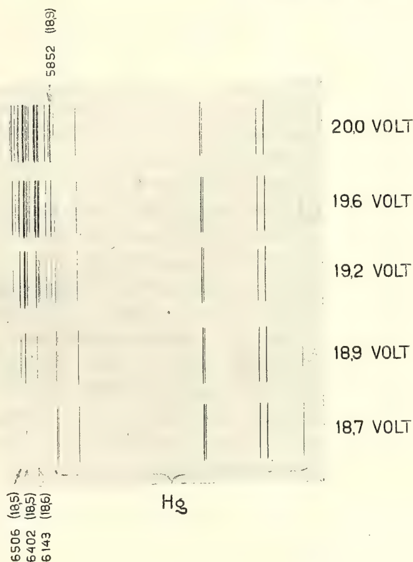


Fig. 4.

electronen weergeven. Deze opnemingen zijn gemaakt bij aanwezigheid van een druppel kwik in de buis, maar het verschijnsel is zonder kwik geheel hetzelfde. Bijzondere aandacht verdient hier 't gedrag der gele neonlijn 5852, die onder normale omstandigheden verreweg de sterkste lijn van het neonspectrum is. Deze lijn moet volgens het schema der reeksen, zooals PASCHEN [1]) die voor neon opgeeft,

[1]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **60**, 405, 1919.

een aanslagspanning hebben, die 0.4 Volt hooger is dan die van de lijnen 6143, 6402 en 6506; en inderdaad ontbreekt de gele lijn dan ook volledig bij de laagste spanning, die noodig is om de genoemde lijnen op te wekken; eerst bij verhooging der spanning met eenige tiende deelen van een Volt komt zij te voorschijn en overtreft bij verdere verhooging dan al spoedig de andere lijnen in intensiteit.

Ook de absolute waarde van de aanslagspanningen dezer lijnen stemt, binnen de grenzen der meetfouten, overeen met de waarden, die men uit de termen der reeksen en de door schrijver dezes voor de ionisatiespanning gevonden waarden kan berekenen[1]); zoodoende worden door de waarnemingen over de opwekking der spectraallijnen, de metingen van de aanslag- en ionisatiespanningen bevestigd.

Dergelijke waarnemingen werden ook gedaan met zink- en thalliumdamp, welke echter nog een voorloopig karakter dragen. Om de moeilijkheden te vermijden, die zich voordoen, wanneer men het geheele toestel op hooge temperatuur brengt, werd een methode toegepast, waarbij het toestel op kamertemperatuur kon blijven. Daartoe werd het toestel met helium en neon van eenige mm. druk gevuld en dan het te onderzoeken metaal tot verdamping gebracht in de veldvrije ruimte tusschen de platen. Zoodoende wordt bereikt, dat zoowel de electronen als de metaalatomen door het edelgas diffundeeren en ten slotte na talrijke botsingen op de oppervlakte van het metaal terecht komen. Men kan hierbij de omstandigheden zoo kiezen, dat het aantal botsingen tusschen electronen en metaalatomen groot genoeg is, om een zoodanige intensiteit van het bij die botsingen opgewekte licht te verkrijgen, dat het met den spectroscoop kan worden waargenomen. Deze proeven zijn voorloopig beperkt gebleven tot subjectieve waarnemingen met den spectroscoop. Bij zink kon door geschikte keuze der spanning een spectrum worden verkregen, dat alleen uit het triplet 4680, 4722, 4811 bestond, terwijl de sterke roode lijn 6362 eerst bij ongeveer 1 Volt hoogere spanning te voorschijn kwam.

Bij thallium werd als aanslagspanning van de groene lijn 3.5 Volt gemeten. Dit bevestigt, dat in thallium de $2p_2$ toestand de normale toestand is, zooals ook GROTRIAN[2]) door absorptiemetingen heeft kunnen aantoonen.

Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips'
Eindhoven. *Gloeilampenfabrieken.*

[1]) G. HERTZ, Deze Verslagen Dl. XXXI Nr. 5, blz. 249; Zeitschr. f. Phys. **18**, 307, 923.

[2]) W. GROTRIAN, Zeitschr. f. Phys. **12**, 218, 1922.

Ter uitgave in de Werken der Afdeeling wordt aangeboden:

a. door den Heer L. E. J. BROUWER het manuscript van zijne verhandeling: *„Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*. (Erster Teil).

b. door den Heer L. Bolk, namens de Heeren J. M. BURGERS en B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN, het manuscript hunner verhandeling: *„Voorloopige metingen omtrent het verloop van de strooming in de grenslaag langs een vlakken wand"*. (Meded. N°. 4*a* uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft).

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES met verzoek om rapport uit te brengen in de volgende vergadering.

Voor de boekerij der Akademie wordt door den Heer J. BOEKE, namens de schrijvers ten geschenke aangeboden een exemplaar van de volgende dissertaties:

a. W. GROENEWEG, *„Over de ontwikkeling van het orgaan van* EIMER *in den snuit van den mol.*

b. J. J. DE VRIES, *De histogenese van het glazuur en tandbeen bij het kalf."*

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA

In noot 1 aan den voet van blz. 808 van dit deel staat: het IX[e] Internat. Physiologen-Congres. Dit moet zijn het **XI**[e].

Op blz. 810 in de fig. 1*a* en 1*b* en in het onderschrift dier figuren den datum der proef 27, XI 1922 te veranderen in **27, II 1923**.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

OP ZATERDAG 24 NOVEMBER 1923.

DEEL XXXII.

N°. 9.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.

Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Een schrijven van den Heer H. R. KRUYT, meldende dat hij verhinderd is deze vergadering bij te wonen.

Voor kennisgeving aangenomen.

2°. Een schrijven van den Heer E. HERTZSPRUNG dd. 26 October l.l. met de mededeeling dat hij, wegens verblijf buitenslands, gedurende een half jaar verhinderd zal zijn de vergaderingen der Akademie bij te wonen.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Een apostille van den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 7 November l.l. N°. 4924, Afd. K.W., ter begeleiding van een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken en Landbouw dd. 2 November l.l. Directie van den Landbouw N°. 2629 Afd. C, waarin advies gevraagd wordt over een verzoek, door de „Vereeniging tot bescherming van vogels" gericht tot den Minister van Buitenlandsche Zaken. Dit verzoek houdt in een aanvrage om door wettelijke bepalingen tot een beperking te komen van den invoer van huiden van vogels en in het wild levende dieren.

Op voorstel van den Voorzitter worden deze stukken ter fine van prae-advies gesteld in handen van eene Commissie. Op verzoek van den Voorzitter nemen in deze Commissie zitting de Heeren MAX WEBER, J. F. VAN BEMMELEN, C. PH. SLUITER en J. VERSLUYS, die de bevoegdheid bezitten om andere leden, buiten de Akademie, te assumeeren.

4°. Overdruk uit de „Avondpost" van 7 en 8 April 1922: *Ons waterleidingvraagstuk en het verzanden van de haven te Scheveningen*, door REINIER D. VERBEEK en een overdruk uit het weekblad „De Ingenieur" (N°. 41 van 1923): *Het aanboren van artesisch water in de duinwatervangen*, door Ir. H. H. VAN KOL met nota van RENIER.

Ter visie gelegd.

5°. Een schrijven van de „Union Internationale de physique pure et appliquée" dd. 20 November l.l. met de kennisgeving, dat de opening van de algemeene vergadering der „Union" is bepaald op Maandag 10 December e.k. In verband met deze kennisgeving brengt de Heer ZEEMAN, mede namens de overige leden-physici der

Afdeeling, rapport uit over een in de vorige buitengewone vergadering ter tafel gebracht schrijven van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging betreffende aansluiting bij deze „Union". (Zie blz. 874).

De Voorzitter brengt ter kennis van de Afdeeling, dat hedenmorgen eene vergadering van de W. I. S.-commissie heeft plaats gehad. In deze vergadering is bericht ontvangen van den Heer J. J. VAN LOGHEM, dat hij wegens ambtsbezigheden verhinderd is het secretariaat der commissie verder waar te nemen. In zijn plaats is tot secretaris benoemd de Heer A. J. KLUYVER te Delft, terwijl als voorman der sectie Bodemkunde is toegetreden de Heer D. J. HISSINK te Groningen.

Alsnu geeft de Voorzitter het woord aan den Heer H. A. BROUWER ten einde eenige mededeelingen te doen over het door hem, als vertegenwoordiger der Akademie, bijgewoonde tweede „Pan Pacific Science Congress", gehouden te Melbourne en Sydney in Augustus en September 1923.

Van dit congres, dat ongeveer vier weken duurde, werd het eerste gedeelte in Melbourne, het tweede in Sydney gehouden. Deze splitsing was noodig gebleken om de noodzakelijke samenwerking tusschen de beide voornaamste staten New South Wales en Victoria te verkrijgen.

Van de talrijke onderwerpen, welke in behandeling werden genomen, kunnen de volgende worden genoemd: de cartographie der landen rondom den Pacifischen Oceaan, weervoorspelling op langen termijn, irrigatie en haar invloed op den regenval, de mogelijkheid van blanke kolonisatie in de tropen (white settlement), ertsprovincies, de structuur van het Pacifische bekken, het ontstaan van koraalriffen, de aanwezige voorraden grondwater en aardolie, het voorspellen van aardbevingen, aardmagnetisme, isostasie, horizontale bewegingen der aardkorst, nauwkeurige lengtebepalingen met behulp van draadlooze tijdseinen, het onderzoek van het Great Barrier Reef, planten-geographische vraagstukken met betrekking tot de verbreiding der Australische flora, vegetatie der regenarme gebieden, coöperatie bij het onderzoek der ziekten van planten en dieren, het uitsterven der inlandsche bevolking in het Pacifische gebied, verbreiding van insecten in verband met ziekten, het verband tusschen klimaat en werkkracht. Behalve deze in de secties gediscussieerde onderwerpen werden voordrachten over verschillende andere onderwerpen gehouden. Een belangrijk onderdeel van het congres waren de excursies.

Kortere excursies vonden voor verschillende secties afzonderlijk plaats in de nabij Melbourne en Sydney gelegen gedeelten van Victoria en New South Wales, langere excursies waren die naar het Great Barrier Reef, naar Broken Hill, naar de Northern Rivers en dwars door Australië van Sydney naar Perth.

De Heer COHEN houdt hierna, mede namens den Heer J. KOOY, een voordracht over: „*Phasenverandering door druk*".

(Deze mededeeling zal in het volgend Zittingsverslag verschijnen).

Vervolgens spreekt de Heer L. E. J. BROUWER over: „*Intuïtionistische splitsing van mathematische grondbegrippen*". (Zie blz. 877).

Naar aanleiding hiervan stelt de Heer KLUYVER eenige vragen welke door den spreker worden beantwoord.

Ten slotte doet de Heer DUBOIS eene mededeeling over: „*De onderkaak en het gebit van Pithecanthropus erectus*".

(Deze mededeeling zal in een volgend Zittingsverslag verschijnen).

De Heer P. ZEEMAN brengt, mede namens de Heeren H. KAMERLINGH ONNES, H. HAGA, W. H. JULIUS, P. EHRENFEST en W. J. DE HAAS, het volgende rapport uit:

Aan de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Kon. Akademie van Wetenschappen.

In onze handen werd gesteld een brief van den Voorzitter van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging, gericht aan ons medelid, den Heer LORENTZ, waarin wordt medegedeeld, dat deze Vereeniging in hare vergadering van 29 September l.l. heeft gemeend niet te kunnen deelnemen aan de „Union Internationale de Physique", aangezien er bij haar bezwaren gerezen waren tegen art. 2 der ontwerp-statuten Dit artikel bepaalt namelijk dat aan die „Union" alleen kunnen deelnemen landen, die toegang hebben tot den „Conseil International de Recherches".

Verder een schrijven van den vice-Voorzitter van de „Union Internationale de Physique" van 23 October l.l. aan den Secretaris dezer

Afdeeling, waarin ten spoedigste mededeeling wordt gevraagd van de namen der geleerden, die als officieele vertegenwoordigers van de organisaties, die bij de „Union" zijn aangesloten en van de natuurkundigen, die de bijeenkomst der „Union", welke ongeveer midden December gehouden zal worden, zullen bijwonen.

Uit de bij den brief van de Nederl. Natuurk. Vereeniging gevoegde stukken blijkt nader, dat op eene vraag van deze Vereeniging betreffende de toelating ook van andere landen, door den Secretaris van de „Union Internationale de Physique" is geantwoord, dat omtrent deze kwestie slechts kan beslist worden door de Algemeene Vergadering van den „Conseil International de Recherches" en deze Vergadering zal eerst over twee jaren plaats hebben. De Secretaris spreekt de hoop uit, dat dan deze vraag kan behandeld worden zonder andere zaken dan het belang der Natuurkunde in het oog te houden.

Uwe Commissie betreurt, dat het nog steeds niet tot eene algemeene samenwerking der natiën op het gebied van het wetenschappelijk onderzoek, gelijk vóór den grooten oorlog bestond, is gekomen. Het komt haar voor, dat men het best in de richting van het verkrijgen daarvan werkt door tot elk samenwerken met het buitenland op wetenschappelijk gebied gelijkelijk naar alle zijden de hand te reiken. Uwe Afdeeling zelf is bij den „Conseil International" aangesloten.

Nu gebleken is, dat de Nederl. Natuurk. Vereeniging niet als „Comité National" wenscht op te treden dient een andere weg gevonden te worden om tegemoet te komen aan het verlangen van de natuurkundigen, die wenschen dat er een Nederlandsch „Comité National" gevormd wordt.

De natuurkundige leden van Uwe Afdeeling hebben zich, de wenschelijkheid om voor verzoening te werken op den voorgrond stellende, bereid verklaard daartoe, mede door assumptie van natuurkundigen buiten de Akademie als leden of donateurs, eene *organisatie* te vormen, naar zij hopen van zeer tijdelijken aard, ten einde, waar dit van haar gewenscht mocht worden, de samenwerking met het buitenland te behartigen, totdat algemeene samenwerking weder zal zijn verkregen. Deze organisatie stelt zich voor niet alleen de samenwerking op het gebied der physica met de in de „Union" vereenigde, maar ook met andere landen te behartigen, en waar zich de gelegenheid mocht voordoen, als middenpersoon op te treden.

Uwe Commissie stelt U voor aan de „Union Internationale de Physique" mede te deelen, dat deze *Organisatie voor samenwerking op physisch gebied met het buitenland* als „Comité National" zal optreden. De Heeren LORENTZ en ZEEMAN hebben zich bereid verklaard

dit „Comité National" te vertegenwoordigen, terwijl de organisatie uit den aard der zaak de uit de toetreding tot de „Union" voor dit Comité voortvloeiende geldelijke verplichtingen op zich neemt.

H. KAMERLINGH ONNES
P. ZEEMAN
H. HAGA
W. H. JULIUS
P. EHRENFEST
W. J. DE HAAS

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusies van dit rapport.

Aan het Secretariaat van de „Union" zal worden medegedeeld dat een organisatie voor samenwerking op physisch gebied met het buitenland als „Comité national" voor Nederland zal optreden, en dat de Heeren LORENTZ en ZEEMAN dit Comité zullen vertegenwoordigen bij de algemeene vergadering van de „Union", welke den 10 December a.s. te Parijs zal worden gehouden.

Wiskunde. — L. E. J. BROUWER: „*Intuitionistische splitsing van mathematische grondbegrippen*".

§ 1. *Juistheidspraedicaten.*

De intuitionistische opvatting der wiskunde verwerpt niet alleen het principium tertii exclusi in zijn geheel, doch ook het bijzondere geval daarvan, dat in het beginsel der reciprociteit der complementairsoorten gelegen is, d. w. z. in het beginsel, dat voor een willekeurig wiskundig systeem uit de ongerijmdheid der ongerijmdheid eener eigenschap tot de juistheid dezer eigenschap concludeert.

Deze verwerping kan door het volgende voorbeeld worden aannemelijk gemaakt: Zij d_ν het ν^{de} cijfer achter de komma van de decimale ontwikkeling van π en $m = k_1$, als in de voortschrijdende decimale ontwikkeling van π bij d_m voor de eerste maal het verschijnsel optreedt, dat het gedeelte $d_m\, d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ dezer decimale ontwikkeling een sequentie 0123456789 vormt. Zij verder $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k_1}$, als $\nu \geq k_1$, en anders $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$, dan convergeert de reeks $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tot een reëel getal r.

Noemen we nu een reëel getal g rationaal, als men twee geheele rationale getallen p en q kan berekenen, wier quotient gelijk is aan g, dan is r niet rationaal, doch anderzijds kan de rationaliteit van r onmogelijk ongerijmd zijn; immers in dat geval zou k_1 onmogelijk kunnen bestaan, waaruit zou volgen $r = 0$, dus r rationaal.

Zeggen we verder, dat een reëel getal g met 0 vergelijkbaar is, als hetzij $g > 0$ hetzij $g \leq 0$ geldt, dan is r niet met 0 vergelijkbaar, doch anderzijds kan de vergelijkbaarheid van r met 0 onmogelijk ongerijmd zijn; immers dan zou in het bijzonder $r > 0$ ongerijmd zijn, waaruit zou volgen $r \leq 0$, dus r met 0 vergelijkbaar.

De klassieke opvatting postuleert voor iedere eigenschap het alternatief van juistheid of ongerijmdheid, en derhalve de aequivalentie van juistheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid. Voor de intuitionistische opvatting is ongerijmdheid van ongerijmdheid weliswaar een gevolg van juistheid, doch niet met juistheid aequivalent, terwijl het alternatief van ongerijmdheid of ongerijmdheid van ongerijmdheid evenmin wordt erkend als dat van juistheid of ongerijmdheid.

Een sequentie van n ongerijmdheidspraedicaten: „ongerijmdheid van ongerijmdheid van .... van ongerijmdheid" kan volgens de klassieke opvatting door herhaalde schrapping telkens van twee op

elkaar volgende dezer praedicaten hetzij tot ongerijmdheid, hetzij tot juistheid worden herleid. Men zou nu een oogenblik kunnen meenen, dat voor de intuitionistische opvatting dergelijke schrappingen geheel zijn uitgesloten, en dat dientengevolge sequenties van ongerijmdheidspraedicaten van verschillend aantal steeds ongelijkwaardig zouden moeten zijn. Dit is echter niet het geval; integendeel zijn de bedoelde schrappingen ook voor de intuitionistische opvatting geoorloofd, *mits het laatste ongerijmdheidspraedicaat der sequentie er van uitgesloten blijve*, en wel op grond van de volgende

STELLING. *Ongerijmdheid van ongerijmdheid van ongerijmdheid is aequivalent met ongerijmdheid.*

BEWIJS. *a.* Wanneer de eigenschap y volgt uit de eigenschap x, volgt uit de ongerijmdheid van y de ongerijmdheid van x. Derhalve moet, daar uit juistheid ongerijmdheid van ongerijmdheid volgt, *uit ongerijmdheid van ongerijmdheid van ongerijmdheid, ongerijmdheid volgen.*

b. Daar uit de juistheid eener eigenschap de ongerijmdheid van ongerijmdheid dezer eigenschap volgt, moet in het bijzonder uit juistheid van ongerijmdheid, d. w. z. *uit ongerijmdheid, ongerijmdheid van ongerijmdheid van ongerijmdheid volgen.*

Voor de intuitionistische opvatting is op grond van deze stelling een eindige sequentie van ongerijmdheidspraedicaten te herleiden hetzij tot *ongerijmdheid van ongerijmdheid*, hetzij tot *ongerijmdheid.*

§ 2. *Vlakke versmeltingsrelaties van twee punten* [1]).

Grondrelaties zijn hier *samenvalling* en *verwijdering.*

Twee punten P_1 en P_2 *vallen samen*, als in ieder kwadraat van P_1 een kwadraat van P_2 en in ieder kwadraat van P_2 een kwadraat van P_1 bevat is [1]).

Twee punten P_1 en P_2 liggen *van elkaar verwijderd* (of zijn *plaatselijk verschillend*), als een kwadraat van P_1 en een kwadraat van P_2 kunnen worden aangewezen, die buiten elkaar liggen [1]).

Onderwerpen we de samenvallingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan ontstaat alleen in het eerste geval een nieuwe relatie, die we de *afwijkingsrelatie* noemen; in het tweede geval vinden we de samenvallingsrelatie terug.

Onderwerpen we de verwijderingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan vinden we

[1]) Voor de definitie van een punt van het vlak vgl. Verhandelingen dezer Akademie, 1e sectie, XII, 7. p. 3, waar eveneens samenvallende en plaatselijk verschillende punten gedefinieerd zijn.

in het eerste geval de samenvallingsrelatie, in het tweede geval de afwijkingsrelatie terug.

Maken we gebruik van de teekens $a \longleftrightarrow b$ (d. w. z. a en b zijn contradictoor) en $a \rightarrow b$ (d. w. z. b volgt uit a), welke teekens de eigenschappen bezitten, dat uit $a \rightarrow b$ en $b \longleftrightarrow c$ volgt $a \longleftrightarrow c$ en uit $a \rightarrow b$ en $b \rightarrow c$ volgt $a \rightarrow c$, dan kan het logisch verband tusschen de hier verkregen drie vlakke versmeltingsrelaties van twee punten aldus worden uitgedrukt:

samenvalling ⟷ afwijking ⟵ verwijdering

§ 3. *Vlakke inhullingsrelaties van een punt en een puntsoort.*

Grondrelaties zijn hier *inhulling* en *verwijdering.*

Een punt P is in een puntsoort Q *ingehuld,* als het met een punt van Q samenvalt.

Een punt P ligt van een puntsoort Q *verwijderd,* als het van elk punt van Q verwijderd is.

Onderwerpen we de inhullingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan komen twee nieuwe relaties, die we achtereenvolgens de *afwijkingsrelatie* en de *aansluitingsrelatie* noemen.

Onderwerpen we de verwijderingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan komen twee nieuwe relaties, die we achtereenvolgens de *aanleuningsrelatie* en de *afscheidingsrelatie* noemen.

Het logisch verband tusschen de aldus verkregen zes vlakke inhullingsrelaties van een punt en een puntsoort kan aldus worden uitgedrukt:

inhulling ⟶ aansluiting ⟷ afwijking

verwijdering ⟶ afscheiding ⟷ aanleuning

(met gekruiste pijlen: afscheiding ⟶ afwijking en aansluiting ⟶ aanleuning)

Volgens het bovenstaande kan een reëel getal op drie manieren „rationaal" zijn, al naarmate het door de verzameling der rationale getallen wordt ingehuld of daartegen aansluit of aanleunt [1]); en op drie manieren „irrationaal", al naarmate het van de verzameling der rationale getallen verwijderd of afgescheiden ligt of daarvan afwijkt.

[1]) In het bijzonder sluit het in § 1 gedefinieerde reëele getal r tegen de verzameling der rationale getallen aan, zonder daardoor te worden ingehuld.

§ 4. *Vlakke versmeltingsrelaties van twee puntsoorten.*

Grondrelaties zijn hier *samenvalling*, *afwijking* en *verwijdering*.

Twee puntsoorten Q en R *vallen samen*, als elk punt van Q met een punt van R en elk punt van R met een punt van Q samenvalt.

Twee puntsoorten Q en R *wijken van elkaar af*, als een der puntsoorten een punt bevat, dat van de andere puntsoort afwijkt.

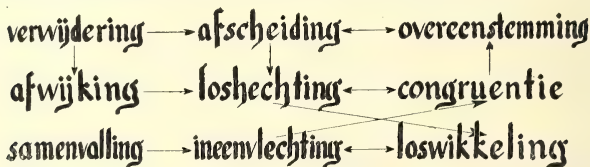
Twee puntsoorten Q en R liggen *van elkaar verwijderd*, als een der puntsoorten een punt bevat, dat van de andere puntsoort verwijderd ligt.

Onderwerpen we de samenvallingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan komen twee nieuwe relaties, die we achtereenvolgens de *loswikkelingsrelatie* en de *ineenvlechtingsrelatie* noemen.

Onderwerpen we de afwijkingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan komen twee nieuwe relaties, die we achtereenvolgens de (plaatselijke) *congruentierelatie* [1]) en de *loshechtingsrelatie* noemen.

Onderwerpen we de verwijderingsrelatie aan de praedicaten van ongerijmdheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid, dan komen twee nieuwe relaties, die we achtereenvolgens de (plaatselijke) *overeenstemmingsrelatie* [1]) en de *afscheidingsrelatie* [2]) noemen.

Het logisch verband tusschen de negen vlakke versmeltingsrelaties van twee puntsoorten kan aldus worden uitgedrukt:



[1]) Vgl. l. c. p. 6. Zij A de verzameling der rationale getallen; B de verzameling der reëele getallen $r+s$, waar r hetzelfde getal, als in § 1, en s een willekeurig rationaal getal voorstelt; C de soort der reëele getallen; D de soort der negatief irrationale (d. w. z. van A afwijkende) getallen; E de soort der positief irrationale (d. w z. van A verwijderde) getallen; F de vereeniging van A en D; G de vereeniging van A en E. Dan zijn A en B ineengevlochten, zonder samen te vallen; C en F zijn congruent, doch niet ineengevlochten; C en G stemmen overeen, zonder congruent te zijn.

[2]) Zij U de verzameling der geheele positieve getallen; V de verzameling der getallen $t_1, t_2, t_3, \ldots$, waarin $t_n = (n-k_1+1)\,2$, als $n \geq k_1$, en anders $t_n = 2n-1$. Dan bestaat tusschen U en V de afscheidingsrelatie, doch niet de afwijkingsrelatie.

Wiskunde. — L. E. J. BROUWER: *„Over het natuurlijke dimensiebegrip"* [1]).

Op grond van de invariantie van het dimensie-aantal [2]) kan het dimensie-aantal eener ruimte [3]) worden gedefinieerd als het aantal parameters, waardoor de ruimte in de omgeving van een willekeurig binnen haar gekozen punt eeneenduidig en continu kan worden voorgesteld. Deze „arithmetische" definitie houdt evenwel, naar POINCARÉ [4]) heeft opgemerkt, onvoldoende rekening met onze intuïtieve ruimteaanschouwing. POINCARÉ verlangt derhalve een recurrente definitie van den volgenden aard [5]):

„Een continuum worde n-dimensionaal genoemd, als men het door een of meer (n—1)-dimensionale continua in gescheiden stukken kan verdeelen."

Ofschoon de n-dimensionale stelling van JORDAN [6]) wijst op de mogelijkheid eener dergelijke definitie, kan ze toch in den aangehaalden vorm niet gehandhaafd blijven.

Ten eerste moet worden opgemerkt, dat het woord *„continuum"* hier zeker niet in den zin van *„ruimte"* mag worden opgevat; in dat geval zou namelijk de definitie eerst bruikbaar worden na het totstandkomen eener van de parametervoorstelling onafhankelijke karakteriseering der ruimten onder de abstracte verzamelingen. Daar echter dit laatste totnogtoe niet gelukt is, zou aan de aangehaalde definitie van POINCARÉ een of andere algemeene abstracte karakteriseering van een continuum moeten worden ten grondslag gelegd,

---

[1]) Behoudens den inhoud van noot [19]) en behoudens de in noot [11]) aangegeven correctie vormt deze mededeeling een getrouwe vertaling mijner in 1913 in het Journal für die reine und angewandte Mathematik (dl. 142, p. 146—152) onder denzelfden titel verschenen verhandeling.

[2]) Vgl. mijn bewijs in Math. Annalen 70, p. 161—165 en de daaraan aansluitende ontwikkelingen van LEBESGUE in C. R., 27 mars 1911.

[3]) Voor de definitie eener ruimte („Mannigfaltigkeit") vgl. Math. Annalen 71, p. 97.

[4]) Revue de métaphysique et de morale, 1912, p. 486, 487.

[5]) l. c. p. 488.

[6]) Vgl. het ten deele door LEBESGUE, ten deele door mij geleverde bewijs in C. R., 27 mars 1911, en Math. Annalen 71, p. 305—319.

b.v. deze: „*Een normale verzameling* (in den zin van FRÉCHET) π *worde een continuum genoemd, als voor twee willekeurige harer elementen* m_1 *en* m_2 *een samenhangende afgesloten*[7]) *verzameling bestaat, die een deelverzameling van* π *is en* m_1 *en* m_2 *bevat*"[8]). Voor zulke algemeenere continua, die geen ruimten zijn, zou echter onze definitie tot moeilijkheden voeren; zoo zou men b.v. aan een kegel der Cartesische ruimte, die zich immers door een enkel punt in twee gescheiden stukken laat verdeelen, slechts *éene* dimensie mogen toekennen.

Ook de woorden „*een of meer*" kunnen niet onveranderd behouden blijven, daar meerdere m-dimensionale ruimten tezamen een $(m+p)$-dimensionale ruimte kunnen vormen.

Al deze gebreken kunnen nu worden verholpen, door in de eerste plaats de recurrente definitie van POINCARÉ als volgt te wijzigen:

Zij π een willekeurige normale verzameling[9]), π_1, ϱ en ϱ' drie deelverzamelingen van π, die binnen π afgesloten[10]) zijn en geen gemeenschappelijke punten bezitten. Dan zullen we zeggen, dat ϱ en ϱ' *in* π *door* π_1 *gescheiden worden*, als π_1 in π een ϱ bevattende, doch ϱ' niet bevattende gebiedsverzameling g bepaalt[11]). Met de uitdrukking: „π *bezit den algemeenen dimensiegraad* n", waarin n een willekeurig natuurlijk getal voorstelt, zal nu worden bedoeld, dat voor iedere keus van ϱ en ϱ' een scheidende verzameling π_1 bestaat, die den algemeenen dimensiegraad $n-1$ bezit, dat echter

[7]) Onder een *afgesloten* verzameling verstaan we hier een haar grenselementen bevattende verzameling, waarin iedere oneindige reeks van elementen ten minste één grenselement bezit.

[8]) Deze definitie is opgesteld naar het voorbeeld van die van SCHOENFLIES voor continua der n-dimensionale ruimte (vgl. Bericht über die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, dl. II, p. 117).

[9]) De vraag, in hoeverre de definitie van den tekst ook voor verzamelingen van algemeeneren aard een natuurlijke beteekenis behoudt, blijft hier buiten beschouwing.

[10]) Hiermede wordt bedoeld, dat π_1, ρ en ρ' al hun in π gelegen grenspunten bevatten.

[11]) Aan deze aan g gestelde eischen kunnen natuurlijk meerdere gebiedsverzamelingen van π voldoen. In het in [1]) geciteerde origineel is te dezer plaatse een andere, met den overigen inhoud van het opstel geenerlei verband houdende scheidingsdefinitie ingeslopen. Dat de bovenstaande (gebruikelijke) definitie de aan het vervolg der verhandeling in werkelijkheid ten grondslag liggende is, volgt uit den samenhang, in het bijzonder uit noot [16]) en den daarbij behoorenden passus van den tekst, aangezien de aldaar bedoelde, in τ_1 door π_2 bepaalde, aan de ribbe E_1E_2 grenzende gebiedsverzameling geen andere beteekenis kan hebben, dan die van doorsnede met τ_1 van een reeds aanwezige in π_1 door π_2 bepaalde, aan E_1E_2 grenzende, doch aan $E_1E_3 \ldots E_{n+1}$ niet grenzende gebiedsverzameling. Op de correctie, die hier was aan te brengen, ben ik door den Heer P. URYSOHN te Moskau opmerkzaam gemaakt.

niet voor iedere keus van ϱ en ϱ' een scheidende verzameling π_1 bestaat, die een geringeren algemeenen dimensiegraad, dan $n-1$ bezit. Verder zal met de uitdrukking: „*π bezit den algemeenen dimensiegraad nul, resp. een oneindigen algemeenen dimensiegraad*" worden bedoeld, dat π geen continuum als deel bevat, resp. dat bij π nòch het getal nul, nòch eenig natuurlijk getal als algemeene dimensiegraad kan worden gevonden[12]).

Aan deze definitie kan gemakkelijk een van de recurrentie onafhankelijke vorm worden gegeven. Daartoe denken wij ons, dat de verzameling π door twee personen A en B aan de „*dimensieoperatie*" wordt onderworpen, waaronder wij het volgende verstaan: A kiest in π naar willekeur twee binnen π afgesloten deelverzamelingen ϱ en ϱ', waarop B ϱ en ϱ' in π scheidt door middel van een binnen π afgesloten verzameling π_1. Vervolgens kiest A in π_1 naar willekeur twee binnen π_1 afgesloten deelverzamelingen ϱ_1 en ϱ'_1, waarop B ϱ_1 en ϱ'_1 in π_1 scheidt door middel van een binnen π_1 afgesloten verzameling π_2. Dit proces wordt onbeperkt herhaald, totdat eventueel een verzameling π_h optreedt, die geen continuum meer als deel bevat. Indien eenerzijds B onafhankelijk van de keuzen der ϱ_ν en ϱ'_ν er voor kan zorgen, dat een verzameling π_h met een $h \leq n$ optreedt, en anderzijds A onafhankelijk van de keuzen der π_ν er voor kan zorgen, dat *geen* verzameling π_h met een $h < n$ optreedt, dan zullen we zeggen, dat π *den algemeenen dimensiegraad n bezit.* Indien daarentegen geen natuurlijk getal n bestaat met de eigenschap, dat B onafhankelijk van de keuzen der ϱ_ν en ϱ'_ν er voor kan zorgen, dat een verzameling π_h met een $h \leq n$ optreedt, dan zullen we zeggen, dat π *een oneindigen algemeenen dimensiegraad bezit.*

Wanneer bij een punt P van π omgevingen met den algemeenen dimensiegraad m, doch geen omgevingen met een kleineren algemeenen dimensiegraad bestaan, zullen we zeggen, dat π *in P den dimensiegraad m bezit.* In verschillende punten kan een verzameling verschillende dimensiegraden bezitten; doch geen van deze kan den algemeenen dimensiegraad der verzameling overtreffen. Indien in ieder punt der verzameling de dimensiegraad gelijk is aan den algemeenen dimensiegraad der verzameling, zullen we zeggen, dat de verzameling *een homogenen dimensiegraad bezit.*

Dat met de bovenstaande definities het door POINCARÉ verlangde natuurlijke dimensiebegrip is verkregen, blijkt uit de volgende

---

[12]) Volgens deze definitie wordt zoowel voor de R_ω van HILBERT, als voor die van FRÉCHET een oneindige algemeene dimensiegraad gevonden.

Dimensiestelling. *Een n-dimensionale ruimte bezit den homogenen dimensiegraad n.* [13])

Om deze stelling te bewijzen, laten we in de eerste plaats zien, dat bij de dimensieoperatie B er voor kan zorgen, dat $h \leq n$. Daartoe construeert B, nadat A de verzamelingen ϱ en ϱ' heeft bepaald, een simpliciale verdeeling [14]) ζ van π, en wel op zoodanige wijze, dat, als we onder een ${}_{\pi}s_{\varrho}$ resp. ${}_{\pi}s_{\varrho'}$ een grondsimplex van ζ verstaan, dat in zijn binnenste of op zijn grens punten van ϱ resp. ϱ' bevat, het niet voorkomt, dat een ${}_{\pi}s_{\varrho}$ en een ${}_{\pi}s_{\varrho'}$ samenvallen of aan elkaar grenzen. Dan vormen de $(n-1)$-dimensionale zijden der ${}_{\pi}s_{\varrho}$, voorzoover ze nòch in hun binnenste nòch op hun grens punten van ϱ bevatten, een systeem van tweezijdige $(n-1)$-dimensionale pseudoruimten [15]), waarin overigens meerdere elementen of elementzijden kunnen samenvallen. De door deze pseudoruimten gevormde puntverzameling kiest B als π_1. Zoo A daarop de verzamelingen ϱ_1 en ϱ'_1 in hetzelfde deelcontinuum van π_1 kiest, construeert B een zoodanige simpliciale verdeeling van π_1, waarbij het niet voorkomt, dat een ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1}$ en een ${}_{\pi_1}s_{\varrho'_1}$ samenvallen of aan elkaar grenzen. Dan vormen de $(n-2)$-dimensionale zijden der ${}_{\pi_1}s_{\varrho_1}$, voorzoover ze nòch in hun binnenste nòch op hun grens punten van ϱ_1 bevatten, een systeem van tweezijdige $(n-2)$-dimensionale pseudoruimten, waarin overigens weer meerdere elementen of elementzijden kunnen samenvallen. De door deze pseudoruimten gevormde puntverzameling kiest B als π_2. Op deze wijze voortgaande, komt B ten slotte tot een verzameling π_n, die geen continuum meer als deel bevat, tenzij het proces reeds eerder daardoor mocht afloopen, dat A eens ϱ_ν en ϱ'_ν niet in hetzelfde deelcontinuum van π_ν kiest.

In de tweede plaats toonen we aan, dat bij de dimensieoperatie A er voor kan zorgen, dat h niet kleiner dan n uitvalt. Daartoe kiest A in π van een n-dimensionaal element $E_1 E_2 \ldots E_{n+1}$ het punt E_1 als ϱ en de $(n-1)$-dimensionale zijde $E_2 \ldots E_{n+1}$ als ϱ'; het tot de elementzijde $E_1 E_2$ resp. $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$ behoorende deel van π_1 als ϱ_1 resp. ϱ'_1; het tot de elementzijde $E_1 E_2 E_3$ resp. $E_1 E_2 E_4 \ldots E_{n+1}$ behoorende deel van π_2 als ϱ_2 resp. ϱ'_2; enzoovoort. Om te bewijzen, dat geen der puntverzamelingen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ kan wegvallen, stellen we het uitgangselement $E_1 E_2 \ldots E_{n+1}$ voor door τ; de grens van het door π_1 in τ bepaalde, aan het punt E_1 grenzende gebied g door τ_1; de grens van de door π_2 in τ_1 bepaalde,

[13]) Daar de dimensiegraad blijkbaar een invariant der analysis situs is, impliceert de dimensiestelling de invariantie van het dimensie-aantal.

[14]) Math. Annalen 71, p. 101.

[15]) l. c. p. 305.

aan de ribbe $E_1 E_2$ grenzende gebiedsverzameling[16]) g_1 door τ_2; de grens van de door π_3 in r_2 bepaalde, aan de tweedimensionale zijde $E_1 E_2 E_3$ grenzende gebiedsverzameling g_2 door τ_3; enzoovoort. We construeeren nu in τ een simpliciale verdeeling met de dichtheid ε[17]), stellen het n-dimensionale fragment[18]), dat door de inclusief hun grens tot g behoorende grondsimplexen wordt gevormd, voor door γ; het *binnen* τ gelegen deel der ingevolge het voorgaande eveneens simpliciaal verdeelde grens van γ door σ_1; het maximum der afstanden, die de punten van σ_1 van τ_1 bezitten, door ε_1; het $(n-1)$-dimensionale fragment, dat door de grondsimplexen van σ_1, voorzoover ze een afstand $\leq \varepsilon_1$ van g_1 bezitten, wordt gevormd, door γ_1; het *binnen* σ_1 gelegen deel der grens van γ_1 door σ_2; het maximum der afstanden, die de punten van σ_2 van τ_2 bezitten, door ε_2; enzoovoort. Dan convergeeren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ met ε tot nul, zoodat het eventueele bestaan van $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ dat van $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$, derhalve ook dat van $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$, waarin immers achtereenvolgens $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ als deelverzamelingen bevat zijn, zal moeten tengevolge hebben.

Hiermede is de dimensiestelling teruggebracht tot de volgende

Hulpstelling. *Zij σ een simpliciaal verdeeld n-dimensionaal element met de hoekpunten $E_1, E_2, \ldots E_{n+1}$; γ een uit grondsimplexen van σ gevormd fragment, dat alle aan E_1, doch geen aan $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ grenzend grondsimplex van σ bevat; σ_1 het binnen σ liggende deel der grens van γ; γ_1 een uit grondsimplexen van σ_1 gevormd fragment, dat alle aan $E_1 E_2$, doch geen aan $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$ grenzend grondsimplex van σ_1 bevat; σ_2 het binnen σ_1 liggende deel der grens van γ_1; γ_2 een uit grondsimplexen van σ_2 gevormd fragment, dat alle aan $E_1 E_2 E_3$, doch geen aan $E_1 E_2 E_4 \ldots E_{n+1}$ grenzend grondsimplex van σ_2 bevat; σ_3 het binnen σ_2 liggende deel der grens van γ_2; enzoovoort. Dan kan geen der puntverzamelingen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$ wegvallen.*

Deze hulpstelling, waartoe LEBESGUE in Math. Annalen 70 de invariantie van het dimensie-aantal heeft teruggebracht, waarvan het aldaar gegeven bewijs echter een essentieele lacune vertoont[19]), is

---

[16]) Onder een in τ_ν gelegen gebiedsverzameling verstaan we een in τ_ν gelegen puntverzameling, waarvan geen punt grenspunt der door haar in τ_ν bepaalde complementairverzameling is.

[17]) Math. Annalen 71, p. 101.

[18]) l.c. p. 306.

[19]) De „faits bien évidents", waarop dit bewijs zich (op p. 167) beroept, zijn n.l. onjuist, en vormen, als ze in een juisten vorm worden gebracht, een eigenschap, die moeilijker bewijsbaar is, dan de hulpstelling zelf. Na (in 1911) op deze vergissing te zijn gewezen, deelde de Heer LEBESGUE mij zijn voornemen mede, binnenkort in het Bull. de la Soc. Math. de France een nieuw bewijs der hulpstelling te zullen geven, daarbij tevens de hoofdtrekken van dit nieuwe bewijs uiteenzettende. Ofschoon

onmiddellijk af te leiden, als men gebruik maakt van het in Math. Annalen 71 door mij ingevoerde begrip van den *afbeeldingsgraad*[20]).

De eigenschap, dat de projectie van σ_ν uit de elementzijde $E_1 E_2 \ldots E_\nu$ de elementzijde $E_{\nu+1} E_{\nu+2} \ldots E_{n+1}$ met den graad 1 bedekt, laat zich namelijk van ν tot $\nu+1$ uitbreiden, als we er eerst uit afleiden, dat de projectie van het in de elementzijde $E_1 \ldots E_\nu E_{\nu+2} \ldots E_{n+1}$ liggende deel der grens van σ_ν uit de elementzijde $E_1 \ldots E_\nu$ of uit de elementzijde $E_1 \ldots E_{\nu+1}$ de elementzijde $E_{\nu+2} \ldots E_{n+1}$ met den graad 1 bedekt, en vervolgens σ_ν door herhaalde wegneming telkens van één van zijn grondsimplexen stuk voor stuk tot γ_ν reduceeren, waarbij het in de elementzijde $E_1 \ldots E_\nu E_{\nu+2} \ldots E_{n+1}$ liggende deel der grens van σ_ν geleidelijk in $\sigma_{\nu+1}$ overgaat en de bijbehoorende projectiegraad op $E_{\nu+2} \ldots E_{n+1}$ gedurende dien overgang niet kan veranderen. Daar derhalve σ_ν voor $1 \leq \nu \leq n$ met den graad 1 op een $(n-\nu)$-dimensionale zijde van σ geprojecteerd ligt, kan geen der σ_ν wegvallen, w. t. b. w.

---

deze uiteenzettingen mij niet bevredigden, meende ik in het in [1]) geciteerde origineel niettemin naar de door den Heer Lebesgue toegezegde publicatie te moeten verwijzen. Ze is echter uitgebleven, en de Heer Lebesgue heeft zich eerst in Fundamenta Mathematicae, dl. 2 (1921), p. 256—285 opnieuw met het onderwerp beziggehouden, en een steekhoudend bewijs der hulpstelling gegeven, dat, wat den kern betreft, met mijn bovenstaand bewijs van 1913 overeenstemt, doch daarvan in de details door noodelooze complicaties afwijkt.

[20]) Vgl. aldaar p. 105.

Wiskunde. — R. WEITZENBÖCK: *„Over invarianten van bilineaire vormen"*.

(Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES).

In de theorie der eindige discrete groepen geldt de volgende stelling[1]): Voor de aequivalentie van twee groepen is de gelijkheid van de karaktersystemen noodig en voldoende. Van deze stelling geven wij hier een nieuw bewijs, gebruikmakende van de theorie der affine invarianten van de aan de afzonderlijke substituties van een groep Γ toegevoegde bilineaire vormen. In het bijzonder laten wij zien, dat de karakters van de substituties van Γ de eenige invarianten dezer bilineaire vormen zijn.

§ 1. *Terminologie.*

Zij $\Gamma = E, A, B, \ldots\ldots$ een eindige groep van de orde μ van n-dimensionale lineair-homogene substituties

$$(A) \quad \bar{x}_i = a_i^1\, x_1 + a_i^2\, x_2 + \ldots\ldots + a_i^n\, x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Zij E met $e_i^i = 1,\ e_i^k = 0\ (i \neq k)$ de éénheids-substitutie; $a = |a_i^k|$ zij de determinant van de matrix $\|a_i^k\|$ van A. $a, b, \ldots$ zijn μ-de éénheidswortels.

In plaats van (1) schrijven wij ook korter

$$(A) \quad \bar{x}_i = a_i^\lambda\, x_\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

of, symbolisch, $a_i^k = a_i a'_k$ stellende:

$$\bar{x}_i = a_i (a' x). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aan de substitutie A is toegevoegd de n-dimensionale bilineaire vorm

$$L_A = a_i^k\, x_k\, u^i = (a' x)(au'), \qquad L_E = x_i u^i = (u' x). \quad \ldots \quad (4)$$

De meest eenvoudige absolute invariant hiervan

$$\chi(A) = \sum_i a_i^i = (a' a) = a_1^1 + a_2^2 = \ldots\ldots + a_n^n. \quad \ldots \quad (5)$$

[1]) Zie b.v. H. F. BLICHFELD, Finite Collineation Groups, Chicago (1917), p. 129 of: A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), p. 116.

noemt men het karakter van A. $\chi(E)=n$, $\chi(A),\ldots$ vormen het karaktersysteem van de groep Γ.

De met A inverse substitutie A^{-1} verkrijgen wij door (2) naar de x_i op te lossen. Stellen wij A^i_k gelijk aan den door a gedeelden minor van a^k_i uit a (verwisseling der positie van de indices!), dan hebben wij:

$$(A^{-1})\quad x_i = A^\lambda_i \overline{x}_\lambda \quad [A^\lambda_i a^\varkappa_\lambda = e^\varkappa_i\ ,\ A^i_\lambda a^\lambda_\varkappa = e^i_\varkappa]. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De met A getransponeerde substitutie A' wordt gegeven door

$$(A')\quad u^i = a^i_\lambda \overline{u}^\lambda; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

de inverse hiervan is $A_t=(A')^{-1}$ en wordt voorgesteld door

$$(A_t)\quad \overline{u}^i = A^i_\lambda u^\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

A_t noemt men de met A contragrediente substitutie. Volgens (6) is:

$$A_t=(A^{-1})'=(A')^{-1}\quad ,\quad (A_t)_t = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

x_i en u^i zijn contragredient met elkaar. De met Γ homomorphe groep $\Gamma_t = E, A_t B_t, \ldots$ noemt men de met Γ contragrediente groep. Het is gemakkelijk te bewijzen [1]), dat $\chi(A_t)$ het aan $\chi(A)$ toegevoegd-complexe getal is.

Analoog met (8) en (4) is

$$L_{A_t} = A^i_k x_i u^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

de met L_A contragrediënte bilineaire vorm; symbolisch kan hij worden voorgesteld — als $a_1, a_2, \ldots$ en $a'_1, a'_2 \ldots$ aequivalente symboolrijen zijn — door

$$L_{A_t} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x)(a'_1 a'_2 \ldots a'_{n-1} u') \quad . \quad (11)$$

De determinant a is symbolisch gegeven door:

$$a = \frac{1}{n!}(a_1 a_2 \ldots a_n)(a'_1 a'_2 \ldots a'_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Aan het product $AB=C$ van twee substituties A en B is toegevoegd de bilineaire vorm

$$L_{AB} = a^\lambda_i b^k_\lambda x_k u^i = (u' a)(a' b)(b' x) = c^k_i x_k u^i\ , \quad . \quad . \quad (13)$$

daarentegen aan BA:

$$L_{BA} = b^\lambda_i a^k_\lambda x_k u^i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

---

[1]) SPEISER, l.c. p. 110.

Omdat $A, B, \ldots$ een groep vormen, komt ieder conglomeraat

$$a_i^{\lambda}\, b_{\lambda}^{\mu}\, c_{\mu}^{\nu} \ldots . g_{\rho}^{k} = h_i^{k} \qquad \ldots \ldots \qquad (15)$$

op een enkele substitutie H neer.

§ 2. *Het volle Comitantensysteem.*

Wij gaan nu een volledig systeem van affine Comitanten van de bilineaire vormen (4) opbouwen en beperken ons daarbij tot Comitanten die naast de coëfficienten dezer bilineaire vormen slechts één rij x en één rij u bevatten.

Beschikbaar zijn dan de volgende rijen:

$$a_1, a_2, \ldots, x \quad \text{en} \quad a'_1, a'_2, \ldots, u', \qquad \ldots \ldots \qquad (16)$$

waarbij $(a_i)_r\,(a'_i)_s = a_r^s$ van een willekeurige van de vormen (4) afkomstig is. Uit (16) vormen wij nu: 1°. factoren van de tweede soort:

$$\varphi_1 = (a_1 a_2 .. a_n),\ \varphi_2 = (a_1 a_2 .. a_{n-1} x);\ \psi_1 = (a'_1 a'_2 .. a'_n),\ \psi_2 = (a'_1 a'_2 .. a'_{n-1} u');\ (17)$$

2°. factoren van de eerste soort:

$$f_1 = (a_i\, a'_k),\ f_2 = (a\, u'),\ f_3 = (a'\, x),\ f_4 = (u'\, x). \quad \ldots \quad (18)$$

Iedere affine invariant J is een produkt van dergelijke factoren. Wij kunnen onderstellen, dat φ en ψ niet tegelijkertijd in J aanwezig zijn, want $\varphi\,.\,\psi$ kan wegens

$$(a_1\, a_2 \ldots . a_n)\,(a'_1\, a'_2 \ldots . a'_n) = \begin{vmatrix} (a_1\, a'_1) \ldots \ldots . (a_1\, a'_n) \\ \ldots \ldots \ldots \\ (a_n\, a'_1) \ldots \ldots . (a_n\, a'_n) \end{vmatrix} \qquad (19)$$

door factoren van de eerste soort worden uitgedrukt.

Stel nu, dat in J een factor φ bevat is: $J = (a_1\, a_2\, a_3 \ldots)\,.\,J'$. In J' gaan wij de a'_1 opsporen, die in een factor f bevat moet zijn: $J = (a_1\, a_2\, a_3 \ldots)\,(a'_1\, a_r)\,.\,J''$. In J'' zoeken wij a'_r en verkrijgen:

$$J = (a_1\, a_2\, a_3 \ldots)\,(a'_1\, a_r)\,(a'_r\, a\,) \ldots .$$

Dat gaat zoo door, totdat de keten $(a'_1\, a_r)\,(a'_r\, a_s)\,(a'_s\, a_t) \ldots .$ met een factor $(a'\, x)$ eindigt. Hetzelfde doen wij ten opzichte van $a_2, a_3, \ldots$ en verkrijgen:

$$J = (a_1\, a_2\, a_3 \ldots)\,\underbrace{(a'_1\, a_r) \ldots (a'_\rho\, x)}_{K_1}\,.\,\underbrace{(a'_2\, a_s) \ldots (a'_\sigma\, x)}_{K_2} \ldots \ldots \qquad (20)$$

De hier met $K_1, K_2, \ldots$ aangeduide ketens kunnen willekeurig lang zijn.

Een geheel analoge gedaante verkrijgt J bij aanwezigheid van een factor ψ_1 of ψ_2; de ketens K_i eindigen dan met u. Invarianten (zonder x of u) verkrijgen wij dus hier niet.

Het zou nu niet moeilijk zijn, de uitdrukkingen (20) bij *algemeene* bilineaire vormen tot zekere, meer eenvoudige gedaanten terug te brengen. Zoo kan men b.v. het aantal factoren in een keten altijd $\leqq n-1$ onderstellen. Maar dit hebben wij hier niet noodig. Het feit, dat de substituties $A, B, \ldots$ een eindige groep vormen, vereenvoudigt onze opgave aanzienlijk. Iedere keten voert immers op grond van (15) weer tot een enkele $h_i h'_i$ terug, en als $J \equiv\mid\equiv 0$, moeten deze rijen alle van elkaar verschillend zijn. Derhalve verkrijgen wij voor $\mu \geqq n$ in het geheel twee keer $\binom{\mu}{n}$ comitanten van de twee volgende typen:

$$J = (a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots . a_{i_n})\,(a'_{i_1}\, x)\,(a'_{i_2}\, x) \ldots \ldots (a'_{i_n} x) \quad . \quad . \qquad (21)$$

$$(i_r \neq i_s)$$

$$J' = (a'_{i_1}\, a'_{i_2} \ldots . a'_{i_n})\,(a_{i_1}\, u')\,(a_{i_2}\, u') \ldots \ldots (a_{i_n}\, u') \quad . \quad . \qquad (22)$$

Hier zijn ook de comitanten met φ_2 en ψ_2 meegerekend, want wij hebben b.v. bij $\varphi_2 : a_i a'_k = e_i^k$.

Er blijven nu nog slechts de factoren van de eerste soort te beschouwen. f_4 is reeds een comitant, namelijk de bilineaire vorm L_E. Uit de overige factoren f vormen wij ketens van de volgende twee typen:

$$T_1 \ldots . . (xa'_i)\,(a_i a'_k) \ldots . . (a_r a_s)\,(a_s u')$$

$$T_2 \ldots . . (aa'_i)\,(a_i a'_k) \ldots . . (a_r a'_s)\,(a_s a').$$

Ook deze ketens zijn op grond van (15) tot zeer eenvoudige vormen te reduceeren: T_1 tot de bilineaire vormen zelf, T_2 tot de karakters $\chi(A) = (aa'), \ldots$ De laatste zijn dus de eenige affine invarianten van de L_A, $L_B, \ldots$ Zijn de karakter van overeenkomstige substituties van twee homomorphe groepen Γ en Γ' gelijk, dan hebben de toegevoegde bilineaire vormen L resp. L' gelijke affine invarianten. Het homomorphzijn van Γ en Γ' waarborgt bovendien, dat de coëfficienten van de L door dezelfde affien-invariante vergelijkingen verbonden zijn als die der vormen L'. De vormen L' zijn dus ten opzichte van affine transformaties met de vormen L aequivalent.

Wiskunde. — J. WOLFF: „*Over een meetbaarheidsstelling van* CARATHÉODORY".

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en W. KAPTEIJN).

1. In een ruimte van een willekeurig aantal afmetingen denken we ons een rechthoekig coördinatenstelsel. Twee punten P en Q noemen we *congruent*, als de vector PQ rationale componenten heeft. De met den oorsprong O congruente punten zijn de rationale punten.

2. *Een puntverzameling E zonder congruent puntenpaar is onmeetbaar of van de maat nul.*

Zonder de algemeenheid te schaden onderstellen we E begrensd. Wij onderstellen de uitwendige maat μ^*E van E positief en zullen aantoonen dat de inwendige maat μ_*E nul is.

Zij $R_0 = 0$, R_1, $R_2, \ldots$ de verzameling der rationale punten wier afstanden tot O kleiner dan 1 zijn. De vectoren OR_n noemen we ϱ_n. De verzameling die uit E ontstaat door de translatie ϱ_n noemen we E_n. In het bijzonder is $E_0 = E$. De E_n hebben gelijke inwendige maat μ_*E en gelijke uitwendige maat μ^*E. Als $m \neq n$ is, dan hebben E_m en E_n geen punt gemeen. Want een gemeenschappelijk punt P zou zoowel door de translatie $-\varrho_n$ als door de translatie $-\varrho_m$ in E komen, en deze beide punten van E moeten samenvallen, daar E geen congruent paar bevat; dus $\varrho_m = \varrho_n$, $m = n$.

Wij beschouwen de verzameling

$$S = E_0 + E_1 + \ldots.$$

S is begrensd, dus

$$\mu_*S < \infty \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Daar de E_n twee aan twee geen punten gemeen hebben, is

$$\mu_*S \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*E_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Daar iedere $\mu_*E_n = \mu_*E$ is, volgt uit (1) en (2):

$$\mu_*E = 0.$$

3. Op dezelfde manier wordt het volgende bewezen:

Men kieze een willekeurige aftelbaar oneindige begrensde puntverzameling (A_n). Iedere meetbare verzameling met positieve maat bezit een puntenpaar welks verbindingsvector gelijk is aan een vector A_mA_n.

4. Zij E een meetbare puntverzameling, waarvan de maat $\mu E > 0$. Aan ieder punt P van E voegen we toe de verzameling der met P congruente (zie 1) punten van E. In iedere van deze verzamelingen kiezen wij een punt. *De verzameling E_0 der gekozen punten is onmeetbaar.*

Zonder de algemeenheid te schaden denken we den diameter van E kleiner dan 1. Uit E_0 leiden we door de in § 2 genoemde translaties ϱ_n de verzamelingen E_n af. Deze E_n hebben twee aan twee geen punt gemeen. Stellen we weer

$$S = E_0 + E_1 + \ldots\ldots,$$

dan is S begrensd, zoodat we evenals in § 2 krijgen

$$\mu_* E_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

S bevat E, want ieder punt van E is congruent met een punt van E_0 en heeft daarvan een afstand < 1.

Dus

$$\mu^* E \leqq \mu^* S \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^* E_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Daar $\mu^* E > 0$ en iedere $\mu^* E_n = \mu^* E_0$, zoo volgt

$$\mu^* E_0 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Uit (3) en (5) volgt de onmeetbaarheid van E_0, en hiermede hebben we het door CARATHÉODORY [1]) gegeven bewijs van de stelling, dat iedere meetbare verzameling met positieve maat onmeetbare deelen heeft, vereenvoudigd.

Utrecht, 1 November 1923.

[1]) C. CARATHÉODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1918, p. 349 e.v.

Wiskunde. — G. SCHAAKE: „*Bepaling van het bilineaire stelsel van* ∞^3 *lijnelementen der ruimte.*"

(Aangeboden door de Heeren HENDRIK DE VRIES en JAN DE VRIES).

§ 1. Een stelsel S_3 van ∞^3 lijnelementen (P, l) der ruimte, die elk uit een rechte l en een daarop gelegen punt P bestaan, bezit drie karakteristieke getallen φ, ψ en χ. Hiervan is φ de graad van den complex der rechten l van S_3, ψ het aantal lijnelementen van S_3, waarvoor P in een bepaald punt valt en χ de graad van de kromme der punten P van de lijnelementen van S_3, wier rechte l in een gegeven vlak ligt.

Voor een *bilineair* stelsel S_3 zijn de getallen φ en ψ beide *één*. In dit geval vormen de rechten l van S_3 dus een lineairen complex C. Elk vlak α bevat dus een waaier (A, α) van rechten l van S_3, die het punt A van α tot top heeft. Tot dezen waaier, die tevens alle door A gaande rechten van S_3 bevat, behoort ook de rechte l, waarvoor P in A valt. Laten we l den waaier (A, α) doorloopen, dan beschrijft P een kromme, die met elke beschrijvende van (A, α) buiten A één punt gemeen heeft, maar bovendien door A gaat en daar aan de bij A behoorende rechte l raakt, dus een door A gaande kegelsnede k^2. Het derde karakteristieke getal van S_3 is bijgevolg *twee*.

Wij zullen nu, aannemende, dat een stelsel $S_3\,(1, 1, 2)$ bestaat, de eigenschappen daarvan afleiden en daarna aangeven, hoe men met behulp van de gevonden eigenschappen elk dergelijk stelsel kan construeeren.

§ 2. Wanneer P een willekeurige rechte r doorloopt, beschrijft de rechte l een regeloppervlak, waarvan r een enkelvoudige richtlijn is. Daar de lijnelementen van S_3, die in een vlak door r liggen, een kegelsnede van punten P bezitten, zijn er in dit vlak twee exemplaren van S_3, wier punt P tot r behoort, en bevat een dergelijk vlak behalve r twee beschrijvenden van het bij r behoorende regeloppervlak, dat dus van den derden graad is. Dit oppervlak ϱ^3 heeft de aan r t.o.v. C toegevoegde rechte r' tot tweevoudige richtlijn.

Bij een rechte van punten P behoort in S_3 een kubisch oppervlak van rechten l.

De lijnelementen van S_3, wier punten P in een vlak V liggen, hebben een congruentie Φ van rechten l. Daar de exemplaren van S_3, wier rechten l door een gegeven punt gaan, een kegelsnede van punten P bezitten, komen er onder deze lijnelementen twee voor, wier punt P in V ligt en is de stergraad van Φ *twee*. Evenzoo blijkt, dat de veldgraad van Φ *twee* is.

Bij een vlak van punten P behoort in S_3 dus een congruentie (2, 2) *van rechten l.*

De gemeenschappelijke rechten van twee congruenties Φ_1 en Φ_2 van rechten l, die resp. bij de vlakken V_1 en V_2 behooren, vormen een regeloppervlak (Φ_1, Φ_2) van den achtsten graad. Immers vormen de rechten van Φ_1 en Φ_2, die een willekeurige rechte r snijden, resp. twee vierdegraadsoppervlakken $\varphi_1{}^4$ en $\varphi_2{}^4$, waarvoor de rechten r en r' tweevoudige richtlijnen zijn en die, daar r en r' elk viermaal onder de doorsnijding meetellen, acht beschrijvenden gemeen hebben. (Φ_1, Φ_2) bestaat uit het regeloppervlak ϱ^3, dat aan de rechte (V_1, V_2) toegevoegd is en uit een regeloppervlak van den vijfden graad ϱ^5, dat uit singuliere rechten van S_3 bestaat, daar bij een beschrijvende l van ϱ^5 twee verschillende punten P dus oneindig veel punten P behooren.

De singuliere rechten l van S_3 vormen een vijfdegraadsregeloppervlak ϱ^5. Elke dezer rechten geeft met elk harer punten een lijnelement van S_3.

Daar een willekeurig vlak met elke singuliere rechte een punt gemeen heeft, gaan alle congruenties Φ door ϱ^5.

Bij de vijf punten P, waarin een willekeurige rechte r het oppervlak ϱ^5 snijdt, behooren als rechten l de vijf door deze punten gaande beschrijvenden van ϱ^3. Hieruit volgt:

Elk oppervlak ϱ^3 heeft vijf beschrijvenden met ϱ^5 gemeen.

Dit laatste kan ook als volgt afgeleid worden. Een willekeurig regeloppervlak van den derden graad φ^3, dat uit rechten van C bestaat, heeft met een congruentie Φ zes rechten gemeen. Immers splitst zich van de doorsnijding van φ^3 met het oppervlak φ^4, dat uit alle rechten van Φ bestaat, die de richtlijnen r en r' van φ^3 snijden, de rechte r tweemaal en de rechte r' viermaal af. De punten P, die toegevoegd zijn aan een willekeurig regeloppervlak φ^3, dat uit rechten van C bestaat, vormen dus een kromme van den zesden graad. Een oppervlak ϱ^3, dat aan een rechte r toegevoegd is, moet dus vijf singuliere rechten van S_3 bevatten.

Evenzoo volgt uit de omstandigheid, dat een willekeurige congruentie (2,2) van rechten van C met een ϱ^3 zes rechten gemeen heeft, dat elke congruentie Φ door ϱ^5 gaat.

§ 3. De stralen l van C, die twee willekeurige rechten r_1 en r_2 snijden, vormen een regelschaar λ^2. Bij deze behoort een kromme van punten P, die elke beschrijvende van λ^2 éénmaal nl. in het aan haar toegevoegde punt snijdt. De drie rechten l van het bij r_1 behoorende oppervlak ϱ_1^3, welke r_2 snijden, zijn de beschrijvenden van λ^2, wier punten P op r_1 vallen. De aan λ^2 toegevoegde kromme heeft dus met een willekeurig vlak door r_1 vier punten gemeen.

Bij een regelschaar van rechten l van C behoort in S_8 een rationale vierdegraadskromme k^4 van punten P.

Aan de rechten l, welke een willekeurige rechte r snijden en dus een bilineaire congruentie met richtlijnen r en r' vormen, zijn de punten P van een oppervlak toegevoegd. Dit oppervlak gaat door r, omdat elk punt van r het punt P van een rechte l is en ook door r', omdat de rechte l, die bij een punt van r' behoort, steeds r snijdt. Bovendien snijdt dit oppervlak elke op r en dus op r' rustende rechte l buiten r en r' in het aan l toegevoegde punt P, zoodat het van den derden graad is.

Bij een bilineaire congruentie van C behoort dus een kubisch oppervlak Ω^3.

Aan de regelschaar, die twee bilineaire congruenties van C gemeen hebben, is een k^4 toegevoegd, die gelegen is op de beide bij genoemde congruenties behoorende oppervlakken Ω^3. Deze oppervlakken hebben nog een kromme k^5 gemeen, die uit voor S_8 singuliere punten bestaat. De bij een punt van k^5 behoorende rechten l vormen den waaier van rechten van C, die door dit punt gaan.

Er is een vijfdegraadskromme k^5 van voor S_8 singuliere punten. Bij elk der punten van k^5 behoort een waaier van rechten l. De aan deze singuliere punten toegevoegde rechten l vormen een congruentie K (5,5).

Daar door ieder punt van k^5 een rechte van een willekeurige bilineaire congruentie van C gaat, is k^5 op alle oppervlakken Ω^3 gelegen.

Een singuliere rechte l, dat is dus een beschrijvende van ϱ^5, kan een willekeurig oppervlak Ω^3 niet in een voor S_8 niet singulier punt snijden, daar de aan dit punt in S_8 toegevoegde rechte, dat is l, de bij Ω^3 behoorende rechte r niet snijdt. Iedere singuliere rechte heeft dus drie punten met k^5 gemeen. Dit volgt ook hieruit, dat blijkens § 2 de rechten l, die aan punten P van een singuliere rechte toegevoegd zijn, een kubisch regeloppervlak ϱ^3 vormen, dat uit drie waaiers moet samengesteld zijn, zoodat elke singuliere rechte drie singuliere punten bevat.

Omgekeerd moet elke rechte t, die k^5 driemaal snijdt, een voor

S_1 singuliere rechte l zijn. Immers wordt het bij deze rechte behoorende oppervlak ϱ^3 door de drie waaiers gevormd, welke bij de snijpunten met k^5 behooren, zoodat aan de overige punten van t een constante straal toegevoegd is, welke met t moet samenvallen.

Het regelvlak ϱ^5 *der singuliere rechten bestaat dus uit de trisecanten der kromme* k^5.

De trisecanten van k^5, welke door een willekeurig punt A van deze kromme gaan, liggen in den waaier (A, α) der rechten l van C, die door dit punt gaan. Terwijl bij willekeurige keuze van A de beschrijvenden van (A, α) een kegelsnede van punten P bezitten, is in dit geval aan elke beschrijvende van (A, α) het punt A toegevoegd, zoodat onder de beschrijvenden van (A, α) twee voor S_1 singuliere rechten, dat zijn beschrijvenden van ϱ^5 voorkomen. Door een willekeurig punt van k^5 gaan dus steeds twee van haar trisecanten.

De kromme k^5 *is dubbelkromme van het oppervlak harer trisecanten.*

Twee trisecanten van k^5 kunnen elkaar niet buiten k^5 snijden, daar het vlak door deze twee rechten dan zes punten van k^5 zou bevatten. Een vlakke doorsnede van ϱ^5 heeft bijgevolg vijf dubbelpunten.

Het oppervlak ϱ^5 *is dus van het geslacht één.*

De aan de punten P van een koorde k van k^5 toegevoegde rechten l vormen een waaier w_k, daar zich van het oppervlak ϱ^3, dat bij een willekeurige rechte behoort, nu de twee waaiers van rechten l afsplitsen, die bij de snijpunten van k met k^5 behooren. Daar k één trisecante van k^5 buiten deze kromme snijdt, bevat w_k één trisecante van k^5.

Omgekeerd behoort bij een waaier van rechten l, die één trisecante van k^5 bevat, een rechte van punten P, die k^5 tweemaal snijdt. Immers splitst zich van de k^5 vijfmaal snijdende kegelsnede, die aan een willekeurigen waaier van C toegevoegd is, nu een k^5 driemaal snijdende rechte af. Dus is het aantal bisecanten van k^5 door een punt P gelijk aan het aantal waaiers door een rechte l, die tevens een beschrijvende van ϱ^5 bevatten, dat is vijf.

Het aantal schijnbare dubbelpunten van k^5 *is vijf en het geslacht van deze kromme is bijgevolg één.*

De kromme k^5 snijdt resp. vijf en tien beschrijvenden van een waaier en van een regelschaar van rechten l. Hieruit volgt:

De aan een waaier van C *toegevoegde kegelsnede* k^2 *en de bij een regelschaar van rechten* l *behoorende kromme* k^4 *hebben resp. vijf en tien punten met* k^5 *gemeen.*

We merken nog op, dat het aan een rechte l toegevoegde punt P kan bepaald worden door in een vlak α door l de kegelsnede

k^2 te construeeren, die k^5 vijfmaal snijdt. Deze kegelsnede moet l dan behalve in den top A van den in α gelegen waaier van C in het bij l behoorende punt P snijden. Hieruit volgt:

De kegelsneden k^2, die k^5 vijfmaal snijden en een rechte van C tweemaal treffen, gaan alle door het aan deze rechte l toegevoegde punt P.

§ 4. We zullen nu, uitgaande van een ruimtekromme van den vijfden graad en van het geslacht één, k^5, een stelsel S_3 construeeren, dat de eigenschappen heeft van het systeem, waarvan we tot nu toe het bestaan onderstelden, en waarvoor k^5 de m.p. der singuliere punten is.

Evenals elke vijfdegraadsruimtekromme ligt k^5 op een kubisch oppervlak Ω^3_1. We gebruiken nu de eenvoudigste afbeelding van Ω^3_1 op een vlak V, bij welke in V zes singuliere punten $F_1, \ldots, F_6$ voorkomen, waaraan resp. zes elkaar kruisende rechten $f_1, \ldots, f_6$ van Ω^3_1 toegevoegd zijn. Nemen we bijv. in V een vijfdegraadskromme k'^5 aan, die in $F_1, \ldots, F_6$ dubbelpunten bezit, dan behoort hierbij op Ω^3_1 een vijfdegraadskromme van het geslacht één. Immers heeft de in V aangenomen kromme met het beeld van een vlakke doorsnede van Ω^3_1, dat is een kubische kromme door $F_1, \ldots, F_6$, vijf voor de afbeelding niet singuliere punten gemeen.

Het in V gelegen beeld van de doorsnijding k^9 van een willekeurig kubisch oppervlak Ω^3_2 met Ω^3_1 is een kromme k'^9 van den negenden graad, die in $F_1, \ldots, F_6$ drievoudige punten bezit. De kromme k'^5 wordt dus tot een k'^9 aangevuld door een rationale vierdegraadskromme k'^4, die in F_6 een drievoudig punt en in $F_1, \ldots, F_5$ enkelvoudige punten heeft. Daar een gegeven kromme k'^5 bijgevolg met elk exemplaar van een lineair systeem van ∞^3 krommen k'^4 het beeld is van de basiskromme van een Ω^3_1 bevattenden bundel van oppervlakken Ω^3, die alle door k^5 gaan, vormen de derdegraadsoppervlakken door k^5 een lineair stelsel Σ_4 van ∞^4 exemplaren.

Een kromme k'^4 heeft met k'^5 tien voor de afbeelding van Ω^3_1 op V niet singuliere punten gemeen. Twee oppervlakken Ω^3 van Σ_4 hebben dus behalve k^5 nog een rationale doorsnijdingskromme van den vierden graad k^4, die in tien punten op k^5 rust.

Van het oppervlak harer trisecanten is k^5 dubbelkromme. Immers heeft de projectie van k^5 uit een harer punten op een willekeurig vlak, een kromme van den graad vier en het geslacht één, twee dubbelpunten en gaan door zoo'n punt dus twee trisecanten van k^5. Verder heeft dit oppervlak met Ω^3_1 vijf rechten gemeen, die op de vijf rechten van V afgebeeld worden, welke F_6 met de andere

punten F verbinden; dus is de doorsnede der oppervlakken van den vijftienden graad, zoodat het oppervlak der trisecanten een vijfdegraadsoppervlak ϱ^5 is.

Er is in Σ_4 één oppervlak Ω^3, dat een willekeurig gegeven rechte r bevat. Dit oppervlak is de m.p. van de ∞^1 exemplaren uit de ∞^3 k^5 vijfmaal snijdende kegelsneden k^2, die r tweemaal treffen. Immers zijn van een dergelijke kegelsnede k^2 en Ω^3 terstond zeven snijpunten aan te geven, zoodat een kegelsnede k^2, waarvan het vlak door r gaat, steeds op het r bevattende oppervlak Ω^3 ligt.

De r tweemaal snijdende kegelsneden k^2 bepalen op deze rechte dus een involutie I, zoodat er twee kegelsneden k^2 zijn, die r (in de dubbelpunten van I) aanraken.

In Σ_4 komt verder één monoïde voor, die haar top in een willekeurig gegeven punt P heeft. Dit oppervlak $\Omega^3{}_P$ is de m.p. van de kegelsneden k^2, die door P gaan. Het bevat de vijf bisecanten van k^5, die door P gaan, daar deze telkens met één trisecante van k^5 een door P gaande kegelsnede k^2 vormen. Behalve deze vijf rechten ligt op $\Omega^3{}_P$ nog één door P gaande rechte l, die k^5 niet snijdt. Immers heeft de kwadratische kegel der nadere raaklijnen van $\Omega^3{}_P$ in P zes rechten met dit oppervlak gemeen en liggen de tien snijpunten van den kegel met k^5 op de vijf bisecanten.

De vlakken der door P gaande kegelsneden k^2 hebben met $\Omega^3{}_P$ nog een k^5 niet snijdende rechte door P gemeen, gaan dus door l. Omgekeerd moet elke l tweemaal snijdende kegelsnede k^2 op $\Omega^3{}_P$ liggen en dus door P gaan. Voor een bij een punt P behoorende rechte l is de involutie I dus parabolisch. De twee l aanrakende kegelsneden k^2 vallen in een door P gaande kegelsnede samen.

Behalve de complex der rechten l is er nog een vijfdegraadscomplex van rechten, waarvoor de involutie I parabolisch is. Beschouwen we nl. een rechte a, die k^5 éénmaal snijdt. Een kegelsnede k^2, die a tweemaal treft, moet door het snijpunt van a en k^5 gaan, daar anders het vlak van k^2 zes snijpunten met k^5 zou hebben. Door elk punt P van a gaat één dergelijke kegelsnede k^2, die uit $\Omega^3{}_P$ gesneden wordt door het vlak, dat door a en de bij P behoorende rechte l gebracht kan worden. Ook voor een rechte a hebben we dus slechts één punt, waar een kegelsnede k^2 haar aanraakt.

Om den graad van den complex der rechten l te bepalen nemen we een waaier (P, φ) van rechten r en onderzoeken de m.p. der punten, waarin kegelsneden k^2 deze rechten r aanraken. Dit is een kromme, die elke rechte van (P, φ) buiten P tweemaal snijdt en in P een dubbelpunt heeft. De nadere raaklijnen in dit dubbelpunt zijn tevens de nadere raaklijnen van $\Omega^3{}_P$ in P, die in φ gelegen zijn.

Aan deze kromme, die dus van den vierden graad is, zijn uit haar dubbelpunt P zes raaklijnen te trekken en dit zijn rechten, waarvoor de involutie I parabolisch is. Daar er in den waaier (P, φ) vijf rechten a voorkomen, bevat (P, φ) dus één rechte l, zoodat de complex C der rechten l lineair is.

C bevat het oppervlak ϱ^6 der trisecanten t van k^5. Nemen we immers P op een rechte t, dan gaat $\Omega^3{}_P$ over in het oppervlak der bisecanten van k^5, die t treffen en dus met t kegelsneden k^2 vormen, die door P gaan. Het oppervlak der bisecanten van k^5, die een willekeurige rechte snijden, is immers van den vijftienden graad, daar het de richtlijn tot vijfvoudige rechte heeft en in een vlak door de richtlijn tien beschrijvenden bezit. Hiervan splitsen zich, als we een trisecante t van k^5 als richtlijn nemen, drie vierdegraadskegels door t af, zoodat er een kubisch oppervlak overblijft, dat t tot dubbelrechte heeft. De vlakken der P bevattende kegelsneden k^2 gaan nu alle door de lijn t, die dus als rechte l aan P toegevoegd is.

Hieruit volgt, dat C, als k^5 niet ontaard is, een algemeene lineaire complex is. Was C namelijk speciaal, dan zou de as van C een richtlijn van ϱ^6 zijn en wel een veelvoudige richtlijn, daar ϱ^6 niet rationaal is. Maar buiten k^5 kunnen twee trisecanten van deze kromme elkaar niet snijden.

We merken nog op, dat een trisecante t bij al hare punten P als rechte l behoort.

Aan een punt P van k^5 zijn oneindig veel rechten toegevoegd. Deze vormen den waaier van C, die P tot top heeft en bepaald is door de beide trisecanten van k^5, die van P uitgaan. Voor elk der rechten van dezen waaier toch moet het toegevoegde punt P in het snijpunt met k^5 vallen. Nemen we P buiten k^5 en laten we dit punt tot k^5 naderen, dan gaat $\Omega^3{}_P$ over in het oppervlak, dat gevormd wordt door de kegelsneden k^2, die door een bepaald punt van k^5 gaan en een vlak door de raaklijn van k^5 in dit punt aanraken. Bij een punt P van k^5 behooren dus inderdaad ∞^1 monoïden $\Omega^3{}_P$, die in P haar top hebben en de rechten l van deze monoïden vormen den waaier der door P gaande rechten van C.

De lijnelementen (P, l) van deze § vormen nu inderdaad een bilineair stelsel van ∞^3 exemplaren, waarvoor k^5 de m.p. der singuliere punten P en ϱ^6 het regeloppervlak der singuliere rechten l is.

Een bilineair stelsel van ∞^3 lijnelementen (P, l) kan steeds uit een ruimtekromme k^5 van het geslacht één afgeleid worden door aan elk punt P toe te voegen de door P gaande en k^5 niet snijdende rechte l van de monoïde van den derden graad, die door k^5 gaat en in P

haar top heeft of, wat op hetzelfde neerkomt, door aan de k^5 niet snijdende rechten l, waarop de k^5 vijfmaal snijdende kegelsneden een parabolische involutie bepalen, het centrum van deze involutie toe te voegen. Omgekeerd kan op de aangegeven manier uit elke kromme k^5 van het geslacht één een bilineair stelsel van ∞^3 lijnelementen afgeleid worden.

Uit de in het begin van deze § gebruikte afbeeldingen van een kubisch oppervlak op een plat vlak volgt, dat op een gegeven kubisch oppervlak ∞^5 vijfdegraadsruimtekrommen van het geslacht één gelegen zijn. Daar er in de ruimte ∞^{19} kubische oppervlakken voorkomen en door elke k^5 van het geslacht één ∞^4 kubische oppervlakken gaan, zijn er in de ruimte ∞^{20} krommen k^5 van het geslacht één.

Er zijn dus ∞^{20} bilineaire stelsels van ∞^3 lijnelementen.

§ 5. Er zijn ∞^{15} bilineaire stelsels S_3 van ∞^3 lijnelementen, waarvoor de complex der rechten l met een gegeven lineairen complex C samenvalt. Dit kan aangetoond worden met behulp van de afbeelding van NÖTHER [1]) van de stralen l van C op de punten Q der ruimte. Voor deze afbeelding is er in C één hoofdstraal l_1, waaraan alle punten Q van een vlak V toegevoegd zijn, terwijl er een in V gelegen kegelsnede k'^2 van singuliere punten Q is, bij elk waarvan een waaier van C behoort, die l_1 bevat.

Bij een in C gelegen regelschaar van den graad ν, die in l_1 een v-voudige rechte bezit, behoort een kromme van den graad $\nu—v$, die k'^2 in $\nu—2v$ punten snijdt. Omgekeerd is een n^e-graadskromme van punten Q, die k'^2 in s punten snijdt, toegevoegd aan een in C voorkomende regelschaar van den graad $2n—s$, die in l_1 een $(n—s)$-voudige rechte heeft.

Een congruentie (μ, μ), die in l_1 een ϱ-voudige rechte heeft, wordt afgebeeld op een oppervlak van den graad $2\mu—\varrho$, waarvan k'^2 een $(\mu—\varrho)$-voudige kegelsnede is, terwijl aan een m^e-graadsoppervlak van punten Q, dat k'^2 m_1-voudig bevat, een stralencongruentie $(m — m_1, m — m_1)$ toegevoegd is, die in l_1 een $(m - 2m_1)$-voudige rechte heeft.

Nemen we nu een k'^2 vijfmaal snijdende kromme k'^5 van het geslacht één aan, die door punten Q wordt gevormd. Deze kromme is de afbeelding van een vijfdegraadsregeloppervlak ϱ^5 van het geslacht één, waarvan de beschrijvenden tot C behooren.

Beschouwen we nu het oppervlak gevormd door de bisecanten

---

[1]) *„Zur Theorie algebraischer Functionen"*, Gött. Nachrichten 1869.

van k'^5, die k'^2 snijden. Dit heeft k'^2 tot vijfvoudige en k'^5 tot drievoudige kromme en is een oppervlak van den tienden graad ϱ'^{10}. Immers snijdt k'^2 het vijftiendegraadsoppervlak der bisecanten van k'^5, die een gegeven rechte treffen, welk oppervlak k'^5 tot viervoudige kromme heeft, buiten k'^5 tienmaal.

Bij ϱ'^{10} behoort een congruentie K (5, 5), die opgebouwd is uit de waaiers van C, welke twee rechten van ϱ^6 bevatten. Van deze waaiers vormen de toppen dus de dubbelkromme van ϱ^6, die van den vijfden graad is; want in een vlak liggen van de bij ϱ'^{10} behoorende congruentie vijf beschrijvenden en dus ook vijf toppen van waaiers dier congruentie. Daar van een punt van k'^5 drie beschrijvenden van ϱ'^{10} uitgaan, zijn de rechten van ϱ^6 trisecanten van k^5. Omgekeerd ligt elke trisecante t van k^5 op ϱ^6, omdat er zes snijpunten van t met ϱ^5 aan te wijzen zijn en is ϱ^6 dus het oppervlak der trisecanten van k^5. Daar er van een punt van k^5 twee trisecanten uitgaan, is deze kromme van het geslacht één. Ze zal in het algemeen niet ontaard zijn. Bestond k^5 namelijk uit een biquadratische kromme van de eerste soort en een snijlijn van deze kromme, dan was C een speciale lineaire complex en voor alle andere ontaardingen van k^5 zou ϱ^6 en daarmede k'^5 samengesteld zijn.

Van het volgens § 5 uit k^5 af te leiden bilineaire stelsel S_3 van ∞^3 lijnelementen is C nu de complex der lijnen l. Anders toch zou het oppervlak ϱ^6 aan twee lineaire complexen gemeen zijn en, daar het dan tot een bilineaire congruentie behoorde, twee rechte richtlijnen hebben, wat, ook al zouden twee rechten tot k^5 behooren, niet kan voorkomen. Ontaardde k^5 bijv. in een kubische ruimtekromme met een snijlijn en een bisecante, dan zouden immers ook de bisecanten der kubische kromme, die de snijlijn treffen, tot ϱ^6 behooren.

§ 6. Voegen we telkens aan het punt P, dat in S_3 bij een rechte l behoort, het aan dezelfde rechte door een afbeelding van Nöther toegewezen punt Q toe, dan verkrijgen we ∞^3 puntenparen (P, Q), die een birationale transformatie in de ruimte bepalen. Voor deze transformatie is het punt P van de rechte l_1, dat we P_1 zullen noemen, een hoofdpunt. De bijbehoorende punten Q vormen het vlak V. Verder is k^5 een kromme van singuliere punten P. Bij elk punt van k^5 behoort een k'^2 snijdende rechte van punten Q. De aan de punten van k^5 toegevoegde rechten vormen het oppervlak ϱ'^{10}.

Er zijn twee krommen van singuliere punten Q, nl. k'^2 en k'^5. Aan een punt van k'^2 zijn de punten P toegevoegd van een l_1 bevattenden waaier van C, die een kegelsnede k^2 vormen, welke door

P_1 gaat. De bij de punten Q van k'^3 behoorende kegelsneden k^2 vormen de monoïde $\Omega^4_{P_1}$, die in P_1 haar top heeft. Aan de punten Q van k'^6 zijn rechten van punten P toegevoegd, die het oppervlak ϱ^6 vormen.

Wanneer P een rechte doorloopt, beschrijft l een kubisch regeloppervlak, dat vijf beschrijvenden van ϱ^5 bevat en Q dus een kubische kromme, die k'^3 driemaal en k'^6 vijfmaal snijdt. Bij een vlak van punten P behoort een congruentie (2, 2) van rechten l, die ϱ^5 bevat en dus een biquadratisch oppervlak van punten Q, waarvan k'^3 dubbelkromme is en dat k'^6 bevat.

Beschrijft Q een rechte, dan doorloopt l een regelschaar, die l_1 bevat en P bijgevolg een rationale vierdegraadskromme, die door P_1 gaat en k^5 in tien punten snijdt. Aan een vlak van punten Q is een bilineaire congruentie van rechten l toegevoegd, die l_1 bevat en dus een kubisch oppervlak van punten P, dat door P_1 gaat en k^5 bevat.

De puntenparen (P, Q) *bepalen dus een birationale transformatie* (3, 4).[1])

§ 7. Een kromme van den n^{en} graad, die k^5 m maal snijdt, treft een oppervlak Ω^3 in $3n-m$ voor S_3 niet singuliere punten en snijdt $5n-2m$ beschrijvenden van ϱ^5 buiten k^5. Hieruit volgt:

De rechten l, die in S_3 toegevoegd zijn aan de punten P van een kromme van den n^{en} graad, die k^5 m maal snijdt, vormen een regeloppervlak van den graad $3n-m$, dat $5n-2m$ beschrijvenden met ϱ^5 gemeen heeft.

Beschouwen we omgekeerd een regeloppervlak van den graad ν, dat μ beschrijvenden met ϱ^5 gemeen heeft, dan volgt door ν en μ resp. aan $3n-m$ en $5n-2m$ gelijk te stellen en uit de verkregen vergelijkingen n en m op te lossen:

De punten P, die in S_3 behooren bij de rechten l, welke een oppervlak vormen van den graad ν, dat μ beschrijvenden met ϱ^5 gemeen heeft, vormen een kromme van den graad $2\nu-\mu$, die k^5 in $5\nu-3\mu$ punten snijdt.

Een oppervlak van den graad p, dat k^5 q-voudig bevat, wordt door een kegelsnede k^2 en een beschrijvende van ϱ^5 resp. in $2p-5q$ en $p-3q$ voor S_3 niet singuliere punten gesneden.

Bij de punten P van een p^e-graadsoppervlak, dat k^5 tot q-voudige kromme heeft, behooren in S_3 dus de rechten l van een congruentie $(2p-5q, 2p-5q)$, waarvan de beschrijvenden van ϱ^5 $(p-3q)$-voudige rechten zijn.

[1]) Verg. Sturm: „*Geometrische Verwandtschaften*", IV p. 371.

Omgekeerd volgt hieruit nu weer gemakkelijk:

Aan een congruentie (π,π) *van rechten* l, *die de beschrijvenden van* ϱ^5 $\varkappa$*-voudig bevat, is een oppervlak van punten* P *toegevoegd, dat van den graad* $3\pi - 5\varkappa$ *is en* k^5 *tot* $(\pi - 2\varkappa)$*-voudige kromme heeft.*

Van de door S_3 bepaalde afbeelding der stralen van C op de punten der ruimte zijn allerlei toepassingen te maken. Vragen we bijv. naar het aantal der kegelsneden, die k^5 vijfmaal snijden en bovendien drie gegeven rechten r treffen. Deze kegelsneden zijn de afbeeldingen der waaiers van C, die van elk van de drie bij de rechten r behoorende oppervlakken ϱ^3 één rechte bevatten en dus hun toppen hebben in de 27 snijpunten dezer drie oppervlakken. *Er zijn dus* 27 *kegelsneden, die een ruimtekromme van den vijfden graad en van het geslacht één vijfmaal treffen en drie gegeven rechten snijden.*

§ 8. We bepalen ten slotte de tot C behoorende regeloppervlakken, die toegevoegd zijn aan de rechten van een kubisch oppervlak Ω^3, dat de meetkundige plaats is der punten P van de rechten l, die een willekeurige rechte r en dus ook de aan r t. o. v. C toegevoegde rechte r' snijden.

De rechten r en r', die beide op Ω^3 liggen, zijn de afbeeldingen van de oppervlakken ϱ^3 en ϱ'^3, die resp. bij deze rechten behooren.

Verder behooren de vijf voor S_3 singuliere rechten t van ϱ^5, die r snijden, tot Ω^3, daar aan elk dezer rechten al hare punten als punten P toegevoegd zijn. Deze rechten snijden behalve r ook r' en zijn trisecanten van k^5.

De waaier van C, die het snijpunt van r met een rechte t tot top heeft en waarvan het vlak dus door r' gaat, bezit, daar de tot den waaier behoorende rechte t zich van de toegevoegde kegelsnede afsplitst, een rechte van punten P, die k^5 tweemaal snijdt en r' treft. Er liggen dus vijf bisecanten van k^5 op Ω^3, die r' snijden. Evenzoo vinden we op Ω^3 vijf bisecanten van k^5, welke r treffen en toegevoegd zijn aan de waaiers van C, die de snijpunten van r' met ϱ^5 tot top hebben.

Eindelijk zullen voor een regelschaar, die r en r' tot richtlijnen heeft en drie beschrijvenden van ϱ^5 bevat, dus tot C behoort, drie trisecanten van k^5 zich van de toegevoegde vierdegraadskromme afsplitsen. Een dergelijke regelschaar wordt dus afgebeeld op een rechte, die k^5 éénmaal snijdt, maar met r en r' geen punt gemeen heeft. Er liggen op Ω^3 tien rechten van deze soort.

Hiermede zijn de afbeeldingen der 27 rechten van Ω^3 gevonden.

Wanneer de rechte r tot C behoort en dus een rechte l is, hebben

we te doen met een monoïde $\Omega^3{}_P$, die het punt P van l tot top heeft. In dit geval vallen r en r' in l samen. Ook vallen nu de rechten, die toegevoegd waren aan de tien waaiers van C, welke hun toppen hadden in de snijpunten van r en r' met ϱ^6, twee aan twee samen in vijf rechten, die door P gaan, daar de genoemde waaiers nu alle l bevatten. Deze vijf rechten zijn de bisecanten van k^5 door P. Verder liggen op $\Omega^3{}_P$ de vijf trisecanten van k^5, die l treffen en de tien bij regelscharen van C behoorende rechten, die k^5 éénmaal snijden en met l geen punt gemeen hebben.

Zoölogie. — H. BOSCHMA. *„Het voedsel der Madreporaria."*

(Aangeboden door de Heeren C. PH. SLUITER en MAX WEBER).

Er zijn slechts zeer weinig gegevens over den aard van het voedsel der Madreporaria. Wel vindt men in vele publicaties waarin de biologie der rifkoralen behandeld wordt, dat het voedsel van deze dieren uit planctonorganismen bestaat, maar meestal zijn dit opmerkingen, die niet het resultaat zijn van onderzoekingen over de voedingsverschijnselen of over den aard van het voedsel bij de dieren zelf en daarom zijn zulke opmerkingen geheel zonder waarde [1]).

Voorzoover ik dit in de literatuur heb kunnen nagaan, maken slechts vijf onderzoekers (GARDINER, DUERDEN, CARPENTER, VAUGHAN en WALTHER) hierop een uitzondering: de gegevens, die zij verstrekken over den aard van het voedsel der Madreporaria of over de wijze, waarop het voedsel door deze dieren opgenomen wordt, zijn gegrond op een voorafgaand onderzoek van deze verschijnselen bij de koraaldieren zelf.

In een aantal publicaties van GARDINER [2]) vindt men gegevens over de voeding der rifkoralen. Het voedsel dezer dieren bestaat volgens GARDINER voornamelijk uit hun commensalistische algen (zooxanthellae), die ook in het entoderm in groote hoeveelheden voorkomen. Vele soorten verkrijgen hun voedsel alleen door middel van deze algen. In ongeveer 1 of 2 procent van de geconserveerde polypen van *Pocillopora* en *Astraea* werden organische resten van vreemden oorsprong gevonden (GARDINER 1903) wat bewijst, dat deze koralen soms vreemde organismen verteren, hoewel zij zich

[1]) Voorbeelden hiervan vindt men in: W. SAVILLE KENT, The Great Barrier Reef of Australia, London 1893.

E. WOLF, Korallenriffe. Handwörterb. d. Naturw. 1914.

[2]) J. STANLEY GARDINER, The Building of Atolls. Proc. 4. Int. Congr. of Zoology, 1899.

—— On the Rate of Growth of some Corals from Fiji. Proc. Cambr. Phil. Soc. Vol. XI, 1902.

—— The Maldive and Laccadive Groups, with Notes on other Coral Formations in the Indian Ocean. The Fauna and Geogr. of the Mald. and Lacc. Arch. Vol. I Part. III 1902, p. 320 en Part. IV 1903, p. 421.

—— The Formation of Coral Reefs. Nature, Vol. LXIX, 1904.

in normale omstandigheden alleen voeden door middel van zooxanthellae [1]).

Duerden [2]) vond zooxanthellae (gele cellen) in de entodermcellen van de polypen van alle soorten van West Indische Madreporaria, die hij onderzocht met uitzondering van *Phyllangia americana* en *Astrangia solitaria*. Deze gele cellen komen ook voor in de inwendige kanalen van *Madrepora* en *Porites*, maar Duerden zegt uitdrukkelijk, dat zij nooit vrij gevonden worden in de gastrale holte der polypen behalve in larvale stadia (1902, p. 417). Het voedsel der rifkoralen bestaat volgens Duerden uit kleine planctonorganismen. De aanwezigheid van zooxanthellae in het entoderm van de rifkoralen is niet beslist noodzakelijk, daar kolonies van *Oculina*, *Cladocora* en *Agaricia*, die op beschaduwde plaatsen leven, hun zooxanthellae, die bij kolonies van dezelfde soorten gewoonlijk in groote hoeveelheden voorkomen, geheel kunnen verliezen en toch hun gezonde uiterlijk bewaren.

In een latere publicatie [3]) toonde Duerden aan, dat het slijm, dat aan de oppervlakte van de koraalpolypen afgescheiden wordt, een belangrijke rol speelt bij de voeding van deze dieren. Kleine voorwerpen, die op deze slijmlaag vallen, worden met die substantie omhuld en later wordt het slijm door den mond opgenomen, waarna de voedseldeelen, die zich onder de opgenomen voorwerpen bevinden, verteerd worden. Deze onderzoekingen werden gedaan met soorten van *Fungia* en *Favia*. Vleesch van krabben en ander dierlijk voedsel, ook extracten van dierlijke stoffen, werden door deze koraaldieren opgenomen, wanneer zij binnen het bereik van de orale oppervlakte der polypen gebracht werden. Gegevens over den aard van het voedsel in normale toestanden vindt men in deze publicatie niet.

De manier, waarop het voedsel door *Isophyllia* opgenomen wordt, is onderzocht door Carpenter [4]), die de polypen vleeschextract als voedsel toediende. Volgens dezen onderzoeker bestaat het normale voedsel van deze koralen uit kleine planctonorganismen, die door

---

[1]) De opmerking van Hickson (Coelenterata & Ctenophora in: The Cambridge Natural History, 1906), dat rifkoralen misschien in sommige gevallen een aanzienlijk deel van hun voedsel ontleenen aan hun symbiotische zooxanthellae, steunt waarschijnlijk op Gardiner's gegevens. Hickson ontkent echter de mogelijkheid, dat er rifkoralen zijn, die zich uitsluitend door middel van zooxanthellae voeden.

[2]) J. E. Duerden, West Indian Madreporarian Polyps. Mem. Nat. Ac. Sci. Vol. VIII, Washington 1902.

[3]) J. E. Duerden, The Rôle of Mucus in Corals. Quart. Jour. Micr. Sci. Vol. XLIX, 1906.

[4]) F. W. Carpenter, Feeding Reactions of the Rose Coral (Isophyllia) Proc. Amer. Ac. Arts Sci. Vol. XLVI, 1910.

de tentakels worden vastgehouden en later in de gastrale holte verteerd worden door de mesenteriaalfilamenten.

VAUGHAN [1]) heeft door uitvoerige experimenten de wijze van voedselopneming van verschillende rifkoralen onderzocht. Op de riffen nam hij waar, dat exemplaren van *Dendrogyra cylindrus, Maeandra clivosa* en *Siderastrea siderea* kleine medusen, behoorende tot het geslacht *Linuche* gevangen hadden, en dat een exemplaar van *Maeandra areolata* alle weeke deelen van een kleine krab verteerd had. Bij zijn uitvoerige proefnemingen gebruikte VAUGHAN vleesch van krabben en andere dieren en ook extracten om de polypen tot reacties te brengen. Dierlijke stoffen, zoówel vaste als vloeibare, werden altijd gretig opgenomen, diatomeeën niet. Wanneer diatomeeën gedrenkt waren in vleeschextract namen de polypen deze op, maar later werden de diatomeeën onverteerd verwijderd. VAUGHAN's conclusies hieruit zijn: „The food of corals consists solely of animal matter" (p. 161). Behalve de boven aangehaalde gevallen, waar als voedsel van de koralen medusen en krabben vermeld worden, is in deze publicatie geen vermelding gemaakt van het voedsel, dat in normale omstandigheden in de gastrale holte van koraalpolypen voorkomt.

In een latere publicatie [2]) wijst VAUGHAN er eveneens op, dat het voedsel der rifkoralen uit dierlijke organismen bestaat en speciaal uit de kleine zwemmende en drijvende planctonvormen. In verband hiermee uit hij de veronderstelling, dat de limiet van de verticale verspreiding der koraalfauna van het ondiepe water (46 M.) veroorzaakt wordt door het afnemen van de hoeveelheid van deze planctonorganismen op die diepte.

Met betrekking tot de zooxanthellae merkt MAYER [3]) op: „Certainly they do not directly supply nourishment, for corals refuse all plants as food" (p. 28). Het voedsel der rifkoralen is volgens MAYER uitsluitend van dierlijken aard. Hij grondt deze uitspraak op de boven aangehaalde onderzoekingen van VAUGHAN en op de gegevens van DUERDEN [4]), die zijn kolonies van *Siderastrea radians* langen tijd in een aquarium in volkomen gezondheid hield door ze te voeden met vleesch van krabben en andere dieren.

---

[1]) T. WAYLAND VAUGHAN Studies of the Geology and of the Madreporaria of the Bahamas and Southern Florida. Carnegie Inst. Washington. Yearbook no. 11, 1912.

[2]) T. WAYLAND VAUGHAN, Corals and the Formation of Coral Reefs. Smithsonian Institution. Annual Report for 1917 Washington 1919.

[3]) A G. MAYER, Ecology of the Murray Island Coral Reef. Carnegie Inst. Washington. Dep. of Marine Biology, Vol. IX, 1918.

[4]) J. E. DUERDEN, The Coral Siderastrea radians and its Postlarval Development. Carnegie Inst. Washington. Pub. no. 20, 1904.

WALTHER[1]) vermeldt, dat in versch geconserveerde rifkoralen spectroscopisch aan te toonen is, dat zij chlorophyll bevatten. Hij wijst er verder op, dat hij bij vele vormen van rifkoralen van eilanden in de Baai van Batavia geen tentakels gezien heeft en dat in het inwendige der polypen van deze koralen geen planctonisch voedsel voorkomt. Hieruit concludeert WALTHER, dat de voeding van vele rifkoralen door chlorophyll-assimilatie tot stand komt. Deze opmerkingen zijn echter niet verder uitgewerkt en ook is niet opgegeven welke rifkoralen hij onderzocht heeft.

Van November 1920 tot September 1922 heb ik een groot aantal levende koraalpolypen onderzocht met het doel den aard van het voedsel dezer dieren in normale omstandigheden te bepalen. Voornamelijk heb ik onderzoekingen op dit gebied gedaan op het eiland Edam, maar ook op andere eilanden in de Java Zee en Straat Soenda (Poeloe Kelapa en omliggende eilanden, Noordwachter, Huisman's Eiland bij Sebesi) heb ik rifkoralen onderzocht. Gedurende de Deensche expeditie naar de Kei Eilanden, heb ik verdere gegevens over de voeding der koralen kunnen verzamelen, zoowel bij koralen uit ondiep water als bij soorten uit dieper water (tot ongeveer 250 M.).

Wat nu de rifkoralen betreft, komen mijn resultaten vrijwel overeen met die van GARDINER: het voedsel van deze dieren bestaat voornamelijk uit zooxanthellae. GARDINER's opgaven over de voeding der rifkoralen zijn gepubliceerd als korte notities in verhandelingen, waarvan de inhoud grootendeels over andere onderwerpen handelt, en zij zijn misschien daardoor onvoldoende bekend. Bovendien uit zich GARDINER in een latere publicatie[2]) minder positief over het feit, dat de zooxanthellae in het algemeen het belangrijkste deel van het voedsel der rifkoralen vormen, daar hij weliswaar vermeldt, dat de zooxanthellae waarschijnlijk in groot aantal door de koraalpolypen opgegeten worden als zij voedsel noodig hebben, maar ook opgeeft dat men veronderstelt, dat de koraalpolypen de kleine organismen, die in het oppervlakkige water van de zee voorkomen, vangen en verteren. Het kan daarom van belang zijn, dat ik hier mijn resultaten weergeef, ook omdat die in strijd zijn met de gegevens van de meeste der boven geciteerde onderzoekers.

In het entoderm van bijna alle Madreporaria uit ondiep water komen groote hoeveelheden zooxanthellae voor. Ik vond deze algen

---

[1]) J. WALTHER, Allgemeine Palaeontologie. Geologische Fragen in biologischer Betrachtung. I. Teil, Berlin 1919.

[2]) J. STANLEY GARDINER, The Shore, in: Science of the Sea, edited by G. HERBERT FOWLER, London 1912.

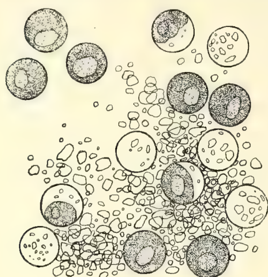
in alle door mij onderzochte soorten van de volgende geslachten: *Madracis, Seriatopora, Pocillopora, Stylophora, Euphyllia, Cyphastrea, Echinopora, Galaxea, Favia, Favites, Goniastrea, Leptoria, Maeandra, Hydnophora, Mussa, Symphyllia, Merulina, Fungia, Herpetolitha, Polyphyllia, Halomitra, Pavona, Psammocora, Turbinaria, Montipora, Acropora* (= *Madrepora*), *Goniopora* en *Porites*. Bij de Madreporaria schijnen de zooxanthellae tot bepaalde geslachten beperkt te zijn: wanneer zij bij een soort voorkomen, vindt men hen ook bij andere soorten van hetzelfde geslacht en omgekeerd zijn er andere geslachten, waarvan geen der soorten zooxanthellae bezit. Bij vele Madreporaria uit iets dieper water (ongeveer 50 M.) komen ook zooxanthellae voor, maar deze soorten zijn dan altijd vertegenwoordigers van een geslacht, waarvan ook op de riffen in ondiep water soorten voorkomen. In tegenstelling met de opmerking van HICKSON [1]), dat deze algen bij de Pocilloporidae geheel of bijna geheel ontbreken, vond ik zooxanthellae in groote hoeveelheden bij alle door mij onderzochte soorten van de geslachten *Pocillopora* en *Seriatopora*.

De zooxanthellae (gele cellen) der rifkoralen zijn bolvormige, donker geel gekleurde, eencellige algen met een diameter van 7—10 μ. Het is moeilijk uit te maken of de kleur gebonden is aan bepaalde chromatophoren. In de levende zooxanthellae is de geheele cel gelijkmatig geel gekleurd en in gefixeerd materiaal heb ik geen afzonderlijke chromatophoren kunnen aantoonen. De levende gele cellen bevatten een sterk lichtbrekende korrel (soms komen twee dergelijke lichamen voor), maar verder laten zij geen bijzonderheden onderscheiden. Deze korrel kleurt zich bruinachtig paars na inwerking van jodium, welke reactie sneller tot stand komt, wanneer de cellen eerst met een zuur behandeld zijn. Deze kleurmethode wijst er op, dat de lichtbrekende korrel een zetmeelachtig assimilatieproduct bevat. De reactie bewijst, dat deze stof zich onderscheidt van het zetmeel van hoogere planten, dat een veel blauwer tint krijgt na behandeling met jodium. De kern der zooxanthellae, die in de levende cellen niet te onderscheiden is, wordt na toevoeging van azijnzuur duidelijk zichtbaar als een korrelig lichaampje van gewoonlijk iets kleinere afmetingen dan het assimilatieproduct. Ook door toevoeging van fuchsine kan de kern der zooxanthellae zichtbaar gemaakt worden als een zwak rood gekleurd lichaampje.

In gefixeerd materiaal zijn na behandeling der gele cellen met kernkleurstoffen nog enkele verdere bijzonderheden te onderscheiden. Van de verschillende kleurmethoden verkreeg ik de beste resultaten

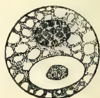
[1]) loc. cit. p. 374.

met HEIDENHAIN's ijzer-haematoxyline en met safranin en lichtgroen.


Fig. 1.

De kern bevat een aantal sterk kleurbare korreltjes (fig. 2) en van het bij de levende gele cellen sterk lichtbrekende lichaampje kleurt zich het centrale gedeelte. De buitenste lagen van dit lichaampje, het eigenlijke assimilatieproduct, blijven nu ongekleurd, zoodat het centrale deel, het pyrenoid, duidelijk zichtbaar wordt. Verder vertoont het protoplasma in vele praeparaten een aanzienlijk aantal vacuolen [1]).

Bij mijn onderzoek naar de voeding van de koraaldieren in normale omstandigheden heb ik van een groot aantal polypen van alle soorten Madreporaria, die ik op de riffen vond, den inhoud van de gastrale holte nader onderzocht. In deze holte vindt men gewoonlijk gedeeltelijk verteerde voedselresten bestaande uit een slijmachtige massa, die gemakkelijk met een fijne pipet uit de maag te verkrijgen is. Bij het fixeeren van rifkoralen verwijderen deze dikwijls de voedselresten door den mond, wat verklaart, dat men met gefixeerd materiaal gewoonlijk weinig gegevens over de voeding der koralen verkrijgen kan. Bij alle onderzochte echte rifkoralen (de soorten, die in hun entoderm zooxanthellae herbergen) bevatte de slijmmassa uit de gastrale holte een groot aantal gele cellen in onverteerden staat, die geheel overeenkwamen met die in de entodermcellen. Behalve deze waren er gewoonlijk enkele, waarvan een deel der cel ontkleurd was (gedeelijk verteerde zooxanthellae) en altijd een groote hoeveelheid kleurlooze bolletjes van dezelfde grootte als de zooxanthellae, maar met onregelmatigen inhoud (fig. 1). Tusschen onaangetaste gele cellen en deze kleurlooze bolletjes waren alle tusschenstadia te vinden, zoodat deze kleurlooze bolletjes zonder eenigen twijfel vrij ver verteerde zooxanthellae zijn. Het feit dat zij hun ronden vorm zoolang blijven behouden, wijst er op, dat


Fig. 2.

[1]) Een korte beschrijving van de gedaante der zooxanthellae van de ritkoralen vindt men ook bij DUERDEN (1902) en MATTHAI (A Revision of the Recent Colonial Astraeidae possessing distinct Corallites. Trans. Linn. Soc. London (2) Zool. Vol. XVII, 1914). In de figuren van deze publicaties zijn de kern en het pyrenoid met het assimilatieproduct duidelijk zichtbaar. In DUERDEN's figuren zijn bovendien enkele kleinere korreltjes in het protoplasma aangegeven, die echter niet in de zooxanthellae van mijn materiaal voorkomen.

de zooxanthellae van een vrij resistenten wand voorzien zijn. Behalve de bovengenoemde lichaampjes, die met zekerheid te herkennen zijn als gele cellen en afbraakproducten daarvan bevat de maaginhoud der rifkoralen steeds zeer vele kleinere kleurlooze korreltjes van onregelmatigen vorm, die voor een groot deel waarschijnlijk uit verdere afbraakproducten der zooxanthellae bestaan. Bijna altijd komen verder in de slijmmassa van het coelenteron nematocysten en gedeelten daarvan voor.

Bij de meeste rifkoralen komen slechts bij uitzondering behalve zooxanthellae en nematocysten andere organismen of deelen daarvan in de voedselresten voor. In het coelenteron van de vormen met kleine polypen zooals soorten van *Porites*, *Acropora*, *Pocillopora* en *Cyphastrea* vindt men soms een enkele diatomee, maar gewoonlijk geen andere organismen dan zooxanthellae. Als regel geldt, dat de hoeveelheid der vreemde organismen, die procentsgewijze in den maaginhoud der rifkoralen aanwezig is, toeneemt met de grootte der polypen. Slechts bij de soorten van sommige geslachten met groote polypen (*Fungia*, *Favia*, *Favites*, *Symphyllia*, *Mussa*) vindt men bijna altijd andere organismen in de slijmmassa, die zich in de gastrale holte bevindt, namelijk Copepoden, naupliuslarven, resten van Anneliden, foraminiferen, diatomeeën, *Lyngbya* en andere algen. Gewoonlijk is dan tegelijk met deze organismen ook detritus zooals sponsspicula en kalklichaampjes van Holothurien door de polypen opgenomen. Echter blijven toch de zooxanthellae het hoofdbestanddeel van het voedsel in normale omstandigheden vormen ook bij soorten, waarbij men altijd in het coelenteron organismen van vreemden oorsprong vindt [1]).

Van twee soorten van het geslacht *Fungia* (*F. fungites* (L.) en *F. actiniformis* Q. & G.), onderzocht ik, hoe zij plancton als voedsel kunnen opnemen. Wanneer men koralen van deze soorten in een glas plaatst en hen eenigen tijd rustig laat liggen, scheiden zij aan hun orale oppervlakte een slijmlaag af. Nu werden planctonorganismen (voornamelijk Copepoden) aan het water toegevoegd en zeer spoedig werden een groot aantal hiervan op de slijmlaag vastgehouden. Tenslotte nam de polyp het slijm met de organismen bij gedeelten tegelijk in den mond op, op dezelfde wijze als dat door DUERDEN (1908) voor eene andere soort van *Fungia* beschreven is.

Gewoonlijk is het bij de levende dieren niet gemakkelijk na te

---

[1]) Een opvallend verschijnsel is het, dat ik bij de levende koraalpolypen meestal voedselresten in de gastrale holte vond en in die voedselresten zooxanthellae, terwijl DUERDEN vermeldt, dat hij nooit zooxanthellae in het coelenteron der West-Indische Madreporaria waargenomen heeft.

gaan op welke plaats het voedsel verteerd wordt. Slechts bij *Favites abdita* (Ell. & Sol.) heb ik kunnen waarnemen, dat de maaginhoud, een slijmmassa met vele halfverteerde zooxanthellae en plancton-organismen, o. a. een aantal Copepoden, alleen op de mesenteriaal-filamenten te vinden was. Vooral bij kolonies van deze soort, die langer dan een dag bewaard waren en waarvan zich de mond der polypen gedurende den nacht geheel geopend had, waren deze slijmpropjes, die onderling niet met elkaar in verbinding stonden, duidelijk zichtbaar. Waarschijnlijk vervullen daarom de mesenteriaal-filamenten bij *Favites* een belangrijke rol bij de vertering van het voedsel, evenals dit door CARPENTER (1910) bij *Isophyllia* aangetoond is.

De zooxanthellae in den maaginhoud van de rifkoralen zijn waarschijnlijk in den regel door den mond van de polyp opgenomen. Hiervoor pleiten de volgende twee waarnemingen: 1°. In de slijmlaag, die bij *Fungia* aan de orale oppervlakte afgescheiden wordt, zijn steeds vele zooxanthellae te vinden, die later met de slijmlaag en de organismen van vreemden oorsprong in den mond opgenomen worden. Ook wanneer deze slijmlaag pas gevormd is, zijn er reeds zooxanthellae in aanwezig. 2°. Bij *Seriatopora* ziet men onder het microscoop geregeld, dat zich langs de takken van de kolonie enkele vrije zooxanthellae voortbewegen over het ectoderm, die tenslotte in den mond van de polyp opgenomen worden. In de gastrale holte bevindt zich hier een slijmpropje, dat dikwijls in de holte ronddraait en waarin de zooxanthellae goed te onderscheiden zijn.

Er bestaan nu natuurlijk theoretisch nog twee mogelijkheden: òf de zooxanthellae in het coelenteron zijn afkomstig uit de entodermcellen van de polyp zelf, òf zij zijn van buiten uit het zeewater opgenomen. Nu vindt men in het coelenteron van *Dendrophyllia coccinea*, een soort, die geen zooxanthellae in het entoderm herbergt, slechts hoogst zelden een enkele zooxanthella, ook in die polypen, die in de nabijheid van een aantal kolonies van rifkoralen leven. Wanneer nu deze laatste de zooxanthellae, die een voornaam deel van hun voedsel uitmaken, uit het zeewater opgenomen hadden dan zou men deze organismen toch ook geregeld in de voedselresten van *Dendrophyllia* moeten vinden. Nu dit niet het geval is, wijst dit er wel op, dat de zooxanthellae in de gastrale holte van de rifkoralen oorspronkelijk uit hun eigen weefsels afkomstig zijn.

De infectie der jonge larven met zooxanthellae heeft plaats in het moederdier. DUERDEN (1902) toonde reeds aan, dat de vrijkomende planulae vele gele cellen herbergen en ik heb ditzelfde verschijnsel waargenomen in de uitzwermende planulae van *Fungia*

actiniformis, waarin een 180-tal zooxanthellae kunnen voorkomen. Zoolang de eieren nog vastzitten aan de mesenteriën, vindt men wel zooxanthellae in hun nabijheid, maar zelf zijn zij nog niet geïnfecteerd. Aan de planulae voorafgaande ontwikkelingsstadia heb ik niet kunnen vinden en ik kan dus niet vermelden, op welk stadium de infectie plaats vindt. Deze infectie van de jonge stadia wijst er op, dat het samenleven met de gele cellen voor de koraalpolypen van zeer groot belang is. Het verschijnsel is een geval van symbiose [1]), maar of deze van mutualistischen aard is of dat men de wijze van associatie der twee organismen als een geval van parasitisme moet beschouwen, zooals PRATT [2]) denkt, waarbij dan de koraaldieren de organismen zijn, die parasiteeren op de zooxanthellae, is moeilijk uit te maken. De groote hoeveelheden symbionten, die men in levenden toestand in het entoderm van de koraalpolypen vindt, wijzen er veeleer op dat de symbiose van mutualistischen aard is.

De zooxanthellae kunnen, daar zij licht noodig hebben voor hun photosynthese van koolhydraten, slechts tot op een bepaalde diepte (gewoonlijk niet meer dan 50 M., in sommige gevallen tot op 70 M. diepte) voorkomen. Dit is wel de voornaamste factor, die de grens van de verticale verspreiding der rifkoralen bepaalt, een onderstelling, die ook reeds door GARDINER (1899) geuit werd.

Behalve in rifkoralen komen zooxanthellae van denzelfden vorm, structuur en kleur ook voor in de Hydrocorallide *Millepora* en in Alcyonariën *Tubipora* en *Heliopora.* Ook bij de soorten van deze geslachten voeden zich de polypen voor een groot deel met hun zooxanthellae. Bij andere geslachten van Alcyonarien heeft PRATT [3]) zooxanthellae beschreven die geen verschillen vertoonen met die van de koralen. Verder worden zij gevonden in de weefsels van vele Actinien en Scyphomedusen.

De zooxanthellae, die bij *Tridacna* in de helder gekleurde deelen van den mantel in menigte voorkomen [4]), komen eveneens geheel met die van de koralen overeen. Ook hier leveren de zooxanthellae een belangrijk gedeelte van het voedsel: in de maag en het daarop

[1]) P. BUCHNER, Tier und Pflanze in intrazellularer Symbiose. Berlin 1921.

[2]) E. M. PRATT, The Digestive Organs of the Alcyonaria and their Relation to the Mesogloeal Cell Plexus. Quart. Jour. Micr. Sci. Vol. XLIX 1906. In deze en ook in andere publicaties van dezelfde schrijfster worden de gele cellen steeds „zoochlorellae" genoemd. Uit de beschrijving en de figuren blijkt echter, dat het zooxanthellae zijn.

[3]) E. M. PRATT, The Alcyonaria of the Maldives. Pt. II. Fauna Geogr. Mald. and Lacc. Arch. Vol. II Pt. I 1903. Vergelijk ook de boven geciteerde publicatie.

[4]) cf. NUSSBAUM-KARSTEN-WEBER, Lehrbuch der Biologie, 2 Aufl. 1914, p. 550.

volgende gedeelte van den darm van *Tridacna* vond ik aanzienlijke hoeveelheden zooxanthellae in alle stadia van vertering.

De zooxanthellae, die ik bij een soort van *Collozoum* op Ambon kon vergelijken met die van de koralen, zijn grooter dan deze laatste (12—15 μ), lichter geel van kleur en onderscheiden zich voornamelijk door het bezit van meer dan een assimilatieproduct in elke cel. Zij komen geheel overeen met de gele cellen, die BRANDT [1]) bij verschillende Radiolarien uitvoerig onderzocht heeft, alleen komt volgens BRANDT de amyloide substantie voor als lichamen met een groote vacuole, deze zijn echter massief en bezitten een centrale sterk kleurbare korrel, waarop reeds door STIASNY [2]) gewezen werd. In dit opzicht komt het assimilatieproduct dus overeen met dat van de zooxanthellae der koralen, waarin zich ook een centraal lichaam (pyrenoid) kleurt met kernkleurstoffen.

Bij sommige soorten van Madreporaria, die in ondiep water, tot dicht bij de oppervlakte leven, zooals *Dendrophyllia micranthus* (Ehrb.) (= *nigrescens* Dana) en *Dendrophyllia coccinea* (Ehrb.) [3]), twee soorten, die op Ambon en de Kei Eilanden algemeen voorkomen, zijn geen zooxanthellae te vinden. Het eigenaardige is nu, dat bij *D. coccinea* in het entoderm groote hoeveelheden groengele lichaampjes van onregelmatigen vorm voorkomen, die men niet vindt in de weefsels van de rifkoralen. Wanneer men pluispraeparaten maakt van de weefsels van het levende dier, komen deze lichaampjes vrij en ronden zich af. Zij hebben een korrelige structuur, in sommige is een donkerder kleurbaar gedeelte aanwezig, maar een kern is niet met zekerheid aan te toonen. Behalve deze groengele lichaampjes bezit de bovengenoemde soort nog een fijn verdeeld rood pigment in de buitenste lagen van het lichaam. *Dendrophyllia micranthus* heeft dezelfde groengele lichaampjes in het entoderm en verder een zwart pigment in de plaats van het roode van *D. coccinea.* In de gastrale holte van deze dieren vindt men resten van kleine Crustaceeën, diatomeeën, foraminiferen, Oscillatoriën en detritus, zooals sponsspicula, maar bovendien geregeld een aantal van de groengele lichaamjes uit het entoderm in min of meer afgeronden vorm. Soms ook vindt men enkele zooxanthellae, maar dit is alleen het geval bij dieren, in wier nabijheid andere koralen voorkomen, die in hun weefsels zooxanthellae herbergen.

---

[1]) K. BRANDT, Die Koloniebildenden Radiolarien (Sphaerozoëen) des Golfes von Neapel. Fauna und Flora des Golfes von Neapel. 1885.

[2]) G. STIASNY, Zur Kenntnis der gelben Zellen der Sphaerozoen. Biol. Centralblatt. Bd. XXX, 1910.

[3]) De nieuwe nomenclatuur van deze soorten is ontleend aan C. J. VAN DER HORST, Eupsammidae. Siboga Expeditie Monogr. XVIc, 1922.

Het is nu zeer verleidelijk om de conclusie te trekken, dat de groengele lichaampjes bij *Dendrophyllia* dezelfde rol vervullen als de zooxanthellae bij de rifkoralen. Een steun voor deze hypothese vindt men in het onderzoek van MAC MUNN [1]), die langs spectroscopischen weg aantoonde, dat in twee soorten van *Dendrophyllia* (*D. nigrescens* en *D. willeyi*) een chlorophylloid pigment voorkomt. De groengele kleur van de bewuste lichaampjes maakt het waarschijnlijk, dat het chlorophylloide pigment hierin gelocaliseerd is. Ook het feit, dat deze groengele lichaampjes geregeld in het voedsel voorkomen, wijst op een analogie met de zooxanthellae der rifkoralen.

Over den aard van de groengele lichaampjes bestaan nu nog twee mogelijkheden: òf het zijn elementen van de weefsels der koraaldieren zelf en in dit geval zouden wij hier een dierlijk chlorophyll aantreffen, òf het zijn zelfstandige organismen, die met de koralen samenleven. In het laatste geval zouden echter de organismen (algen) sterk gereduceerd zijn. [2]) Tegen de mogelijkheid, dat de groengele lichaampjes door de koraalpolypen zelf gevormd zouden worden, pleit dat in alle gevallen, waar vroeger dierlijk chlorophyll vermeld is, later aangetoond is dat dit steeds van vreemden oorsprong was. Voorloopig echter heb ik niet voldoende gegevens om dit vraagstuk tot een oplossing te brengen.

In de weefsels van een kleine *Balanophyllia*, die men aan den onderkant van groote kolonies van rifkoralen in de Java Zee geregeld aantreft, komen dezelfde groengele lichaampjes in groot aantal voor. Voedselresten heb ik in deze koralen niet kunnen vinden.

Bij de geslachten der Madreporaria, waarvan de soorten alleen in dieper water voorkomen, bevatten de weefsels geen zooxanthellae. [3]) Van de voeding van deze koralen is nog weinig bekend. GRAVIER [4]) vond in de gastrale holte van *Stephanotrochus diadema* resten van een Crustacee, fragmenten van armen van Ophiuren en zand met

---

[1]) C. A. MAC MUNN, On the Pigments of Certain Corals. Fauna and Geogr. of the Mald. and Lacc. Arch. Vol. I, Part. II, 1902.

[2]) Er zijn gevallen bekend, dat algen, die in symbiose met dieren leven, geheel hun karakter van zelfstandige individuen kunnen verliezen en niet meer in staat zijn buiten het dier te leven (cf. F. KEEBLE and F. W. GAMBLE, The Origin and Nature of the Green Cells of Convoluta roscoffensis. Quart. Journ. Micr. Sci. Vol. LI, 1907).

[3]) De „zooxanthellae", die volgens BOURNE (Report on the Solitary Corals collected by Prof. HERDMAN in Ceylon. Rep. Pearl Oyster Fisheries, 1905) bij *Heterocyathus* en *Heteropsammia* voorkomen, zijn cellen van geheel anderen aard, behoorende tot het weefsel van de polypen zelf.

[4]) CH. GRAVIER, Madréporaires provenant des Campagnes des Yachts Princesse-Alice et Hirondelle II. Résult. Camp. Scient. Fasc. LV, Monaco 1920.

vele foraminiferen. Nu moet men met gevolgtrekkingen over den aard van het voedsel van diepzeekoralen steeds voorzichtig zijn. Wanneer men in de koraalpolypen uit dieper water alleen zand met foraminiferen vindt, kan men daaruit nog niet concludeeren, dat zij dit als voedsel tot zich genomen hebben, daar het in de meeste gevallen tijdens het dreggen in de gastrale holte gekomen is. Bij enkele vormen vond ik behalve zand resten van dieren of planten in een slijmachtige massa en dit zijn naar alle waarschijnlijkheid resten van het voedsel der polypen geweest. In de gastrale holte van een *Dendrophyllia*, gedregd in de Baai van Ambon tusschen 45 en 90 M., vond ik de resten van verschillende kleine Crustaceeën en vele diatomeeën. De voedselresten van *Cyathohelia axillaris* (Ell. & Sol.) van Ambon (ongeveer 130 M.) bevatten Copepoden, diatomeeën en sponsspicula. Bij *Odontocyathus* sp. van Station 2 van de Deensche Expeditie naar de Kei Eilanden (± 200 M.) vond ik in het coelenteron resten van extremiteiten van Crustaceeën, foraminiferen en sponsspicula. Ook bij *Stephanophyllia formosissima* Mos. (D. Exp. Stat. 41, 245 M.) waren in de gastrale holte van sommige exemplaren resten van kleine Crustaceeën te vinden. Bij vele andere exemplaren van verschillende soorten bevonden zich in de gastrale holte vele foraminiferen, maar deze waren waarschijnlijk tijdens het dreggen daar gekomen.

VERKLARING VAN DE FIGUREN.

Fig. 1. *Acropora variabilis* (Klunz.) Voedselresten uit de gastrale holte van een polyp met normale en gedeeltelijk verteerde zooxanthellae. De gestippelde gedeelten waren geel gekleurd. × 825.

Fig. 2. Zooxanthella uit het entoderm van *Goniopora stokesi* M.—E. & H. Geconserveerd materiaal (alcohol), gekleurd met safranin en lichtgroen. × 1950.

Leiden, November 1923.

Zoölogisch Laboratorium der Universiteit.

Plantkunde. — TH. WEEVERS: *„De primair bij de assimilatie optredende koolhydraten. Fysiologiese studie met bonte planten."*

(Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en J. C. SCHOUTE).

Evenals bij een vroegere mededeling[1]) is ook dit onderzoek uitgevoerd met bonte planten door middel van een soort differentiatiemethode. Van eenzelfde plantensoort werden stofwisselingsprocessen vergeleken in groene en bonte delen. Doordat de eerste autotroof, de tweede in hun voeding afhankelik van de eerste zijn, ontstaan verschillen, die tot verdieping van ons inzicht in de stofwisseling kunnen leiden. Hier wil ik het vraagstuk van de primair bij de assimilatie ontstaande koolhydraten behandelen.

Inleiding en literatuuroverzicht.

Al wordt sinds J. SACHS 't zetmeel soms 't eerste zichtbare produkt der koolstofassimilatie genoemd, toch is het eerder te beschouwen als een eindpunt van een keten van chemiese processen in de chloroplast. Hierop wijst het door KRAUS[2]) waargenomen feit, dat Spirogyracellen bij beginnende assimilatie de zuurstofvorming nagenoeg direkt vertonen, terwijl de zetmeelproduktie eerst na enige minuten waarneembaar is.

SCHIMPER[3]) en ARTHUR MEYER[4]) wezen beide op de betekenis der oplosbare koolhydraten en de eerste zag in de glukose niet alleen het splitsingsprodukt van polyosen en biosen, dat als transportstof dienst deed, maar ook de stof, die aan de vorming van 't zetmeelmolekuul voorafging.

Deze mening werd algemeen aanvaard tot BROWN en MORRIS[5]) in hun publikatie over de assimilatie van Tropaeolum de stelling verkondigden, dat sacharose 't eerst gevormde koolhydraat zou zijn.

WENT[6]) sloot zich, wat betreft 't suikerriet bij deze mening aan

---

1) Verslag gewone vergadering 29 September 1923. (Dl. XXXII N°. 7).

2) KRAUS, Jahrb. f. Wiss. Bot. 1869.

3) en 4) SCHIMPER en A. MEYER, Bot. Zeitung 1885.

5) BROWN en MORRIS, Journ. Chem. Soc. Trans. 1893.

6) WENT, Jahrb. f. Wiss. Bot. 1898.

Later heeft PARKIN[1]) 't onderwerp bestudeerd bij 't sneeuwklokje, waar de toestand in zoverre eenvoudiger is, dat zetmeel en maltose hier prakties gesproken ontbreken, wat bij de andere objekten niet 't geval was. Daardoor vallen voor een groot deel de bezwaren weg, die A. J. KLUYVER[2]) tegen de door BROWN en MORRIS gebruikte methode met recht te berde gebracht heeft.

Bij nauwlettende beschouwing van hun publikatie zijn trouwens naar mijn mening aan de uitkomsten der analyses volstrekt niet die overtuigende bewijsgronden te ontlenen voor hun mening, dat sacharose 't primair produkt zou zijn.

PARKIN komt tot deze konklusie vooral op grond van zijn waarneming, dat gaande van de top naar de basis van 't sneeuwklokjesblad, het totaal aan oplosbare koolhydraten toeneemt, maar tegelijk de sacharose in verhouding tot de monosen afneemt. De laatste zouden dan als transportstof dienen voor 't vervoer naar de bol. Ook vindt PARKIN dat 't gehalte aan monosen vrijwel konstant blijft, de sacharose daarentegen overdag bij assimilatie toeneemt, daarentegen 's nachts afneemt. Wordt overdag de afvoer uit 't blad belemmerd, dan is die sacharose-toeneming nog sterker.

De beide laatste waarnemingen kunnen echter ook 't gevolg daarvan zijn, dat de primair gevormde monosen, zodra een zeker kwantum voorhanden is, in sacharose worden omgezet en wat het verschil in gehalte van boven- en onderhelft van 't groene blad aangaat, daar heeft een vergelijking der absolute waarden veel meer betekenis, dan die der relatieve waarden. Berekent men de eerste uit PARKIN's gegevens, dan blijkt naar de basis toe wel een sterke toeneming der monosen, maar is er wat de sacharose betreft nu eens afneming, dan toeneming.

M.i. dient dus dit objekt opnieuw onderzocht, te meer daar CAMPBELL's[3]) onderzoek bij de beetwortel volkomen PARKIN's opvatting, dat sacharose 't primaire produkt zou zijn, tegenspreekt. CAMPBELL toont door een serie van analyses van telkens om de twee uur verzamelde blaren aan, dat zodra de assimilatie begint, eerst de monosen gaan toenemen, later de sacharose, eindelik 't zetmeel. De maltose neemt 's nachts toe en wordt daarom algemeen als splitsingsprodukt van 't zetmeel beschouwd.

Wat 't primair produkt is, moet dus nog als een onuitgemaakte kwestie beschouwd worden.

---

[1]) PARKIN, Biochem. Journal 1911.

[2]) A. J. KLUYVER, Diss. Tech. Hoogeschool 1914.

[3]) CAMPBELL, Journ. f. agricultural Science 1911/12.

Vroeger meende men, dat in nagenoeg iedere plant glukose wordt aangetroffen, sacharose slechts in zeer enkele, maar al mag 't eerste juist zijn, 't laatste is zeker onjuist, zoals later blijken zal. Hieraan kan men dus geen argumenten ontlenen, eerder nog aan de logiese gedachtengang, dat de eenvoudiger monosen eerder 't primaire produkt zullen zijn dan sacharose.

De mogelikheid is ook volstrekt niet buitengesloten, dat niet alle planten zich op dezelfde manier gedragen, evenzo goed als de ene plant zijn koolhydraten ophoopt in de vorm van suikers, de andere in die van inuline, de meerderheid in die van zetmeel, zou ook 't primaire produkt verschillend kunnen zijn.

Het schijnt mij toe, dat de vergelijking der koolhydraten van groene en bonte[1]) blaren of bladdelen bij eenzelfde exemplaar in deze enig licht zou kunnen brengen.

In de bladgroenvrije delen kunnen de aanwezige koolhydraten wel de rol vervullen van transportstof of reservestof, maar nooit die van primair assimilatieprodukt. Bekend is 't, dat zetmeel in de chlorofylvrije delen der bonte blaren ontbreekt, de Jodiumproef van Sachs wijst volkomen scherp de grens van 't al of niet bladgroenhoudend weefsel aan. De enige uitzondering zijn de gevallen, waar de bonte blaren in tegenstelling met de gewone regel ook chlorofylvrije stomata bezitten, dan hebben de laatste door hun amyloplasten toch zetmeel gevormd.[2])

De vraag of er nu ook een verschil bestaat tussen de oplosbare koolhydraten der groene en bonte delen der blaren, of tussen de groene en bonte loten van één plant is echter voor zover mij bekend nog niet onder de ogen gezien.

Nu bestaat zeer zeker de mogelikheid, dat eenzelfde suiker meer funkties vervult: in de groene delen 't primaire assimilatieprodukt is, in de bonte delen reservestof of transportstof is, of wel dient tot verkrijgen van de noodzakelike osmotiese druk. Wij behoeven dus geen verschillen tussen de suikers der bonte en groene delen te vinden, maar indien wij ze vinden, dan opent zich de mogelikheid tot 't trekken van konklusies.

Brown en Morris (l.c.) meenden te mogen zeggen, dat glukose meer in 't biezonder gebruikt wordt als ademhalingsmateriaal, terwijl fruktose volgens Lindet[3]) zou dienen tot opbouw van de weefsels. Parkin en Colin[4]) kwamen tot dezelfde gevolgtrekking als Brown

[1]) Met bont is voortaan bedoeld de chlorofylvrije delen.

[2]) Kümmler, Jahrb. f. Wiss. Bot. 1922.

[3]) Lindet, Bullet. Assoc. Chem. Sucr. T. 28, 1909.

[4]) Colin, Compt. Rendus. T. 168, 1919.

en MORRIS, maar bij een krities onderzoek van DAVIS[1]) bleek, dat de methoden door bovengenoemde onderzoekers ter onderscheiding van beide monosen gebruikt te wensen overlieten, in 't biezonder levert de kwantitatieve polarimetriese bepaling van glukose en fruktose naast elkaar in plantenextrakten moeilikheden op.

Methode.

Voorlopig wil ik dus van de onderscheiding van glukose en fruktose afzien en alleen spreken van monosen. 't Hoofddoel was dus na te gaan 't voorkomen van sacharose enerzijds, van monosen anderzijds, daarom werd de reduktie van FEHLINGS proefvocht bepaald in één deel van 't extrakt vóór, en een ander deel nà 24 uur inwerking van invertase (Preparaat v. MERCK). De direkt reducerende suikers behoeven dan nog niet uitsluitend monosen te zijn, daar ook maltose FEHLING direkt reduceert. Nu is maltose om bovengenoemde redenen voor ons wel van minder belang, maar 't moest toch uitgemaakt of onder de direkt reducerende suikers monosen voorkwamen en daartoe werd naast de kwantitatieve bepaling met FEHLING steeds een kwalitatieve met BARFOED's reagens gedaan[2]). Dit reagens, koperacetaat in neutrale of zwak-zure oplossing reageert wel met glukose en fruktose, niet met biosen.

Bovendien werd in sommige gevallen gebruik gemaakt van de biochemiese methode van KLUYVER l. c. Torula monosa vergist n.l. alleen monosen en door meting van 't volume gevormd koolzuur is een kwantitatieve bepaling mogelik. Van een bepaling der maltose door middel van de differentiëringsmethode met Torula dattila en Sacharomyces cerevisiae werd afgezien (zie KLUYVER l.c.).

Het materiaal werd direkt gedood in kokend water, waardoor de invertase vernietigd werd, dan het waterig extrakt behandeld met juist voldoende basies loodacetaat. In een deel van deze vloeistof werd na neutraliseren met azijnzuur gereageerd op monosen met BARFOED's reagens[3]). De rest werd behandeld met dinatriumfosfaatoplossing om de overmaat lood te verwijderen. De kwantitatieve suikerbepalingen geschiedden volgens de jodometriese methode van SCHOORL[4]).

[1]) DAVIS, Journ. Agric. Science. 1916.

[2]) BARFOED, Zeitschr. f. anal. Chemie 1873.

Ondanks vele pogingen bleef deze methode voor kwantitatief onderzoek onbruikbaar.

[3]) De verdunde oplossingen van fruktose, die in plantenextrakten voorkomen, worden door basies loodacetaat niet neergeslagen.

[4]) N. SCHOORL, Ned. Tijdschrift Pharmacie 1899.

De invloed, die aanwezige sacharose op 't reducerend vermogen van invertsuiker kan uitoefenen, werd verwaarloosd.

Het materiaal werd steeds verzameld na een dag met heldere zonneschijn (September), de geanalyseerde hoeveelheid had gewoonlik een drooggewicht van ± 10 Gr. De procentiese waarden hebben op 't drooggewicht betrekking.

Analyties onderzoek.

1°. Acer Negundo fol. var. witbont.

Volwassen groene blaren en groene delen der bonte blaren.

1 à 2 °/₀ direkt reduc. suikers (monosereaktie +).

1 à 2 °/₀ sacharose, bovendien zetmeel [1]).

Volwassen witbonte blaren en bladdelen, geen monose of maltose.

1 à 2 °/₀ sacharose, geen zetmeel (behalve in de stomata).

Zeer jonge witbonte bladdelen.

1 °/₀ direkt reduc. suiker, 1 °/₀ sacharose.

Witbonte bladstelen, 0,5 à 1 °/₀ sacharose, direkt reduc. suikers zijn evenals zetmeel slechts in sporen aanwezig, n.l. aan de basale verdikking.

Witbonte takken (September), 0,1 °/₀ direkt reduc. suiker, sacharose 0,5 °/₀, ook zetmeel.

Wanneer begin Oktober de blaren gaan afsterven, neemt in de groene delen de direkt reduc. suiker toe, de sacharose af, (de eerste 2,5 °/₀, de laatste 0,8 °/₀), de bonte delen bevatten ook dan geen monosen. De aurea varieteit van Acer Negundo bevat in de geelbonte delen evenmin monosen.

2°. Ilex Aquifolium L. fol var.

Groen 1,2 °/₀ direkt reduc. suiker (monosereaktie +), 1,25 °/₀ sacharose;

witbont geen monose of maltose, 1 °/₀ sacharose.

3°. Hedera Helix L. fol var.

Groen 1 °/₀ direkt reduc. suiker (monosereaktie +), 2,5 °/₀ sacharose,

bont geen monose of maltose, 3 °/₀ sacharose.

4°. Humulus Lupulus L. fol var.

Groen 1,3 °/₀ direkt reduc. suiker (monosereaktie +), 2,4 °/₀ sacharose,

bont, geen monose of maltose, sacharose 0,3 °/₀.

5°. Euonymus japonica Thb. fol var.

Groen 0,9 °/₀ direkt reduc. suiker (monosereaktie +) 0,6 °/₀ sacharose,

bont, geen monose of maltose, sacharose 0,5 °/₀.

---

[1]) Ook een glukoside is in de blaren aanwezig, oplosbaar in water, niet splitsbaar door emulsine, niet neer te slaan met bas. loodacetaat, en dat door koken met verdund HCl een bruin harsachtig produkt geeft (naast reduc. suiker).

6°. Aesculus Hippocastanum L. (exempl. met bonte en groene loten).

Groen (St. Jansloof in September) 3,4 °/₀ direkt reduc. suiker (monose-reaktie +) 0,5 °/₀ sacharose.

Bont (St. Jansloof in September) 1 °/₀ direkt reduc. suiker (monose-reaktie +) 0,1 °/₀ sacharose.

7°. Cornus Sanguinea L fol var.

Groen 1,6 °/₀ direkt reduc. suiker (monosereaktie +) 2,8 °/₀ sacharose,

bont 0,9 °/₀ dir. reduc. suiker (monosereaktie +) 3 °/₀ sacharose.

8°. Pelargonium zonale Willd. Witbont periklinaalchimaere.

Groene delen 1 à 2 °/₀ dir. reduc. suiker (monosereaktie +), 1 à 2 °/₀ sacharose,

bonte delen, geen monose of maltose, 0,6 °/₀ sacharose.

Bij plaatsing der planten in de donkere kamer (t = 10° C.) verdwijnen de suikers na 2 × 24 uur uit de blaren, het zetmeel eveneens. De blaren hebben dan nog hun normaal uiterlik, zijn niet geel. Met die planten werd nu nagegaan welke suikers bij beginnende assimilatie 't eerst verschijnen.

Na ½ uur zonlicht (per 10 Gr. drooggewicht) sporen dir. reduc. suiker, geen sacharose.

Na 1 uur zonlicht 0,3 °/₀ dir. reduc. suiker sporen sacharose.

Na 3 uur ,, 0,4 °/₀ ,, ,, ,, 0,3 °/₀ ,,

Na 5 uur ,, 0,6 °/₀ ,, ,, ,, 0,3 °/₀ ,,

9°. Aspidistra elatior Blume Sectoriaal bont.

Groene delen 0,4 °/₀ dir. reduc. suiker (monosereaktie +), 0,6 °/₀ sacharose,

bonte delen, geen monose of maltose, 0,7 °/₀ sacharose.

10°. Chlorophytum Sternbergianum St. albo marginata.

Groene delen 1 °/₀ dir. reduc. suiker [1]), sacharose 2,1 °/₀, bonte delen geen monose of maltose, 2 °/₀ sacharose.

11°. Ophiopogon Jaburan Lodd albo marginata.

Groene delen, 0,2 °/₀ dir. reduc. suiker, sacharose 0,7 °/₀ bonte delen, geen monose of maltose, sacharose 1,8 °/₀.

12°. Cyperus alternifolius L. fol. var.

groene delen 0,3°/₀ dir. reduc. suiker (monosereaktie +) sacharose 2,4°/₀ bonte delen geen monose of maltose sacharose 1,7 °/₀.

Beredenering der waarnemingen.

Wanneer wij 't resultaat van bovenstaande overzien, blijkt dat alle objekten èn monosen, èn sacharose in de groene delen bevatten,

[1]) Hier werd met BARFOED's reagens geen positieve reactie verkregen.

maar tevens dat bij 10 van de 12 species er verschil bestaat tussen de groene en bonte delen, wat betreft de erin voorkomende suikers. De twee species, die dit verschil niet vertoonden n.l. Cornus en Aesculus bevatten ook in de bonte delen monose en sacharose, al was de hoeveelheid van de laatste bij Aesculus zeer klein. Uit deze twee objekten zijn dus geen konklusies te trekken. Anders is 't bij de grote meerderheid 10 van de 12, die 't sterk sprekende verschil vertoonden, dat in de bonte delen de monosen ontbreken, de sacharose aanwezig is.

Dit wel voorkomen van monosen in de assimilerende bladdelen en 't niet voorkomen in de niet assimilerende volwassen bonte blaren pleit m.i. wel zeer sterk voor de mening, dat ten minste in de genoemde objekten monosen aan de vorming van 't zetmeel voorafgaan, ja in 't algemeen de primair bij de assimilatie gevormde suikers zijn. Immers onder deze 10 zijn er 2 n. l. Aspidistra en Chlorophytum, die geen zetmeel als reservestof bevatten, slechts de stomata bevatten dit zowel in de bonte als in de groene bladdelen.

Bovenstaande kan voor deze mening pleiten, een bewijs is 't niet; wel is dit echter het geval met de bij Pelargonium zonale verkregen resultaten. In tegenstelling met andere objekten gelukte het bij de bonte Pelargoniums de volwassen blaren suiker en zetmeelvrij te krijgen, door de planten 2 × of 3 × 24 uur in de donkere kamer te plaatsen. De planten waren dan ogenschijnlik geheel normaal, de blaren waren niet geel geworden en evenmin afgevallen. [1])

Werden deze planten nu in 't zonlicht geplaatst, dan vormden zich eerst monosen en pas later sacharose en zetmeel, zoals uit bovenstaande analyses blijkt. De monosen nemen ook eerder in gehalte toe dan de sacharose, dat sluit zich dus geheel aan bij de resultaten van CAMPBELL, die echter niet met suikervrije blaren werkte en dus 't eerste optreden der monosen niet kon waarnemen, wat 't meest bewijzend is.

De vraag moet nu nog onder de ogen gezien, welk monose 't primair produkt is; treedt eerst glukose op, dan wel fruktose, of treden beide tegelijk op. Vroeger heeft men gemeend, door kombinatie van 't resultaat der polarimetriese bepalingen met dat van de reduktie van FEHLINGS proefvocht, te kunnen berekenen, hoeveel

---

[1]) Bij groene Pelargoniums gelukte dit niet, evenmin bij Ilex Aquifolium en Sacharum officinarum L (warme kas). Ook na 14 dagen waren de met zwarte kappen omhulde takken van de hulst, of de spruiten van 't suikerriet nog monose- en sacharosehoudend. Zij werden dan geel, zodat de proef gestaakt werd.

van beide suikers in plantenextrakten voorhanden is, maar de kritiek heeft van die methode weinig overgelaten [1]).

Ook de mikrochemiese methode van GRAFE [2]) ter onderscheiding der suikersoorten verdient blijkens 't onderzoek van RUHLAND [3]) geen vertrouwen.

Men kan makrochemies in 't extrakt op fruktose reageren, 't zij met de reaktie van SELIWANOFF (verwarmen der oplossing met resorcine en zoutzuur), 't zij volgens TOLLENS met HCl en naftoresorcine, maar ook sacharose geeft deze reakties.

BROWN en MORRIS l.c. later ook PARKIN, kwamen tot de konklusie, dat fruktose 't hoofddeel der monosen vormde, en uitgaande van hun standpunt, dat sacharose 't primair produkt was, meenden zij te kunnen zeggen, dat de fruktose naast glukose door de inversie ontstaan, minder snel in de stofwisseling werd gebruikt en daarom meer overbleef.

Van ons standpunt, dat de vorming der monosen primair is, is deze redenering niet noodzakelik. Dat in de ene plant deze konfiguratie der monosen in overmaat zou worden geproduceerd, in een tweede plant de andere konfiguratie, is in verband met de asymmetriese bouw van het enzymmolekuul volstrekt niet onaannemelik.

Ook omzetting van de ene konfiguratie in de andere is denkbaar; op de manier van 't laboratorium in zwak alkaliese omgeving vormt zich echter ook mannose, die slechts als splitsingsprodukt der mannanen in de plant te vinden is; dat is dus minder waarschijnlik.

Polarimetriese bepalingen door den Heer KUIPERS in het Chemies Laboratorium te Groningen met extrakten uit bovengenoemde planten verricht, gaven bij Acer en Pelargonium steeds linksdraaiing, bij Aesculus, Hedera, Aspidistra, Humulus Ilex en Chlorophytum rechtsdraaiing. Bij Acer en Pelargonium overweegt dus de linksdraaiing van de fruktose, de rechtsdraaiing van glukose en sacharose tezamen; kwantiteit der monosen bepalen, levert zoals gezegd moeilikheden op.

Ook bij 't extrakt van Pelargoniumblaren, die eerst suikervrij gemaakt, één uur geassimileerd hebben, is de draaiing links, de hoeveelheid fruktose naar de draaiing berekend, kwam echter niet overeen met die berekend uit de reduktie, zodat nog nader onderzoek in deze nodig is.

Ten slotte nog enkele woorden over de funktie der sacharose.

---

[1]) DAVIS en DAISH, Journ. of agricultural Science 1913.

[2]) GRAFE. Sitzber. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien 1905.

[3]) RUHLAND, Jahrb. f. wiss. Botanik 1911. Voor de kritiek der methode zie OFNER, Zeitschr. physiol. Chem. 1905.

Bij alle onderzochte objekten was zowel in de bonte als in de groene delen steeds sacharose in wisselende kwantiteiten aan te treffen, die m.i. als kondensatieprodukt der monosen op te vatten is, dat in de blaren als transportstof dienst kan doen, evenals dit voor de kiemende gerst door BROWN en MORRIS[1]) waarschijnlik gemaakt is. Dat dit voor de volwassen bonte delen geldt, ligt toch voor de hand, daar in de bladstelen en nerven geen ander koolhydraat te vinden was. Voor de zeer jonge delen is echter een nadere beschouwing nodig, daar bij de twee objekten, waarvan ik over voldoende hoeveelheid zuiver witbonte loten beschikte, Acer Negundo ook monosehoudend was, Humulus lupulus niet. Waar komt deze monose in de jonge bonte delen van de esdoorn vandaan, is zij erheen gevoerd of ter plaatse uit de getransporteerde sacharose ontstaan?

Daartoe werd nagegaan of in de bonte delen invertase aanwezig was. Volgens de methode van BROWN en MORRIS l. c. werden de blaren bij 45° C. snel gedroogd, tot poeder gemaakt en 't poeder gemengd met een sacharose-oplossing. Toevoeging van thymol was voldoende antiseptikum, daar 't onderzoek op de direkt reducerende suiker reeds na 12 uur plaats had en 't mengsel bij 15° C. werd bewaard. Dan werd verhit op 80° C., en 't extrakt na de gewone behandeling met basies loodacetaat en dinatriumfosfaat op direkt reducerende suiker onderzocht[2]).

Invertase bleek aanwezig in de bonte delen van Acer Negundo, Humulus Lupulus, Euonymus japonica, Ilex Aquifolium, Pelargonium, zonale, Chlorophytum Sternbergianum, Aspidistra elatior, d. w. z. alle planten waarvan voldoend materiaal tot onderzoek voorhanden was.

1 Gr. bladpoeder (bonte blaren) v. Acer Negundo zet in 12 uur bij 15° C. ± 100 m.g. sacharose in invertsuiker om, 't poeder van groene blaren had ongeveer even sterke inverterende werking.

Van de hop, 't objekt waarvan 't meeste materiaal aanwezig was, werd uit de bonte delen 't enzym ook verkregen door fijnwrijven der verse blaren, koleren van de fijngewreven massa, dan 't extrakt behandelen met overmaat alkohol en 't verkregen neerslag oplossen in water.

In alle bonte delen is dus invertase aanwezig en de monosen in de zeer jonge blaren van Acer Negundo kunnen door inversie ontstaan zijn. Nemen wij in aanmerking, dat de bonte delen al hun koolhydraten moeten krijgen uit de groene en dat noch in de bladnerven, noch in de bladstelen (behalve 't meest basale deel) der

[1]) BROWN en MORRIS, Chem. Soc. 1890.

[2]) Het weefsel bevatte die in de volwassen delen niet, alle eventueel aanwezige monosen waren dus door inversie ontstaan.

volwassen blaren monosen aan te tonen zijn, dan wordt de waarschijnlikheid van een transport als monose bij deze objekten wel uiterst gering.

Nemen wij nu aan dat sacharose als transportstof fungeert, dan komen wij tot 't eigenaardige feit, dat in 't bladweefsel èn sacharose èn invertase voorkomen en toch geen monosen in de volwassen delen aan te treffen zijn.

Door die delen fijn te wrijven ontstaan bijv. bij Humulus lupulus en Chlorophytum door autolyse de monosen, zodat ze na enkele uren zijn aan te tonen.

RUHLAND l. c. heeft de vraag naar de lokalisatie van suiker en enzym bij de suikerbiet ter sprake gebracht en komt tot de konklusie, dat beide wel in dezelfde cellen zullen voorkomen, maar de lokalisatie in de cel verschillend is, de sacharose waarschijnlik in de vakuole, 't enzym in 't protoplasma aanwezig zal zijn.

Voor experimenteel onderzoek hiervan zijn onze middelen nog niet toereikend. De methode van SENFT [1]) geeft wel de lokalisatie in de weefsels aan, maar doordat bij sacharose verwarming noodzakelik is, treedt diffusie op, en is nauwkeurige plaatsbepaling van de suiker onmogelik. Bovendien beschikken wij totaal niet over gevoelige reagentia op de invertase.

Denken wij ons deze lokalisatie aldus, dan levert 't transport der sacharose van cel tot cel weer nieuwe moeilikheden op, daar dan bij 't passeren van 't protoplasma inversie zou te verwachten zijn. Het vermoeden, dat hierbij inaktivering der invertase een rol zou spelen, ligt voor de hand, daar deze volgens SÖRENSEN [2]) reeds bij geringe koncentratie der OH-ionen optreedt. Bij een PH een waarde van 8—10 (omslag fenolftaleine), is de werking der invertase echter wel belemmerd [3]), maar volstrekt niet opgeheven, terwijl volgens ATKINS [4]) de PH van 't protoplasma nooit groter is dan 8; inaktivering op deze wijze is er dus niet.

Eventueel gevormde monosen zouden ook direkt bij de dissimilatieprocessen verbruikt kunnen worden; in de snel groeiende bonte vegetatiepunten en jonge blaren van de hop is in tegenstelling met die van Acer Negundo geen monose aan te tonen.

De resultaten met enkele woorden samenvattend, kunnen wij zeggen:

1°. De grote meerderheid (10 van de 12) van de onderzochte

[1]) SENFT, Sitzber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien 1904.

[2]) SÖRENSEN, Biochem. Zeitschr. 1909.

[3]) Zoowel de invertase uit 't bladpoeder van Acer Negundo als die van 't preparaat v. MERCK waren bij P. H waarde > 8 (MCLLVAINE's Standaaroplossing) werkzaam.

[4]) ATKINS, Notes Bot. School Trinity Coll. Dublin 1922.

objekten vertoont een verschil tussen de bonte en groene delen, wat betreft de oplosbare suikers. De eerste bevatten alleen sacharose, de laatste monosen en sacharose. Dit maakt waarschijnlik, dat monosen de primair bij de assimilatie gevormde koolhydraten zijn.

2°. In bonte blaren van Pelargonium zonale, die door plaatsing in 't donker suikervrij gemaakt waren, treden bij beginnende assimilatie eerst monosen op, daarna sacharose en zetmeel, wat de juistheid der konklusie sub 1 bevestigt.

3°. Welk der monosen primair gevormd wordt, is nog onzeker. Bij Pelargonium zonale schijnt fruktose onder de gevormde monosen te overwegen.

4°. De bonte, sacharose bevattende bladdelen, bevatten ook invertase. De verklaring, waardoor bij aanwezigheid dezer beide, in de levende weefsels geen inversie waarneembaar is, kan nog niet met zekerheid gegeven worden, verschil in lokalisatie der beide stoffen in de cel kan hierbij een rol spelen.

Geologie. — V. VAN STRAELEN: „*Description de Raniniens nouveaux des terrains tertiaires de Borneo*".

(Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en H. A. BROUWER).

Wiskunde. — F. KÖLMEL: „*Ueber die zu einem Punkte und einer Geraden gehörigen Polarkurven in Bezug auf eine gegebene algebraïsche Kurve*".

(Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en W. KAPTEYN).

(Deze mededeelingen zullen worden opgenomen in de "Proceedings" Vol. XXVI.)

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer H. ZWAARDEMAKER aangeboden, namens de Heeren F. H. QUIX en L. U. H. C. WERNDLY, het manuscript hunner verhandeling: „*De otolietdruk als functie van den schedelstand*".

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren L. BOLK en J. BOEKE met verzoek daarover in een volgende vergadering rapport uit te brengen.

Voor de boekerij der Akademie wordt een ex. der volgende dissertaties ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer F. A. F. C. WENT, namens den Heer J. P. BANNIER: „*Untersuchungen über apogame Fortpflanzung bei einigen elementaren Arten von Erophila verna*";

2. door den Heer W. DE SITTER, *a*. namens den Heer P. KRAMER: „*Discussie van Micrometerwaarnemingen van de Satellieten van Jupiter. Gedaan te Washington in de jaren* 1903—1906"; *b*. namens de Heeren J. SCHILT en J. H. OORT: „*The frequency of a component of the linear velocity for stars brighter than* $5^m.8$ *of spectral types F G K and M, derived from the proper motions of* Boss' *catalogue*".

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING OP ZATERDAG 29 DECEMBER 1923.

DEEL XXXII.

N°. 10.

Voorzitter: de Heer F. A. F. C. WENT.

Secretaris: de Heer L. BOLK.

INHOUD.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van de Heeren A. A. NIJLAND, P. ZEEMAN, L. E. J. BROUWER en P. EHRENFEST, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen. De Heer EHRENFEST bericht tevens dat hij, door zijn reis naar Amerika, ook bij de eerstvolgende vergaderingen niet zal kunnen tegenwoordig zijn.

Aangenomen voor kennisgeving.

2°. Mededeeling namens het „*Institut du Radium*" te Parijs dd. 1 December j.l. dat door de „*Fondation Curie*" den 26 December d.a.v. den 25^en^ jaardag van de ontdekking van het radium door het echtpaar CURIE zou worden herdacht, en dat bij die gelegenheid een plechtige zitting gehouden zou worden in de „Sorbonne", onder praesidium van den President der Fransche Republiek, tot bijwoning waarvan ook de leden onzer Akademie werden uitgenoodigd.

Naar aanleiding hiervan deelt de Voorzitter mede dat, namens de Akademie, aan haar buitenlandsch lid, Mevrouw MARIE SKLODOWSKA CURIE, een brief van gelukwensch is geschreven, welke door den Heer LORENTZ, die met den Heer ZEEMAN de Akademie bij deze gelegenheid vertegenwoordigd heeft, aan haar is overhandigd. Hij noodigt nu den Heer LORENTZ uit iets mede te deelen over de bijwoning der plechtigheden in Parijs, aan welke uitnoodiging bereidwillig wordt gevolg gegeven.

De Heer LORENTZ begint met een kort verslag te geven van de vergadering, waarin de „*Union internationale de Physique*" is tot stand gekomen, in welke vergadering hij en de Heer ZEEMAN tegenwoordig zijn geweest. Zij waren eveneens aanwezig bij de herdenking van het 50-jarig bestaan van de „*Societé française de Physique*". Gedurende deze herdenking, die een week duurde, werd o.m. eene tentoonstelling gehouden, geheel gewijd aan de radiotelegrafie. Hiervan interesseerde den Nederlandschen afgevaardigden speciaal de historische afdeeling.

Ook de plechtige zitting, onder voorzitterschap van President MILLERAND, en de vergadering, waarin het feit is herdacht dat een kwart eeuw geleden de Heer en Mevrouw CURIE het radium ontdekten, werd door den Heer LORENTZ bijgewoond. In die vergadering werd hulde gebracht aan de groote wetenschappelijke verdiensten van Mevrouw CURIE en tevens met eerbied en bewondering de nagedachtenis van wijlen haar geleerden echtgenoot, Prof. PIERRE CURIE, gehuldigd.

Bijzonder belangwekkend waren de demonstraties, welke na afloop der vergadering gehouden werden. Hierbij werden de eerste proeven

met radium herhaald en daarnaast werden de resultaten van de allerjongste onderzoekingen op dat gebied getoond.

De Voorzitter dankt den Heer LORENTZ voor het gegeven verslag.

3°. Mededeeling gedateerd 23 December jl. van de commissie, aan welke is opgedragen namens de Afdeeling te voldoen aan het verzoek van den Minister van O. K. en W. om Z.Exc. te adviseeren over een verbod van invoer van huiden van vogels enz., dat zij nog niet gereed is met haar prae-advies en, alvorens dat aan de Afdeeling uit te brengen, het wenschelijk acht de Heeren J. C. KONINGSBERGER, L. F. DE BEAUFORT en P. G. VAN TIENHOVEN als mede-adviseurs te assumeeren.

4°. Apostille van Z.Exc. den Minister van O. K. en W. dd. 24 November j.l. N°. 5171, Afd. K.W. met verzoek om bericht en raad over een missive van den Minister van Buitenlandsche Zaken dd. 20 November j.l. N°. 17172 Afd. Volkenbondzaken met een daaraan toegevoegde circulaire van den Volkenbond, betrekking hebbende op het vraagstuk van de hervorming van den kalender, en

Apostille van denzelfden Minister dd. 1 December j.l. N°. 5303 Afd. K.W. ter begeleiding van een tweede circulaire van den Volkenbond betrekkelijk hetzelfde onderwerp.

Volgens toelichting van den Voorzitter zijn deze stukken niet uitsluitend tot de wis- en natuurkundige Afdeeling der Akademie gericht, doch voor beide Afdeelingen bestemd. Hij stelt daarom voor, wat deze Afdeeling betreft, een paar harer leden aan te wijzen, die met leden van de letterkundige Afdeeling een commissie zullen vormen om in deze aangelegenheid van prae-advies te dienen. Met instemming der vergadering benoemt hij uit deze Afdeeling tot leden dier commissie de Heeren W. DE SITTER en A. A. NIJLAND. Aan beide Heeren, niet ter vergadering aanwezig, zal van die benoeming schriftelijk worden kennis gegeven.

Op verzoek van den Voorzitter brengt alsnu de Heer J. BOEKE, mede namens den Heer L. BOLK, het volgende rapport uit:

De in onze handen gestelde verhandeling van de Heeren F. H. QUIX en L. U. H. C. WERNDLY: „De otolietdruk als functie van den schedelstand", bestaat uit een anatomisch-physiologisch en een wiskundig gedeelte.

In het eerste deel wordt medegedeeld, op welke wijze de ligging van de otolieten op hun zintuigepithelium ten opzichte van den schedel is bepaald. Na te hebben beproefd den stand der otolieten in de doorzichtig gemaakte schedelbasis vast te stellen, en daarna

dien na te gaan aan wasreconstructies van doorsneden, welke beide methoden evenwel onvoldoende resultaten opleverden, bepaalden de schrijvers de ligging der otolieten door de schedelbasis te ontkalken en in celloidine in te sluiten, nauwkeurig georienteerde doorsneden van 100 μ tot 50 μ te vervaardigen, en in die doorsneden de ligging der otolieten en den hoek, dien het otolietenvlak met de als norm aangenomen Duitsche horizontale maakte, te meten, een methode derhalve, die zich ongeveer dekt met de door DE BURLET en zijn medewerkers aangewende methode om den stand der otolieten in den schedel te bepalen. Daar echter literatuuropgaven in de verhandeling ontbreken, kan niet worden nagegaan, in hoeverre deze reeds gepubliceerde opgaven van invloed zijn geweest op de keuze dezer methode. Ook blijft een vergelijking van de volgens deze methode door de schrijvers verkregen resultaten met de bovengenoemde opgaven van DE BURLET aangaande de ligging der otolieten achterwege.

De juistheid der verkregen resultaten is overigens niet uit de gegevens te controleeren, daar dit van de nauwkeurigheid van de fixatie en orientatie der preparaten en van de hoekmetingen af hangt. Waar echter de schrijvers aangeven, dat zij slechts aan volkomen goed gelukte preparaten hun metingen verrichten, en waar de tabellen een regelmatige groepeering der cijfers aangeven, schijnt wel een voldoende mate van nauwkeurigheid te zijn bereikt.

Uit den hoek, dien het otolietenvlak met het aangenomen horizontale vlak van den schedel (de schedelbasis) maakt, wordt dan de druk, dien de otolieten bij een gegeven schedelstand uitoefenen, berekend. Het bezwaar tegen de modelmethode ingebracht, dat een model slechts den stand der otolieten bij één bepaald individu aangeeft, en daarbij voorkomende individueele verschillen niet in het model tot uiting komen, wordt tegemoet gekomen door van elke diersoort in drie richtingen doorsneden te maken en van elke doorsnederichting minstens drie preparatenreeksen te meten, zoodat voor elke diersoort de getallen berusten op het onderzoek van minstens negen rotsbeenderen. Hierdoor wordt dus een gemiddelde van groote nauwkeurigheid bereikt, die door meting van bepaalde volkomen zuivere doorsneden en door wiskundige berekening van de tabellencijfers kan worden gecontroleerd. Zoo worden voor mensch, kat, konijn en cavia de waarden bepaald.

Het geheel der schedelstanden, waarin alle 4 otolieten in druk zijn, noemen de schrijvers de gele vlek van het statisch orgaan, die standen, waarin alle otolieten buiten druk zijn, de blinde vlek. Door projectie op een bolvormig oppervlak, waarbinnen de schedel in een

bepaalden stand is georienteerd, worden deze standen graphisch voorgesteld.

In het tweede, wiskundige gedeelte, worden de wiskundige berekeningen beschreven, die tot het opstellen der cijfers van de bijgevoegde tabellen en tot het invullen der graphische voorstellingen hebben geleid, en wordt de verandering van den druk bij draaiing van den schedel om bepaalde assen wiskundig berekend. Graphische voorstellen en tabellen verduidelijken dit gedeelte.

Bepaalde physiologische gevolgtrekkingen worden door de schrijvers uit de door hen berekende getallen niet afgeleid. Het geheel bedoelt ook slechts een mathematisch nauwkeurige vaststelling van den otolietendruk bij verschillende schedelstanden te geven. Als zoodanig zal deze verhandeling ongetwijfeld van waarde zijn en een belangrijke controle als basis voor verder onderzoek kunnen verschaffen. Op grond hiervan meenen ondergeteekenden dan ook aan Uwe Afdeeling te kunnen adviseeren deze verhandeling in de Werken van de Akademie te doen opnemen. Over de wijze van reproductie van eenige der bijgevoegde afbeeldingen (speciaal van tabel 10 en fig. 7) zal met den schrijver nog nader overleg moeten worden gepleegd.

BOLK
J. BOEKE

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van dit rapport tot opneming der verhandeling in de Werken der Akademie.

Aan de schrijvers zal hiervan worden kennis gegeven.

De Voorzitter geeft daarna het woord aan den Heer A. A. HIJMANS VAN DEN BERGH, die mede namens den Heer M. J. ROESSINGH eene mededeeling doet „Over den invloed van ijzer-toediening aan het organisme op de ademhaling der roode bloedlichaampjes". (Zie blz. 999).

Naar aanleiding van deze mededeeling doen de Heeren R. MAGNUS en J. W. VAN WIJHE eenige vragen, welke door den spreker beantwoord worden.

Vervolgens houdt de Heer R. MAGNUS, mede namens den Heer A. DE KLEYN, een voordracht, getiteld: „Bijdrage tot de functie van het vestibulaire apparaat". (Zie blz. 961).

Ten slotte spreekt de Heer ERNST COHEN, mede uit naam van den Heer A. L. TH. MOESVELD, over „De metastabiliteit der elementen en verbindingen als gevolg van enantiotropie of monotropie en haar beteekenis voor chemie, physika en techniek". VIII. (Zie blz. 959).

Natuurkunde. — J. SPIJKERBOER: „*Verspreiding van licht door onregelmatige breking en door moleculaire verstrooiïng*".

(Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en E. VAN EVERDINGEN JR.).

1. *Inleiding*. Zoowel bij de verklaring van de algemeene lichtverdeeling over de zonneschijf als bij de vraag naar de intensiteitsverdeeling in het zonnespectrum moet rekening worden gehouden met verstrooiïng door onregelmatige breking en met moleculaire verstrooiïng.

Kan moleculaire verstrooiïng voor een goed deel de oorzaak zijn, waardoor de intensiteitsvermindering [1]) van centrum naar rand der zonneschijf, ook voor verschillende golflengten, is zooals zij wordt waargenomen, 't is, zooals Professor JULIUS heeft aangetoond, de onregelmatige breking, die daarbij kan medewerken en tevens rekenschap kan geven van 't ontstaan van den scherpen zonsrand [2]).

Daar zoowel de onregelmatige straalkromming als de moleculaire verstrooiïng zeer aanzienlijk worden voor licht uit de onmiddellijke omgeving van absorptielijnen [3]), moet worden aangenomen dat de lijnen van FRAUNHOFER absorptielijnen zijn, die omhuld worden door dispersiebanden.

Zoowel bij beschouwing van „den opbouw der zonnestraling" [4]) als bij die van „'t verband tusschen de verbreeding en den onderlingen invloed van dispersielijnen in het spectrum van den zonnerand" [5]) rijst de vraag naar den meerderen of minderen invloed van de moleculaire verstrooiïng of van de brekingsverstrooiïng. Daarbij is tot nu toe geen rekening gehouden met den invloed dier beide verstrooiïngen op elkaar.

Doel van deze verhandeling is na te gaan hoe we ons dien wederkeerigen invloed moeten voorstellen en welke gevolgtrekkingen daaruit zijn af te leiden. Ik meen dat die gevolgtrekkingen niet buiten beschouwing zullen mogen blijven.

2. *Verstrooiïng door onregelmatige breking*. In een verhandeling „Regelmatige gevolgen van onregelmatige straalbreking in de zon" [6])

---

1) J. SPIJKERBOER, Verstrooiïng van licht en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf. Proefschrift. Utrecht 1917; Arch. néerl., IIIA, V, 1, 1918.

2) W. H. JULIUS, Astroph. Journ., **38**, 129, 1913.

3) W. H. JULIUS, Versl. Kon. Ak. v. Wet., **18**, 181, 1909; **18**, 913, 1910; **19**, 1007, 1911; Handwörterbuch der Naturwissenschaften, VII, 832.

4) P. H. VAN CITTERT, Versl. Kon. Ak. v. Wet., **27**, 1445, 1919.

5) W. H. JULIUS en M. MINNAERT, Versl. Kon. Ak. v. Wet., **32**. **4**, 487, 1923.

6) W. H. JULIUS, Versl. Kon. Ak. v. Wet., **18**, 181, 1909.

heeft Professor JULIUS in 1909 de vraag beantwoord, wat de invloed moet zijn van anomale dispersie op de breedte der z.g. absorptielijnen in het zonnespectrum, indien door de geheele zonne-atmosfeer heen dichtheidsgradiënten bestaan, die op vele plaatsen van dezelfde orde van grootte worden ondersteld als in de vlekken, doch die meermalen van teeken wisselen.

Bevindt zich in de zonne-atmosfeer een bolvormig gebied C

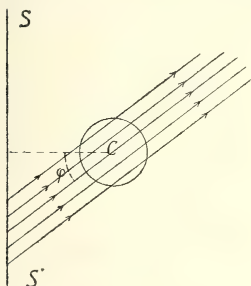


Fig. 1.

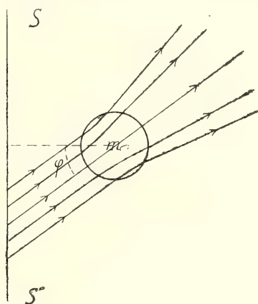


Fig. 2.

(fig. 1), waarbinnen de dichtheid niet afwijkt van die der omgeving, dan zal de straling, die onder een hoek φ met de normaal het oppervlak SS' [1]) verlaat, zonder verandering van richting dat gebied C doordringen.

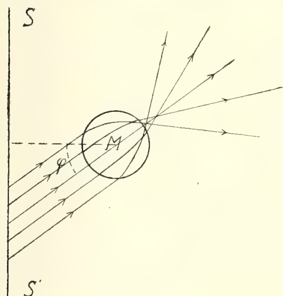


Fig. 3.

In een gebied met een dichtheidsgradiënt zóódanig, dat de dichtheid in m (fig. 2) een minimum is, wordt de invallende bundel pluimvormig verbreed; hetzelfde geldt indien in dat bolvormige gebied een dichtheidsgradiënt heerscht met een maximum van dichtheid in M (fig. 3) [2]). Deze pluimvormige verbreeding zal in sterke mate afhankelijk zijn van

[1]) We kunnen veronderstellen, dat het oppervlak SS' zóó diep binnen de zonneatmosfeer is gelegen, dat de straling daar de cosinuswet volgt; ook kunnen we aannemen, dat het oppervlak SS' zóó is gedacht, dat daarbuiten de uitstraling zóó gering is, dat deze een te verwaarloozen fractie van de totale uitgezonden energie is; we noemen het oppervlak SS' verder kernoppervlak.

[2]) Zie ook een verhandeling van L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE, Versl. Kon. Ak. v. Wet., 25, 1478, 1917.

de wijze waarop binnen de gebieden m en M de dichtheid verandert; de lichtstralen zullen in verschillende gevallen een geheel ander verloop vertoonen dan in fig. 2 en fig. 3, doch steeds zal die verbreeding, zoowel indien 't geval van een maximum als indien dat van een minimum van dichtheid zich voordoet, veranderen met het refractievermogen in de atmosfeer en dus afhangen van dichtheid en refractie-constante. De verbreeding zal dus groot worden voor licht van een golflengte, die weinig verschilt van de golflengte eener geabsorbeerde trilling, indien ten minste de dichtheid van het bestanddeel, dat de absorptielijn levert, niet te klein is.

Zoo kan, indien hoek φ grooter wordt of indien het refractievermogen aanzienlijker is dan voor de in fig. 2 en fig. 3 geteekende gevallen voor een bepaalde frequentie een deel der invallende straling naar het kernoppervlak SS' terugkeeren en dus de zon niet verlaten.

Door integratie om de normaal uit C op SS' (over 2π) en over φ (van 0 tot $\frac{\pi}{2}$) vindt men de straling, die 't gebied C binnendringt en die de zon ook zou verlaten als er geen straalkromming was.

Rekenen wij wel met straalkromming, dan keert van de invallende energie uit m of M een gedeelte naar 't kernoppervlak terug en wel een des te grooter deel naarmate, bij dezelfde dichtheidsveranderingen, het refractievermogen aanzienlijker is.

Door alleen te letten op 't effect van de straalbreking en door aan te nemen dat er tal van die gebieden m en M in de zonneatmosfeer zijn, moeten wij besluiten dat in de dichter bij SS' gelegen gebieden ook straling kan dringen, die binnen verder van 't kernoppervlak verwijderde gebieden zóó werd gebogen dat ze naar SS' terugkeerde; van deze op M of m onder een hoek $\varphi > 90°$ invallende energie zal een deel weer naar buiten kunnen gaan door de breking in die dichterbij gelegen gebieden. Wat van de teruggezonden straling op deze wijze toch nog naar buiten treedt zal echter van geringe beteekenis zijn, in ieder geval slechts een kleine fractie van de intensiteit, die van de straling door de eerste kromming niet naar buiten werd gezonden.

3. *Moleculaire verstrooiïng.* Beschouwen wij thans het geval, dat alleen met moleculaire verstrooiïng in de zonne-atmosfeer wordt gerekend.

SS' zij weer 't kernoppervlak; EE' een grenslaag, waarbuiten geen verstrooiende deeltjes meer aanwezig zijn.

Loodrecht op SS' kiezen we een coördinaat x, die de ver-

strooiende massa meet en waarvoor de aangroeiïng, zoolang de dichtheid in de richting loodrecht op SS' niet verandert, gelijk is aan het product van den verstrooiïngscoëfficiënt s in het beschouwde gebied en de verplaatsing t loodrecht op SS'. Voor een bepaald punt P binnen de atmosfeer geeft x dus aan de som der waarden st tusschen de grenslaag en dat punt. Omdat de dichtheid en dus s naar SS' zal toenemen, moet, wanneer voor EE' $x=0$ en voor SS' $x=H$ wordt gekozen, een punt waarvoor $x=\frac{1}{2}H$ dichter bij A dan bij B worden gedacht. Op de verdere beschouwing heeft deze veronderstelling geen invloed. Men kan de plaats van de te bestudeeren laag telkens passend kiezen.

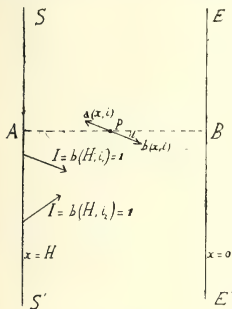


Fig. 4.

Voor straling, die een hoek i maakt met de normaal AB, onderscheiden we straling b, van SS' zich verwijderend, en straling a, naar SS' terugkeerend. a en b hangen, behalve van i, af van x.

De grensvoorwaarden zijn: 1e $b(H,i)$ is onafhankelijk van i en gelijk aan de vanuit het kernoppervlak invallende straling welke we 1 stellen (daardoor vinden we dus a en b als fracties van die eenheid); [1])

2e $a(0,i)=0$.

Als oplossing voor a en b vinden we:

$$a(x,i)=\int_0^x I(\xi)\, e^{(\xi-x)\sec i} \sec i\, d\xi, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$b(x,i)=e^{(x-H)\sec i}+\int_x^H I(\xi)\, e^{(x-\xi)\sec i} \sec i\, d\xi, \quad \ldots \quad (2)$$

waarin

$$I(\xi)=\tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\xi,i)\sin i\, di+\int_0^{\frac{\pi}{2}} b(\xi,i)\sin i\, di\right\}.$$

[1]) Zou men zich, in aansluiting aan noot 1 op pag. 935, SS' zóó denken, dat daarbuiten de uitstraling gering zou zijn, dan was de 1e grensvoorwaarde niet vervuld; deze kwestie is echter, hoewel voor de lichtverdeeling over de zonneschijf van groot gewicht, hier van minder belang.

TABEL I $H = 8.$

	$\cos i = 1$	$\cos i = 0.8$	$\cos i = 0.6$	$\cos i = 0.4$	$\cos i = 0.2$	$\cos i = 0.0$
$b\,(H,i) =$	1	1	1	1	1	1
$a\,(H,i) =$	0.83	0.86	0.88	0.90	0.92	0.94
$b\,(\frac{H}{2},i) =$	0.61	0.59	0.57	0.54	0.52	0.50
$a\,(\frac{H}{2},i) =$	0.39	0.41	0.43	0.46	0.48	0.50
$b\,(\frac{H}{4},i) =$	0.39	0.37	0.34	0.32	0.30	0.28
$a\,(\frac{H}{4},i) =$	0.17	0.19	0.21	0.23	0.26	0.28
$b\,(0,i) =$	0.17	0.14	0.12	0.10	0.08	0.06
$a\,(0,i) =$	0	0	0	0	0	0

TABEL II $H = 4.$

	$\cos i = 1$	$\cos i = 0.8$	$\cos i = 0.6$	$\cos i = 0.4$	$\cos i = 0.2$	$\cos i = 0.0$
$b\,(H,i) =$	1	1	1	1	1	1
$a\,(H,i) =$	0.70	0.74	0.78	0.82	0.86	0.90
$b\,(\frac{H}{2},i) =$	0.69	0.66	0.62	0.58	0.54	0.50
$a\,(\frac{H}{2},i) =$	0.31	0.34	0.38	0.42	0.46	0.50
$b\,(\frac{H}{4},i) =$	0.50	0.46	0.42	0.38	0.34	0.30
$a\,(\frac{H}{4},i) =$	0.14	0.16	0.18	0.22	0.26	0.30
$b\,(0,i) =$	0.30	0.26	0.22	0.18	0.14	0.10
$a\,(0,i) =$	0	0	0	0	0	0

TABEL III $H = 1.$

	$\cos i = 1$	$\cos i = 0.8$	$\cos i = 0.6$	$\cos i = 0.4$	$\cos i = 0.2$	$\cos i = 0.0$
$b\,(H,i) =$	1	1	1	1	1	1
$a\,(H,i) =$	0.34	0.39	0.46	0.55	0.65	0.75
$b\,(\frac{H}{2},i) =$	0.85	0.82	0.78	0.71	0.61	0.50
$a\,(\frac{H}{2},i) =$	0.15	0.18	0.22	0.29	0.39	0.50
$b\,(\frac{H}{4},i) =$	0.76	0.72	0.66	0.58	0.48	0.38
$a\,(\frac{H}{4},i) =$	0.07	0.08	0.11	0.15	0.23	0.38
$b\,(0,i) =$	0.66	0.61	0.54	0.45	0.35	0.25
$a\,(0,i) =$	0	0	0	0	0	0

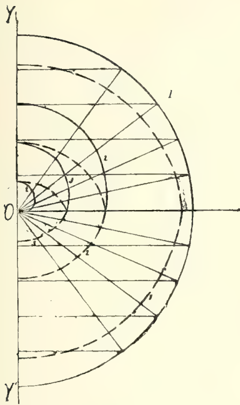


Fig. 5.

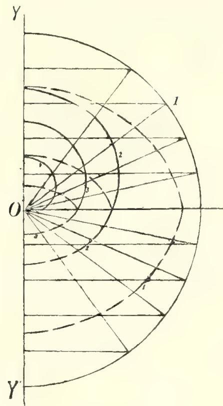


Fig. 6.

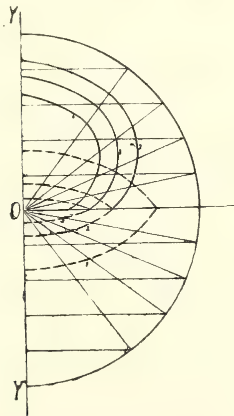


Fig. 7.

Volgens een benadering, welke SCHWARZSCHILD „benadering volgens SCHUSTER" noemt[1]), wordt gevonden $I = \frac{\xi + 0,5}{H+1}$.

Invullende in (1) en (2) krijgt men:[2])

$$a(x,i) = \frac{x + 0,5 - \cos i}{H+1} + e^{-x \sec i} \frac{\cos i - 0,5}{H+1}, \quad . \quad . \quad (1')$$

$$b(x,i) = \frac{x + 0,5 + \cos i}{H+1} + e^{(x-H) \sec i} \frac{0,5 - \cos i}{H+1} \quad . \quad . \quad (2')$$

Was het mij vroeger om de waarde $b(0, i)$ te doen, ik wil nu in het bijzonder de aandacht vestigen op de stralingssterkten a en b voor verschillende waarden van x en i, bij eenige waarden van H. (Zie de tabellen op de hier voorgaande pag. 938).

SCHWARZSCHILD heeft aangetoond, dat de benadering, welke langs dezen weg wordt verkregen, een zeer goede is. Hoewel de waarden $b(0, i)$ in de verschillende gevallen nauwkeuriger bekend zijn, heb ik ook daarvoor in bovenbedoelde tabellen de benaderde waarde gegeven.

In de figuren 5—7 (p. 939) is het resultaat der berekeningen overzichtelijk (fig. 5 voor $H = 8$; fig. 6 voor $H = 4$; fig. 7 voor $H = 1$).

Op de voerstralen uit O is voor de hoeken, waarvoor de cosinus de in de tabellen gebruikte waarden bezit, vanuit O de straling a en b afgezet. De hoeken zijn, zooals de figuren laten zien, genomen met OY als vast been.

De doorgetrokken lijnen gelden voor de b-straling, de niet doorgetrokken lijnen voor de a-straling.

De intensiteit der a-straling is bovendien uitgezet op de voerstralen uit O, die de hoeken geven gerekend vanuit OY'.

Op deze wijze krijgt men om O krommen, welke voor punten als P in fig. 4 de stralingssterkten geven in een vlak door AB voor richtingen tusschen PA en PB.

Bij wenteling van zulk een kromme om YY' als as ontstaat het bestralingsoppervlak van P.

De lijnen 1, 2, 3 en 4 behooren respectievelijk bij $x = H$, $x = \frac{1}{2}H$, $x = \frac{1}{4}H$ en $x = 0$.

De niet doorgetrokken lijn 1 zou in de X-as behooren aan te sluiten bij de doorgetrokken lijn 1; de benadering, welke wel voor al de andere lijnen doch niet voor de doorgetrokken lijn 1 noodig was, maakt dat deze aansluiting ontbreekt.

[1]) Zie K. SCHWARZSCHILD, Sitzungsberichte Kön. Pr. Ak. d. Wiss., **47**, 1183, 1914 en A. SCHUSTER, Astroph. Journal, **21**, 1, 1905.

[2]) Zie J. SPIJKERBOER, dissertatie Utrecht, 45, 1917; Arch. néerl., IIIA, **V**, p. 45, 1918.

Ook de moleculaire verstrooiïng laat een deel der uit SS' tredende straling naar 't kernoppervlak terugkeeren. Voor groote waarden van H is dit zelfs een zeer belangrijk deel.

Brekingsverstrooiïng en moleculaire verstrooiïng helpen dus beide mee tot een zuinig verbruik van de binnen 't kernoppervlak aanwezige en naar buiten uitgestraalde energie, die langzamer uittreedt dan zonder verstrooiïng het geval zou zijn [1]).

4. *Een atmosfeer met brekingsverstrooiïng en moleculaire verstrooiïng.* Ten slotte vragen we ons af, wat de gevolgen van onregelmatige breking zullen zijn in een atmosfeer, waarin tevens de moleculaire verstrooiïng van belang wordt geacht. We denken ons daartoe weer de verstrooiende atmosfeer van § 3, doch thans met gebieden, waarbinnen de dichtheid merkbaar afwijkt van die der omgeving, gebieden M en m dus. Bevindt zich zulk een gebied dicht bij SS', waar x ongeveer H is, dan hebben we er rekening mede te houden, dat behalve de b-straling nu ook de a-straling van beteekenis kan zijn.

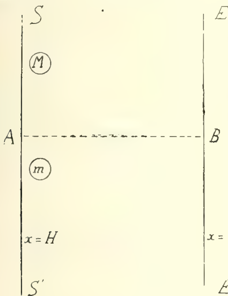


Fig. 8.

Uit de tabellen van § 3 volgt, dat voor groote waarden van H de a-straling niet veel voor de b-straling onderdoet, dat voor kleinere waarden van H de a-straling in elk geval, vergeleken met de b-straling, niet te verwaarloozen valt.

Was de a-straling gelijk aan de b-straling (ook voor veranderende waarden i) dan zou de verstrooiïng door onregelmatige breking verdwijnen.

Wij besluiten dus: in een atmosfeer met moleculaire verstrooiïng zullen gebieden, waar de dichtheid onregelmatig verandert

[1]) Het is niet onmogelijk dat dezelfde kwestie van belang is in de aardsche atmosfeer voor de verklaring van 't afnemen van de temperatuur van de luchtlagen van de aarde af; de aardsche atmosfeer wordt bestraald met evenwijdige straling; de a-straling zal daardoor voor de invallende straling weinig belangrijk zijn; voor de door de aarde weer uitgestraalde energie, waarbij met straling van verschillende richting is te rekenen, zal de a-straling belangrijker zijn; bovendien zal, daar de dichtheid bij 't aardoppervlak grooter is, het vlak $\frac{H}{2}$ dicht bij 't aardoppervlak zijn gelegen; en voor straling van groote golflengte is bovendien H veel aanzienlijker; het vertragingsproces zal dus sterker wegen voor de naar buiten uittredende dan voor de invallende straling. Bedoeld wordt natuurlijk dat deze kwestie mede een rol kan spelen.

en die diep in die atmosfeer liggen, van zeer geringen of minderen invloed zijn op de lichtverdeeling over de verschillende richtingen en op de intensiteit der uittredende straling al naar gelang de verstrooiende atmosfeer dieper of minder diep is (diep genomen in den zin, dat $s \times t$ groot is; 8 of meer is daarbij groot te noemen).

Bevindt zich een gebied M of m op een diepte $x = \frac{1}{2}H$, dan geraakt de beteekenis van de a-straling ten opzichte van die der b-straling op den achtergrond. De brekingsverstrooiïng gaat invloed winnen. Toch blijft ook nu nog voor groote waarden H de a-straling belangrijk en de invloed der breking gering; voor kleine waarden H moet nog met de a-straling gerekend. Gebieden M of m, die dicht bij EE' liggen, laten den invloed der brekingsverstrooiïng in vollen omvang gelden.

En eindelijk beschouw ik de vraag of nu, indien in de buitenste lagen sterke onregelmatige breking wordt aangenomen, de rol, die de moleculaire verstrooiïng zal spelen, gering kan worden geacht. Zeker zal dat niet mogen worden aangenomen voor straling, die in het spectrum niet thuis behoort in de onmiddellijke omgeving van een geabsorbeerde trilling. Want voor zulke straling is de onregelmatige breking niet anomaal en de bestraling van de gebieden M of m, die dicht bij EE' zijn gelegen, wordt sterk door de moleculaire verstrooiïng beheerscht; op de gebieden M of m valt daar de straling $b\,(0, i)$, die in sterke mate verandert in intensiteit voor andere waarden i.

Maar ook voor straling, wel uit de omgeving van een absorptielijn (absorbeerend bestanddeel binnen M of m), waarvoor dus de onregelmatige breking anomaal wordt, kunnen we niet zeggen, dat de moleculaire verstrooiïng haar rol niet speelt. Om twee redenen! Indien n.l. ook in de diepere lagen van hetzelfde absorbeerende bestanddeel aanwezig is zal straling van een frequentie van de naaste omgeving der absorptielijn, vóór dat zij de gebieden M en m bereikt, ten gevolge van anomale moleculaire verstrooiïng reeds zóó verzwakt kunnen zijn, dat de dispersieband (door moleculaire verstrooiïng) ook in het spectrum van de straling, die de gebieden M en m nog doordringen moet, reeds aanwezig zal zijn. En indien de gebieden van onregelmatige breking ontstaan door de beweging van gasmassa's kan 't ook, dat in zulk een gebied M of m het absorbeerende bestanddeel betrekkelijk rijkelijk aanwezig is, hoewel daarbuiten veel minder. Dan zou dus ook in die gebieden M en m de anomale moleculaire verstrooiïng aanzienlijk zijn, terwijl buiten die gebieden de laag als weinig verstrooiend wordt beschouwd.

Bussum, November 1923.

Scheikunde. — ERNST COHEN en J. KOOY: *„De Metastabiliteit der Elementen en Verbindingen als gevolg van Enantiotropie of Monotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek."* VII.

1. In een aantal mededeelingen [1]) onder bovenstaanden titel hebben wij er op gewezen, dat vele, zoo niet alle stoffen, ten gevolge van het optreden van vertragingen in de omzettingen der modifikaties, in welke zij zich kunnen voordoen, *mengsels* zijn van verschillende modifikaties. Ten gevolge daarvan zijn de physische eigenschappen, die men tot dusverre aan die stoffen heeft toegeschreven, feitelijk die van *mengsels* van onbekende samenstelling, zoodat beteekenis daaraan niet kan worden toegekend. Het bepalen van de physische konstanten der afzonderlijke *zuivere* modifikaties behoort dan ook als een desideratum te worden beschouwd.

Aan de reeds vroeger behandelde gevallen moge in het volgende een nieuw, sterk sprekend voorbeeld worden toegevoegd.

2. Reeds FRANKENHEIM [2]) heeft in het jaar 1854 ontdekt, dat ammoniumnitraat polymorph is. Terwijl hij slechts twee modifikaties heeft beschreven, kon O. LEHMANN [3]) later bewijzen, dat er vijf stabiele vormen bij gewonen druk kunnen bestaan. Daaraan is enkele jaren geleden door BRIDGMAN [4]) een zesde toegevoegd, die slechts onder hoogen druk stabiel kan zijn.

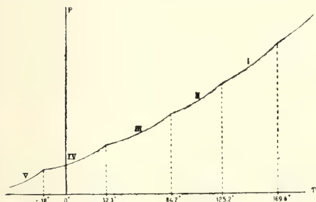


Fig. 1.

Fig. 1 geeft (qualitatief) het p-t-diagram der modifikaties, die bij

1) Deze Verslagen **24**, 886, 1001, 1374 (1915—1916); **25**, 743 (1916—1917); **28**, 602, 762 (1919—1920). Ook Zeitschr. f. physik. Chemie **94**, 450, 465, 471 (1920).

2) Pogg. Ann. **93**, 17 (1854).

3) Dissertatie Strassburg 1876; Zeitschr. f. Kristallogr. **1**, 97 (1877). WALLERANT, Bull. Soc. franc. de minéralogie 1905, p. 311. C. R. **142**, 217 (1906). BEHN, Proc. Roy. Soc. London (A) **80**, 444 (1908).

4) Proc. Americ. Acad. of Arts and Sciences **51**, 581 (1916).

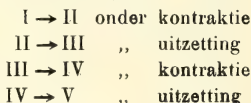
gewonen druk in stabielen toestand kunnen optreden. Terwijl het smeltpunt dan bij 169°.6 ligt, kunnen de volgende omzettingen plaats vinden:



$\overset{125°.2}{\text{I} \leftrightarrows \text{II}}$; $\overset{86°.2}{\text{II} \rightleftarrows \text{III}}$; $\overset{32°.3}{\text{III} \rightleftarrows \text{IV}}$ $\overset{-18°}{\text{IV} \rightleftarrows \text{V}}$.

De verschillende modifikaties kristalliseeren in de volgende vormen: I kubisch; II hexagonaal-rhomboëdrisch; III β-rhombisch; IV α-rhombisch; V tetragonaal[1]).

Ter algemeene oriënteering zij nog vermeld, dat de overgang



I → II onder kontraktie
II → III „ uitzetting
III → IV „ kontraktie
IV → V „ uitzetting

plaats heeft.

3. Reeds het feit, dat de meeste waarnemers op dit gebied zeer verschillende waarden voor de overgangstemperatuur III $\rightleftarrows$ IV hebben gevonden[2]), al naar mate bij stijgende of dalende temperatuur werd gewerkt (de uitersten liggen tusschen 31° en 36°), wijst op de sterke vertragingen, die deze omzetting kan vertoonen. BEHN[3]) heeft gevonden, dat II zelfs van 83° tot 45° kan worden afgekoeld zonder zich in III om te zetten. Buitendien worde hier gewezen op BEHN's waarneming, dat V in kontakt met IV zich zelfs bij + 18° C. niet omzet. BRIDGMAN vermeldt dan ook „*that ammonium nitrate is a substance for which it is particularly difficult to force the reaction from one phase to another to run to completion.*"

Ook bij andere stoffen heeft hij dit waargenomen, geheel dus in overeenstemming met hetgeen wij in vroegere mededeelingen te dezer zake hebben vermeld.

4. Nu heeft BRIDGMAN een reeks zorgvuldige onderzoekingen uitgevoerd over het thermodynamisch gedrag van talrijke stoffen, waaronder ook het ammoniumnitraat[4]). In die, waarin hij den invloed van druk op de polymorphe omzettingen der univalente nitraten behandelt, heeft hij o. m. voor dit zout de grootheden

$$\frac{dT}{dp} \text{ en } (v_{III} - v_{IV}),$$

[1]) Voor de belangrijke vraag of II en V identiek zijn, verwijzen wij naar BEHN, Proc. Roy. Soc. London (A) **80**, 444 (1908) en WALLERANT, zie noot 3 op blz. 943, Zie ook BRIDGMAN, Proc. Americ. Acad. of Arts and Sc. **51**, 581 (1916).

[2]) Overzicht bij EARLY en LOWRY, Journ. Chem. Soc. London **115**, 1387 (1919).

[3]) Zie noot 3 op blz. 943.

[4]) Proc. Americ. Acad. of Arts and Sciences **51**, 581 (1916).

voorkomende in de vergelijking van CLAPEYRON-CLAUSIUS

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_{III}-v_{IV})}{W}$$

experimenteel bepaald en daaruit de waarde van W berekend. Hierin stelt p den druk, T de absolute temperatuur van het overgangspunt der onderzochte modifikaties, v_{IV} en v_{III} haar specifieke volumina bij die temperatuur, W haar overgangswarmte voor. Tabel I bevat de resultaten voor den overgang III ⇄ IV.

TABEL I.

Druk in Kg/cm².	Temp.	$v_{III}-v_{IV}$ cc./gram.	$\frac{dT}{dp}$
1	32°.0	0.02026	0.0311
200	38°.5	0.02051	0.0336
400	45°.4	0.02077	0.0360
600	52°.9	0.02102	0.0385
800	60°.8	0.02128	0.0410

Op grond van het boven meegedeelde leek het ons zeer waarschijnlijk, dat de hier bepaalde waarden van $v_{III}-v_{IV}$ foutief zijn en wel te klein ten gevolge van de vertragingen, die bij den overgang intreden. Mocht zulks inderdaad het geval wezen, dan zoude daarmede opnieuw het bewijs worden geleverd, dat ten gevolge der metastabiliteit der stoffen slechts dan physische konstanten met scherp gedefinieerde beteekenis kunnen worden verkregen, indien men die voor de *zuivere* modifikaties dier stoffen heeft bepaald.

5. Wij hebben ons ten doel gesteld langs verschillende wegen (geheel afwijkende van de wijze, door BRIDGMAN gevolgd), de waarde van $v_{III}-v_{IV}$ voor den overgang IV ⇄ III van ammoniumnitraat bij de overgangstemperatuur onder 1 atm. druk te bepalen, ten einde die te kunnen vergelijken met het door BRIDGMAN verkregen cijfer ($0.02026 \frac{cc.}{gr}$, vergel. Tabel I).

Dit was bepaald door bij 32°.0 C. de verschuiving te meten, die de zuiger van zijn kompressieapparaat onderging, wanneer de omzetting IV ⇄ III plaats vindt.

Oudere bepalingen van $(v_{III}-v_{IV})$.

6. Men vindt in de literatuur twee onderzoekingen over $(v_{III}-v_{IV})$, voorafgaande aan die van BRIDGMAN. Het eerste onderzoek, langs

dilatometrischen weg uitgevoerd, is van BELLATI en ROMANESE [1]). Zij geven voor modifikatie IV de vergelijking:

$$(v_{IV})_{t^0} = v_0 (1 + 0.000339t + 0.000000\ 346t^2) \quad . \quad . \quad (1)$$

geldende tusschen 0° en 35°. Voor modifikatie III vinden zij:

$$(v_{III})_{t^0} = v_0 (1.04957 - 0.00038756t + 0.000008976t^2 - 0.000.0000432t^3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

geldende tusschen 40° en 85°, waarin v_0 het spec. volume van IV bij 0° C. voorstelt.

Neemt men (geheel willekeurig) met de schrijvers aan (zij hebben het overgangspunt bij verwarming bij 35°, bij afkoeling bij 31° gevonden), dat 35° de ware overgangstemperatuur is, dan vindt men uit verg. (1): $(v_{IV})_{35^0} = 1.01228\, v_0$ en uit (2): $(v_{III})_{35^0} = 1.04514\, v_0$, dus voor de volumeverandering $(v_{III} - v_{IV})_{35^0} = 0.03286\, v_0$

BELLATI en ROMANESE geven voor de dichtheid van IV bij 0° C. de waarde 1.674 en meenen voor de juistheid van dat cijfer steun te vinden in het feit, dat het juist het gemiddelde is van de waarden, door JOULE en PLAYFAIR (1.635, drie bepalingen) en SCHRÖDER (1.737, twee bepalingen) gevonden.

Voor de volumeverandering III → IV per gram zout vinden BELLATI en ROMANESE dan $\frac{0.03286}{1.674} = 0.0196^3\ \frac{cc.}{gr.}$ Het zooeven medegedeelde doet wel zien, dat aan de hier gevonden waarde van $v_{III} - v_{IV}$ beteekenis niet kan worden gehecht.

Een tweede bepaling van deze volumeverandering hebben wij aan BEHN [2]) te danken. Een uitvoerige mededeeling over zijn onderzoek heeft hij niet gegeven. Aan het beknopte verslag kan worden ontleend, dat hij voor de overgangstemperatuur IV ⇄ III langs dilatometrischen weg 32° heeft gevonden, en dat de volumeverandering 3.8 procent van het volume bij 20° bedraagt, terwijl BEHN voor de dichtheid van IV bij 20° de waarde 1.725 heeft gevonden. Uit deze gegevens vindt men voor $v_{III} - v_{IV}$ bij 32° de waarde $0.022\ \frac{cc.}{gr.}$, een bedrag, dat niet minder dan 12 procent afwijkt van de waarde, door BELLATI en ROMANESE bepaald.

---

[1]) Atti del R. Istituto Veneto **4** (VI) 1395 (1886); ook Il nuovo Cimento (3) **21**, 1 (1887).

[2]) Zie noot 3 op blz. 943.

Het bepalen van $v_{III}-v_{IV}$.

A. Bepaling der overgangstemperatuur.

7. Daar wij $v_{III}-v_{IV}$ moeten kennen bij de overgangstemperatuur IV $\rightleftarrows$ III en die temperatuur, zooals boven gezegd, door verschillende auteurs zeer verschillend is gevonden, hebben wij allereerst getracht een betrouwbare waarde daarvoor vast te stellen. Toen ons onderzoek was afgesloten, bleek, dat EARLY en LOWRY reeds enkele jaren geleden [1]) een uitvoerig onderzoek in deze richting hadden uitgevoerd; hun resultaat wijkt, gelijk men beneden zal zien, slechts zeer weinig af van het onze.

Ons ammoniumnitraat werd verkregen door omkristalliseeren uit een reeds vrij zuiver produkt en droging in vakuo boven P_2O_5 (dat wij herhaaldelijk ververschten), waarbij het zout, dat water hardnekkig vasthoudt, telkens werd fijngewreven, ten einde de vakuolen te openen. Men droogde totdat ook na drie dagen gewichtsverandering niet kon worden waargenomen. Verontreinigingen konden in het eindprodukt niet worden aangetoond, terwijl 5 gr. van het zout bij verhitting geheel vervluchtigde.

Het voorloopig dilatometrisch onderzoek (inhoud van den dilatometer ± 50 cc.) leverde de resultaten, vermeld in Tabel II.

TABEL II.

Temperatuur.	Verandering van het niveau in de kapillair per 45 min.
33°.0	+ 75 mm.
32°.1	— 25 »
32°.5	+ 25 »
32°.3	0 »

Nu hebben echter EARLY en LOWRY [2]) langs dilatometrischen weg 32°.1 voor de overgangstemperatuur gevonden.

Daar onze voorloopige bepaling een resultaat leverde, dat 0°.2 daarvan afwijkt, hebben wij de metingen met een grootere hoeveelheid zout herhaald. EARLY en LOWRY gebruikten een dilatometer van ± 60 cc. inhoud, dien zij voor drie kwart met zout vulden.

[1]) Journ. Chem. Soc. London **115**, 1387 (1919).

[2]) Journ. Chem. Soc. London **115**, 1387 (1919).

Wij bedienden ons van een dilatometer van ± 100 cc., waarin 65.6 gr. droog zout werd ingewogen. Dit preparaat had na zuivering gedurende een maand boven zwavelzuur gestaan. Onze kapillair had een diameter van 1 mm. (EARLY en LOWRY geven de wijdte hunner buis niet op.)

Nadat wij 50 % van modifikatie IV in III hadden omgezet, bestudeerden wij de volumeverandering in een thermostaat bij verschillende temperaturen.

Tabel II^a bevat de resultaten.

TABEL II*a*.

Temperatuur.	Tijd in uren.	Verandering van den stand van den meniskus in mm.	Verandering per uur.
32°.16	24	— 126.3	— 5.2
32°.18	17½	— 27	— 1.5
32°.24	20⅓	— 5.7	— 0.28
32°.30	25	— 1	— 0.04
32°.40	12	+ 1	+ 0.08
32°.50	23	+ 29	+ 1.3

Wij vinden hier dus, als bij onze oriënteerende proef, de overgangstemperatuur bij 32°.3. Onze thermometer (in $^1/_{10}$ graden verdeeld) was door de Phys. Techn. Reichsanstalt te Charlottenburg-Berlin gekontroleerd. Wij hebben ons er van overtuigd, dat het nulpunt onveranderd was gebleven.

B. Eerste Methode ter bepaling van $(v_{III} — v_{IV})$.

8. Men bepaalt v_{III} en v_{IV} elk afzonderlijk bij de overgangstemperatuur en leert daardoor het verschil kennen. Daar wij voor andere doeleinden v_{III} bij 32°.50, v_{IV} bij 32.0° C. hadden gemeten volgens de fraaie methode, die ANDREAE[1]) beschreven heeft ter bepaling van de dichtheid van vaste stoffen, geven wij de resultaten van dit onderzoek hier in de eerste plaats, opmerkende, dat men daaruit door korrektie der gevonden waarden voor de temperatuur van het overgangspunt, de gezochte spec. volumina bij die temperatuur kan berekenen. Deze methode heeft twee nadeelen: ten eerste de noodzakelijkheid, dat de bedoelde korrektie moet worden

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **82**, 109 (1913).

aangebracht, en ten tweede, dat uiterst geringe fouten in de grootheden, die bij de bepaling een rol spelen, op het resultaat een vrij belangrijken invloed oefenen. De later te beschrijven tweede methode is dan ook boven deze te verkiezen.

9. Daar hier, met het oog op de bizondere eigenschappen van ammoniumnitraat, dat in drogen toestand en met waterdamp reeds bij ± 100° vluchtig is, moest worden afgeweken van den weg, door Andreae beschreven, worde in het volgende de gang van zaken uitvoeriger toegelicht.

De gebruikte pyknometer (Fig. 2) had een bol C van ± 25 cc. inhoud. De buis B is ongeveer 3 mm. wijd en van een ingeëtste millimeterverdeeling voorzien; zij eindigt in den trechter A.

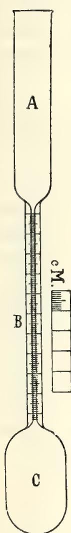


Fig. 2.

Na elke proef wordt (bij de temperatuur der proef) door uitwegen met water de inhoud van den bol en die van de buis B tot aan de streep, die bij die proef bereikt werd, bepaald.

Na weging van den gedroogden toestel brengt men een oplossing van het zout, bij ± 100° verzadigd, in den bol C en plaatst het geheel in een thermostaat van de temperatuur, bij welke de bepaling der dichtheid zal worden uitgevoerd. (Wij hebben v_{IV} bij 32°.00, v_{III} bij 32°.50 C. bepaald). Nadat de overmaat zout is uitgekristalliseerd, verwarmt men den bol C tot alles weer in oplossing is gegaan; eventueel nog aanwezige lucht wordt daarbij uitgedreven. Men plaatst den toestel weer in den thermostaat, draait hem gedurende eenigen tijd rond ten einde het intreden der verzadiging te bevorderen en laat hem zoolang bij 32°.00 staan, totdat de meniskus zich niet meer verplaatst. Men is dan zeker, dat het vaste zout zich inderdaad in de modifikatie IV heeft omgezet. Men overtuigt zich daarvan trouwens na de eerste proef, door herhaling van het opwarmen en kontrole, of wederom bij afkoelen op 32°.00 hetzelfde punt in de buis B wordt bereikt. Is zulks het geval, dan leest men den stand van den meniskus af en noteert dien. Vervolgens wordt de pyknometer met inhoud gewogen. Alle wegingen werden uitgevoerd op een balans van Bunge (tot op 0.1 mgr.); men reduceerde ze op het ledig. De gewichten waren geijkt volgens de methode, beschreven door F. Kohlrausch [1]). Daarna ledigt men

[1]) Lehrbuch der prakt. Physik. 11. Aufl. Leipzig 1910. Blz. 62.

den toestel. Te dien einde brengt men de geheele zoutmassa door verwarmen in oplossing en spoelt de oplossing quantitatief in een maatkolf van 500 cc. ter bepaling van de totale hoeveelheid ammoniumnitraat, die in den pyknometer is geweest[1]).

50 cc. van de oplossing werden daarvoor telkens gebruikt.

10. De bepaling volgens L. W. WINKLER[2]) is, gelijk zal blijken, zóó nauwkeurig, dat het feit, dat men telkens slechts $^{1}/_{10}$ der totale hoeveelheid ammoniumnitraat bepaalt, niet tot fouten van beteekenis aanleiding geeft. Men kookt volgens die methode de 50 cc. oplossing met overmaat ammoniakvrije natron, vangt de ammoniak in een koud verzadigde boorzuuroplossing op (waarin nog vast zuur op den bodem ligt) en titreert de ammoniak met HCl, waarbij methyloranje als indikator wordt gebruikt. De omslag is buitengewoon scherp.

Het HCl werd als volgt gesteld: uit een nauwkeurig afgewogen hoeveelheid zuiver NH_4Cl wordt met loog het NH_3 uitgedreven, dat men in boorzuuroplossing opvangt. Die oplossing wordt daarna met het zoutzuur getitreerd, waardoor het titer van dit laatste bekend wordt. Dat de gevolgde methode ter bepaling van ammoniumnitraat betrouwbaar is, bewijst b.v. de volgende proef:

Ingewogen NH_4NO_3 2.4443 gr. Verbruikt 61.73 cc. 0.4948 norm. HCl. Dus (gevonden) gewicht NH_4NO_3: 2.4449 gr.

Wij wijzen er nog op, dat ter bepaling van het NH_4NO_3 uit den pyknometer voor 50 cc. oplossing telkens met vrij groote hoeveelheden HCl werd getitreerd ($\pm$ 60 cc.), zoodat de aflezingsfouten niet van beteekenis zijn.

11. Is m_1 het gewicht van het ammoniumnitraat in den pyknometer aanwezig (dus na afloop der proef door analyse bepaald);

m_2 het gewicht van zout + oplosmiddel;

v_s het te bepalen specifiek volume van het zout bij de temperatuur der proef;

c de koncentratie der bij die temperatuur verzadigde oplossing, uitgedrukt in grammen zout per gram oplosmiddel;

v_c het spec. volume der verzadigde oplossing bij die temperatuur;

en eindelijk V de inhoud van den bol C van den pyknometer + die van de buis B tot aan de deelstreep, bij welke de meniskus staat, dan is[3]):

[1]) De gebruikte maatkolven, pipetten en buretten waren vooraf nauwkeurig geijkt.

[2]) Zeitschr. f. angewandte Chemie **26**, 231 (1913); **27**, 630 (1914).

[3]) ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD. Deze Verslagen **26**, 864 (1917) Zeitschr. f. physik. Chemie **93**, 385 (1919).

$$v_s = \frac{V - (1 + c)(m_2 - m_1)v_c}{m_1 - (m_2 - m_1)c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ter berekening van v_s moeten wij het spec. vol. der verzadigde oplossing v_c, benevens de oplosbaarheid c bij de temperatuur der proef kennen. Wij hebben die grootheden zelf bepaald, daar de waarden, voor zoover de literatuur die geeft, ons niet voldoende vaststaand leken [1]).

Bepaling van v_c en c bij 32°.00 en 32°.50 *C.*

12. Ter vaststelling der waarden van v_c bij de genoemde temperaturen hebben wij overmaat zout met onverzadigde of oververzadigde oplossing in een thermostaat gedurende korteren of langeren tijd geschud [2]) (de oververzadigde oplossingen bereiken reeds na 50 minuten schudden den evenwichtstoestand, de onverzadigde na 48 uren), waarbij de temperatuur (in verband met den grooten temperatuurkoëfficiënt der oplosbaarheid) binnen 0°.01 konstant werd gehouden, [3]) terwijl daarna de dichtheid der verzadigde oplossing met behulp van een pyknometer volgens SPRENGEL-OSTWALD-EYKMAN [4]) werd vastgesteld. Ten einde het uitkristalliseeren van zout te beletten, hielden wij den geheelen pyknometer onder water in den thermostaat.

Nadat de Heer C. v. D. BUNT, chem. cand., eenige bepalingen had uitgevoerd, die bij 32°.00 tot resultaat leverden:

$$d^{4^\circ}_{32^\circ.00} = 1.3321^8;\ 1.3321^1;\ 1.3321^0;\ 1.3321^8,$$

werd door ons bij gebruikmaking van een ander preparaat gevonden: 1.3322^2; 1.3321^1; 1.3322^5; wij nemen als gemiddelde aan: **1.3322**, dus $(v_c)_{32^\circ.00} = 0.75064.$

Zoo hebben wij bij 32°.50 C. gevonden:

$$d^{4^\circ}_{32^\circ.50} = 1.3329^3;\ 1.3328^8;\ 1.3329^0$$

gemiddeld **1.3329**,
dus $(v_c)_{32^\circ.50} = 0.75024.$

13. Ter bepaling van de oplosbaarheid van het ammoniumnitraat

[1]) Oplosbaarheidsbepalingen van NH_4NO_3 bij de overgangstemperatuur zijn beschreven door: WOLF MÜLLER en KAUFMANN, Zeitschr. f. physik. Chemie **42**, 497 (1903); PAUL MONDAIN MONVAL, C. R. Paris **177**, 175 (1923).

[2]) Zie omtrent de gebruikte schudinrichting ERNST COHEN en H. R. BRUINS, Deze Verslagen **25**, 1277 (1917). Zeitschr. f. physik. Chemie **93**, 43 (1918).

[3]) De gebruikte toluolregulator had een inhoud van ± 500 cc.

[4]) Rec. des Trav. Chim. des Pays-Bas **13**, 13 (1894).

werden de verzadigde oplossingen volgens de bovenbeschreven methode van WINKLER geanalyseerd.

Tabel III bevat de resultaten.

TABEL III.

Oplosbaarheidsbepalingen van NH_4 NO_3,

Schudtijd in uren.	Gew. verz. oplossing in grammen.	cc HCl 0.4948 norm.	gr. NH_4 NO_3	gr. zout in 100 gr. verz. oplossing.	gr. zout in 1 gr. oplosmiddel c.	gemiddelde c.
Temperatuur 32°.00 C.						
54	5.2052	92.87	3.6782	70.67	2.4088	2.410
100	2.4383	43.52	1.7236	70.69	2.4116	
Temperatuur 32°.50 C.						
3	3.3049	59.08	2.3400	70.80	2.4251	2.426
3½	3.0142	53.90	2.1348	70.82	2.4276	

Op te merken valt nog, dat het evenwicht bij 32°.00 werd bereikt van de zijde van oplossingen, die bij die temperatuur *on*verzadigd waren. Men is te dicht bij de overgangstemperatuur om van oververzadigde oplossingen te kunnen uitgaan. Omgekeerd werd bij 32°.50 het evenwicht bereikt van de zijde van oplossingen, die bij die temperatuur *over*verzadigd waren.

14. De cijfers, bij 32°.00 verkregen, vonden een kontrole in die, welke de Heer v. D. BUNT voor ons met een ander preparaat langs

TABEL IV.

Ingewogen koncentraties. gr. zout op 100 gr. oplossing.	Dichtheid $d^{4°}_{32°.00}$ gevonden.	gr. zout op 100 gr. oplossing berekend.
24.51	1.09703	—
38.97	1.16394	38.95
49.95	1.21851	49.95
54.91	1.24434	—
59.88	1.27104	59.89
66.73	1.30938	—

anderen weg heeft bepaald. Door vaststellen van de dichtheid van een aantal oplossingen van verschillende (ingewogen) koncentraties werd een kromme verkregen, die de koncentratie als funktie van de dichtheid dier oplossingen voorstelt. Met behulp der pyknometrisch bepaalde dichtheid van de oplossing, die bij 32°.00 verzadigd was, kan dan hare koncentratie worden berekend.

Tabel IV bevat de resultaten. (Zie p. 952).

Met behulp der cijfers, gevonden in de eerste, vierde en zesde bepaling, vindt men:

$$c = -360.23 + 477.97\,d - 116\,d^2.$$

Berekent men met behulp daarvan de koncentraties, ingewogen in de tweede, derde en vijfde bepaling, dan vindt men de waarden, in de derde kolom van de tabel vermeld. Substitueert men in de vergelijking de waarde van de dichtheid, die voor de *verzadigde* oplossing werd gevonden (1.3322) dan vindt men $c = 70.65$ in goede overeenstemming met de langs anderen weg gevonden waarde $c = 70.68$ (zie Tabel III).

15. Substitueert men nu in vergelijking (1) de verschillende waarden, in Tabel V (zie p. 954) vermeld, dan vindt men:

$$(v_{IV})_{32^0.00} = 0.58250.$$

$$(v_{III})_{32^0.50} = 0.60465.$$

Ten einde deze op de overgangstemperatuur 32°.3 te reduceeren, moeten wij de uitzettingskoëfficiënten van de beide modifikaties III en IV kennen.

Deze korrektie, die vrij onzeker is, daar de bepalingen van Bellati en Romanese belangrijke verschillen vertoonen met die van Behn, hebben wij met behulp der cijfers van den laatstgenoemde berekend. Zij verdienen meer vertrouwen dan die van Bellati en Romanese, ook in verband met Bridgman's bepalingen [1]).

Men vindt dan:

$$(v_{IV})_{32^0.3} = 0.58250 + 0.58250 \times 0.3 \times 0.00048 = 0.5826$$

$$(v_{III})_{32^0.3} = 0.60465 - 0.60465 \times 0.2 \times 0.00036 = 0.6046.$$

Dus: $$(v_{III} - v_{IV})_{32^0.3} = \mathbf{0.0220}\,\frac{cc.}{gr.}$$

---

1) Proc. Americ. Acad. of Arts and Sciences **51**, 581 (1916); speciaal aldaar blz. 617.

TABEL V.

$c = 2.410$; $v_c = 0.75064$; $c = 2.426$; $v_c = 0.75024$

	Temperatuur 32°.00 C.		Temperatuur 32°.50 C.			
Nummer der proef →	7	9	3	6	7	9
m_1	26.8885	25.5881	26.2907	25.3082	26 8885	25.5881
$m_2 - m_1$	2.5396	3 2543	2.8089	3.3314	2.5401	3.2547
$(m_2 - m_1)c$	6.1203	7.8427	6 8147	8.0823	6.1625	7.8962
$(m_2 - m_1)(1 + c)$	8.6599	11.0970	9.6236	11.4137	8.7026	11.1509
$m_1 - (m_2 \; m_1)\, c$	20.7682	17.7454	19.4760	17.2259	20.7260	17.6919
V	18.5974	18.6677	18.9956	18·9798	19.0579	19.0662
$(1 + c)(m_2 - m_1)\, v_c$	6 5005	8.3298	7.2200	8.5631	6.5291	8 3659
$V - (1 + c)(m_2 - m_1)\, v_c$	12.0969	10.3379	11.7755	10.4167	12.5288	10.7003
v_S	0.58248	0.58251	0.60460	0.60470	0.60449	0.60481
	gemiddeld **0.58250**		gemiddeld **0.60465**			

C. Tweede Methode ter bepaling van $(v_{III} - v_{IV})$.

16. Deze is in de uitvoering eenvoudiger dan de eerste en daar hierbij de bovengenoemde, (tot dusverre) onzekere, korrektie vervalt, kan zij ons de gezochte waarde met grooter nauwkeurigheid leveren. Men brengt een bekend gewicht droog zout als modifikatie IV in den bol van eenen dilatometer, vult dan met een vloeistof, die ammoniumnitraat praktisch niet oplost (b.v. toluol, die men eventueel nog te voren bij de temp. der proef met zout heeft verzadigd) en smelt een kapillaire buis aan den bol. Nadat door uitpompen en zachte verwarming, waarbij men beneden de overgangstemperatuur dient te blijven, alle lucht door toluoldamp is verdreven, plaatst men den dilatometer in een thermostaat, die gedurende eenige dagen op de overgangstemperatuur (32°.3) wordt gehouden. Men leest van tijd tot tijd den stand (S_1) van den meniskus in de kapillair af. Is die konstant geworden, dan brengt men den thermostaat op een temperatuur, eenige graden boven het overgangspunt gelegen, zoodat IV geheel in III overgaat. Bij 36° is de snelheid zoodanig, dat de reaktie in een uur is afgeloopen. Men overtuigt zich, dat de stand van den meniskus konstant blijft en brengt de temperatuur van den thermostaat weder op 32°.3 terug. Soms werd de meniskus bij die temperatuur gedurende eenige dagen afgelezen, terwijl men

den indruk had gekregen, dat hij reeds na enkele uren den eindstand bereikt. Die stand (S_2) wordt genoteerd. Men bepaalt daarna het volume (bij 32°.3) der kapillair tusschen S_1 en S_2 door uitwegen met kwik en leert aldus de volumeverandering $v_{III}—v_{IV}$ (per gram stof) bij de overgangstemperatuur kennen.

Gelijk uit het bovenstaande blijkt, is men bij deze wijze van werken onafhankelijk van het feit, of de kapillair tusschen S_1 en S_2 al dan niet cylindrisch is. Men dient er natuurlijk voor te zorgen, dat ook de kapillair bij het bepalen der standen S_1 en S_2 geheel in het water van den thermostaat is ondergedompeld. Mocht dat niet het geval zijn, dan is daarmee rekening te houden door reduktie van het volume op 32°.3.

17. Er werden vier bepalingen uitgevoerd. Eene met 24.2815 gr. zout en drie met 22.3699 gr. in een anderen dilatometer, welks kapillair nauwer was.

Tabel VI bevat de resultaten.

De kapillair van dilatometer 1 bevatte over een lengte van 180 mm. 6.9151 gr. kwik, die van dilatometer 2 over een lengte van 300 mm. 6.7656 gr. Beide uitwegingen gelden voor 32°.3 C.

TABEL VI.
Temperatuur 32°.3 C.

Eerste Dilatometer. Gewicht zout 24.2815 gr.				Tweede Dilatometer. Gewicht zout 22.3699 gr.			
Beginstand in de kapillair in m.m.	Eindstand in de kapillair in m.m.	Uitzetting in m.m.	Volumeverandering per gram in cc.	Beginstand in de kapillair in m.m.	Eindstand in de kapillair in m.m.	Uitzetting in m.m.	Volumeverandering per gram in cc.
19.6	208.0	188.4	0.0220^5	31.7	324.0	296.4	0.0221^1
				19.3	318.7	299.4	0.0223^3
				19.3	316.0	296.7	0.0221^3

Afzonderlijke metingen leerden, dat de temperatuurschommelingen van den thermostaat, die 0°.01 bedroegen, hier niet van beteekenis zijn, daar de toluol zich voor dit temperatuurinterval slechts 0.08 mm. in de kapillair verplaatste.

Als totaal-gemiddelde vinden wij dus:

$$(v_{III}—v_{IV})_{32^0.3} = \mathbf{0.0221^6} \frac{cc.}{gr.}$$

Op grond van het boven (§ 15) meegedeelde, meenen wij aan deze waarde meer beteekenis te moeten toekennen, dan aan die, volgens de eerste methode bepaald (0.0220).

18. Toen ons onderzoek reeds was afgesloten, hebben wij gevonden, dat de zeer nauwkeurige metingen van BEHN, reeds boven vermeld (§ 6), gegevens bevatten, die ons in staat stellen $(v_{III} - v_{IV})$ bij de door hem aangenomen overgangstemperatuur van 32°.0 te berekenen. Zooals boven werd meegedeeld, vindt men met behulp van die gegevens:

$$(v_{III} - v_{IV})_{32^\circ.0} = 0.022 \ \frac{cc.}{gr.}.$$

Reduceert men onze gegevens volgens § 15 op 32°.0 dan vindt men, geheel in overeenstemming met BEHN: $(v_{III} - v_{IV})_{32^\circ.0} = 0.022 \ \frac{cc.}{gr.}$.

19. Wellicht zal het later, in verband met een onderzoek, dat wij onder handen hebben, blijken, noodig te zijn $(v_{III} - v_{IV})$ bij het overgangspunt nog nauwkeuriger te bepalen, maar zooveel is thans reeds zeker, dat de waarde, door BRIDGMAN gevonden (0.02026), ± 9 procent te laag is.

20. Beschouwt men kolom 3 van Tabel I nader, dan wordt men getroffen door de zoo regelmatige stijging van $(v_{III} - v_{IV})$ bij gelijke toenemingen van den druk, maar zelfs bij den hoogsten druk (800 $^{Kg}/_{cm^2}$) bereikt dit verschil niet de waarde, die wij voor 1 atm. hebben gevonden. Men krijgt den indruk, dat bij BRIDGMAN's proeven (ook onder druk) slechts een bepaalde fraktie van de geheele hoeveelheid ingewogen NH_4NO_3 de omzetting heeft ondergaan.

Dat dit inderdaad het geval is geweest, wordt zeer waarschijnlijk, wanneer men bij BRIDGMAN[1]) leest: ,,Two series of runs were made, separated by an interval of a year. For each of these series of runs the material was hammered dry into a perforated steel shell, and the pressure transmitted directly to it by kerosene. For the second run, the salt was subjected to a preliminary drying in vacuum at 100°. No difference in behavior between the two runs to be attributed to this cause was to be detected. The second series, repeating the first, was made necessary by the fact that the measurements of $\Delta v \ (= v_{III} - v_{IV})$ given by the first series were irregular. The reason for this is that ammonium nitrate is a substance for

[1]) Proc. Americ. Acad. of Arts and Sciences **51**, 581 (1916). Speciaal pag. 605.

which it is particularly difficult to force the reaction from one phase to another to run to completion".

Bij den „first run" hebben blijkbaar telkens andere frakties van de geheele hoeveelheid nitraat aan de omzetting niet deel genomen, bij den tweeden (bij alle drukken) eenzelfde fraktie. Dit laatste is zeer goed mogelijk in verband met de wijze, waarop de proef werd voorbereid. Hamert men het zout bij gedeelten in het stalen cylindertje, dan is het wel mogelijk, dat een blokje in zijn *geheel* aan de omzetting deelneemt, een tweede, daarop gehamerd, *niet*, al laat het kontakt tusschen beide niets te wenschen.

Proeven, reeds jaren geleden door Ernst Cohen en A. L. Th. Moesveld [1]) genomen en tot heden voortgezet, mogen het gezegde illustreeren. Wordt een warm verzadigde, waterige oplossing van thallopikraat afgekoeld beneden 46°, het overgangspunt der roode modifikatie van dit zout (stabiel beneden 46°) en der gele, dan kristalliseeren beide vormen naast elkaar uit en blijven maanden lang, zelfs in aanraking met de oplossing, naast elkaar bestaan. Laat men het water verdampen, dan krijgt men een *mengsel* van de beide modifikaties, hoewel er tusschen de roode en gele kristallen innig kontakt bestaat. Zoo zijn wij in het bezit van een dergelijk mengsel, dat zich reeds sinds 4 jaren in dien toestand bevindt; het werd bij ± 15° C., dus 30 graden beneden de overgangstemperatuur bewaard. In fig. 3, een photographische reproduktie van dit preparaat, is het verschil tusschen de beide modifikaties duidelijk zichtbaar, al komt in de figuur het verschil in kleur, rood en geel, niet tot uitdrukking.

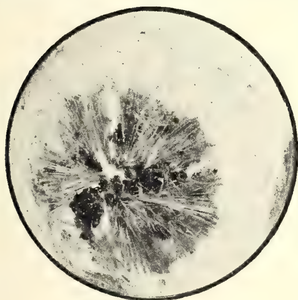


Fig. 3.

21. Het vermoeden ligt voor de hand, dat dergelijke verschijnsels zich hebben voorgedaan bij de andere stoffen, door Bridgman onderzocht, vooral waar hij er zelf op wijst, dat hij dergelijke vertragingen bij andere stoffen heeft waargenomen. Daarmede vervalt dan ook de beteekenis van de waarden, die hij voor de volume-veranderingen bij die stoffen heeft gevonden. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de omzettingswarmten, die hij met behulp van die cijfers heeft berekend en

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **94**, 450 (1920).

die c. p. in het geval van het ammoniumnitraat ± 9 procent van de juiste waarde moeten afwijken. Herhaling van die onderzoekingen is dus gewenscht. Wij komen hierop later terug.

SAMENVATTING.

Aangetoond werd, dat BRIDGMAN's bepaling van de volumeverandering, die intreedt, wanneer ammoniumnitraat IV in III overgaat, met een groote fout is behept (± 9 procent) en wel ten gevolge der hardnekkige vertragingen, die bij dien overgang kunnen optreden. Hiermede werd quantatief een nieuw bewijs geleverd, dat de physische konstanten der stoffen, die wij tot dusverre kennen, veelal betrekking hebben op metastabiele mengsels van onbekende samenstelling van de modifikaties dier stoffen. Beteekenis krijgen zij eerst, wanneer zij voor de *zuivere* modifikaties zullen zijn bepaald.

Utrecht, December 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

Scheikunde. — ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD. „*De Metastabiliteit der Elementen en Verbindingen als gevolg van Enantiotropie of Monotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek.*" VIII.

1. Reeds uit de qualitatieve en quantitatieve voorbeelden, in onze vroegere verhandelingen onder bovenstaanden titel beschreven, is gebleken, dat de vaste stoffen, die wij dagelijks in handen hebben, mengsels zijn van de modifikaties, waarin die stoffen kunnen optreden en dat dientengevolge aan de tot dusverre bepaalde physische konstanten dier stoffen beteekenis niet kan worden gehecht. Dat belangrijke fouten (bv. 10%) in die „konstanten" kunnen voorkomen, wanneer men met die mengsels inplaats van met de *zuivere* modifikaties werkt, is o.m. uit onze voorafgaande mededeeling gebleken.

De nieuwere physische stralingsmethoden stellen ons (naast andere) in staat in een bepaalde stof de aanwezigheid van verschillende modifikaties aan te toonen; men zal daarvan gebruik moeten maken, aleer men er toe overgaat, de physische konstanten dier stof te meten.

2. Het volgende voorbeeld moge bewijzen, hoe noodig het is, zich rekenschap te geven van het feit, dat men steeds met mengsels te doen heeft, wanneer men niet zeer bizondere maatregelen heeft genomen om de zuivere modifikaties van een bepaalde stof gescheiden in handen te krijgen.

Bij gelegenheid van een X-stralen-analyse van zilverjodide was door WILSEY gevonden[1]), dat dit zout (in poedervorm volgens DEBYE-SCHERRER onderzocht), kubisch kristalliseert. Dit resultaat werd bevestigd door DAVEY[2]). Intusschen is kort daarna de juistheid van deze uitkomst in twijfel getrokken door AMINOFF[3]), die uit zijn onderzoek het besluit trekt, dat zilverjodide hexagonaal is.

In zijn „Survey of Existing Crystal Structure Data" aanvaardt WYCKOFF[4]) de konklusies van AMINOFF en deelt mede, dat ook zijne (nog niet afgesloten) onderzoekingen er toe leiden, aan zilverjodide hexagonale struktuur toe te kennen. Dat men tot kubische struktuur

1) Phil. Mag. (6) **42**, 262 (1921).

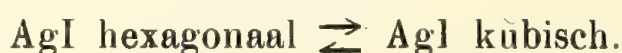
2) Phys. Rev. **19**, 248 (1922).

3) Geol. För. Forh. **44**, 444 (1922); Referaat in Physik. Ber. 1922, p. 827.

4) Journ. Franklin Inst. **195**, 183, 349, 531 (1923).

heeft gekonkludeerd, geeft hem de woorden in de pen: „Silver iodide is particularly interesting because in the ease with which it was assigned a cubic structure, though possessed of hexagonal symmetry, it furnishes an excellent illustration of the insufficiency of unaided powder photographs and sounds a warning of the dangers arising from a disregard of available crystallographic information."

3. Dat AgI polymorph is, is reeds lang bekend; bij 1 atm. druk vertoont het bij 146° een overgangspunt:



AgI hexagonaal $\rightleftarrows$ AgI kubisch.

Wij mogen nu op grond onzer vroeger medegedeelde onderzoekingen verwachten, dat indien niet bizondere maatregelen zijn genomen bij de bereiding van het zout, men bij gewone temperatuur een mengsel van metastabiel kubisch en stabiel hexagonaal jodide in handen krijgt.

Het resultaat van WILSEY is geheel hiermede in overeenstemming, zooals uit het volgende blijkt:

„The conclusion is that both crystal forms exist, most of the samples showing a mixture of the two in which the hexagonal form predominates. The discrepancies in the results reported by different observers appear to be due to differences in the samples examined rather than in the methods of analysis used" en verder:

„The evidence appears quite conclusive that every sample of silver iodide studied contained the cubic form; in a few cases none but the cubic structure was evident; in some, one or two faint lines were present which belonged only to the hexagonal form; while in most of the samples the hexagonal form predominated."

4. Terwijl een systematisch onderzoek naar de kondities, die het optreden van de eene of de andere modifikatie beheerschen, door WILSEY niet werd uitgevoerd, merkt hij toch op, dat het eerste preparaat, dat den kubischen vorm vertoonde, door precipiteeren was bereid. De andere kubische kristallen waren verkregen door smelten van het zout en „Abschrecken"(„quenching") in koud water, terwijl als regel de op den voorgrond tredende hexagonale kristallen ontstonden zoowel bij precipitatie als bij „Abschrecken" of bij langzaam afkoelen van het gesmolten zout. Ook hier dus in allen deele het beeld, dat onze vroegere onderzoekingen hebben voorspeld.

Uit het voorafgaande blijkt tevens, dat WYCKOFF's in § 2 aangehaalde woorden, voor zilverjodide althans, hunne beteekenis hebben verloren.

Utrecht, December 1923. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

Physiologie. — R. MAGNUS en A. DE KLEYN: *„Bijdrage tot de functie van het vestibulaire apparaat.”*

In een vorige mededeeling[1]) kon worden aangetoond, dat langer dan eene week na het afslingeren der otolithenmembranen, het zintuigepitheel der maculae in constanten prikkelingstoestand verkeert.

Schakelt men bij caviae, bij welke alle otolithenmembranen volgens de methode van WITTMAACK zijn afgeslingerd, het éene labyrinth door cocaine tijdelijk uit, zoo treden door de prikkels, welke van het andere, niet ingespoten labyrinth, uitgaan, asymmetrische verschijnselen op, gelijk aan die na eenzijdige labyrinthexstirpatie bij normale dieren. Er is echter één onderscheid met normale dieren: deze verschijnselen bij de gecentrifugeerde en eenzijdig met cocaine ingespoten dieren veranderen niet bij verandering van den stand van den kop in de ruimte.

Aangezien langer dan eene week na het centrifugeeren werd gewacht en het daarom zeer waarschijnlijk is, dat bovengenoemde prikkelingstoestand niet meer aan het centrifugeeren geweten moet worden, werd uit deze proeven de conclusie getrokken, dat waarschijnlijk aan het zintuigepitheel der maculae de eigenschap moet worden toegeschreven, prikkels op te wekken, welke door het ontbreken der otolithenmembranen niet noemenswaard in sterkte wisselden. De functie der otolithenmembranen zou dan daarin gezocht moeten worden, dat deze den prikkelingstoestand van het zintuigepitheel veranderen, al naarmate zij aan het epitheel trekken of daarop drukken.

Nu was bij deze en ook bij andere proeven, waarbij eenzijdig cocaine in het middenoor van normale caviae werd ingespoten, opgevallen, dat steeds wanneer de verlammingsverschijnselen van het labyrinth optraden, eerst eene verticale oogdeviatie zonder een spoor van nystagmus en een gronddraaiing naar de ingespoten zijde te zien waren en dat eerst veel later, soms eerst na 20 minuten, een nystagmus met de snelle phase naar de niet uitgespoten zijde te voorschijn kwam. Waar nu de verticale oogdeviatie en de gronddraaiing als eene verlamming van den sacculus resp. utriculus te

1) R. MAGNUS en A. DE KLEIJN. Nadere bijdrage tot de functie der otolithenapparaten. Deze Verslagen Deel XXXI blz. 184.

beschouwen zijn [1]), lag het voor de hand de zooveel later optredende nystagmus aan eene verlamming der booggangen toe te schrijven. Het is nu mogelijk het al of niet juiste dezer veronderstelling experimenteel na te gaan. Daarvoor is het noodig aan te toonen, dat in het eerste stadium, waarin oogdeviatie en gronddraaiing optreden, de booggangen aan de ingespoten zijde (door draaiing en calorisch) nog prikkelbaar zijn en deze bij het optreden van den nystagmus hun prikkelbaarheid verliezen. Zooals nader zal blijken, is dit nu werkelijk het geval. Tevens bleek echter, dat ook de sacculus- en utriculusmaculae niet gelijktijdig worden verlamd, maar dat men een stadium aantreft, waarin de utriculus nog normaal functioneert, terwijl de sacculus reeds is verlamd. De volgende resultaten werden verkregen bij 19 volkomen geslaagde proeven op caviae, waarvan 9 normaal waren; bij 5 was enkele uren, bij 5 andere 5 dagen voor de proef het eene labyrinth chirurgisch verwijderd. Bij alle dieren werden voor het begin van de proef de verschillende labyrinthreflexen (zoowel tonische als booggangsreflexen) nauwkeurig onderzocht en alleen die dieren gebruikt waarbij deze alle normaal voorhanden waren.

I. *Proeven bij normale dieren.*

Spuit men bij eene normale cavia van uit de gehoorgang 0, 1 ccm. 5 °/₀ cocaineoplossing in één, b.v. het *linker*middenoor, dan wordt na eenige minuten (gemiddeld 4—6) het eerst de labyrinthoprichtreflex op den kop bij linker zijligging van het dier in de lucht zwakker en verdwijnt weldra geheel; het dier houdt dan zijn kop in linkerzijligging, terwijl wanneer men het dier in rechterzijligging in de lucht onderzoekt, de kop direct in den normalen stand wordt gebracht. Tegelijkertijd of direct daarna treedt er eene verticale oogdeviatie (zonder nystagmus) op; het linkeroog staat naar beneden (ventraalwaarts), het rechter naar boven (dorsaalwaarts). Deze deviatie is maximaal bij rechterzijligging van den kop, wordt bij normalen stand van den kop geringer en is minimaal of nul bij linkerzijligging en verhoudt zich dus geheel als de verticale oogdeviatie na linkszijdige labyrinthexstirpatie.

Het afwezig zijn van de labyrinthoprichtreflex bij linkerzijligging van het dier, en de bovenbeschreven verticale oogdeviatie zijn, zooals uit eene vorige mededeeling blijkt, symptomen van eene verlamming der linker sacculusmacula. In dit stadium vindt men nog

[2]) R. Magnus en A. de Kleijn. De functie der otolithen. Deze Verslagen Deel XXIX blz. 375.

geen spoor van gronddraaiing, zooals vooral aan te toonen is, wanneer men het dier met den kop naar beneden onderzoekt.

Het dier zit normaal en loopt zonder stoornissen recht uit. De utriculus is dus nog niet door de inspuiting beïnvloed.

Interessant is, dat de labyrinthoprichtreflexen, welke den kop uit abnorme maar symmetrische houdingen weer in den typischen normalen stand brengen (onderkaak beneden, mondspleet ongeveer 30° onder de horizontale) in dit stadium nog normaal zijn. Onderzoekt men het dier met den kop naar boven, zoo wordt door ventraalwaarts buigen, in de houding „kop beneden" door dorsaalwaarts buigen van den kop, deze weer in den normalen stand gebracht, terwijl wanneer men het dier in rugligging onderzoekt, door ventraalwaarts buigen van het voorste deel van het lichaam, hetzelfde resultaat wordt bereikt.

Deze feiten pleiten voor de opvatting, dat, zooals vroeger reeds als mogelijkheid werd aangenomen, deze „symmetrische" labyrinthoprichtreflexen in de utriculi worden opgewekt.

In dit stadium zijn alle kop- en oogdraaireacties met bijbehoorende nystagmi nog onveranderd en symmetrisch aanwezig.

Na wisselend langen tijd (soms na 7—14 min., soms vroeger) ziet men bij onderzoek met den kop beneden eene gronddraaiing naar de ingespoten (linker)zijde optreden, welke in het begin gering, weldra zeer sterk wordt en ten slotte 90° en meer bedraagt. Er is dus nu eene utriculusverlamming opgetreden. Wanneer het dier normaal zit, is ook de kop naar links gedraaid en hangt het lichaam naar links over.

Daartegenover ontbreekt eene links*wending* van kop en lichaam geheel; het dier loopt dan ook rechuit en valt alleen soms tijdelijk naar links om, indien de gronddraaiing in sterke mate aanwezig is.

In dit stadium is geen spontane kop- of oognystagmus te zien en is het dan ook door de volgende proeven mogelijk het goede functioneeren der booggangen aan de ingespoten zijde aan te toonen.

De kopdraaireacties zijn zoowel bij draaien naar rechts als bij draaien naar links voorhanden en wel *volkomen symmetrisch*. Hetzelfde geldt voor de horizontale, vertikale en rotatoire oogdraaireacties met de daarbij behoorende nystagmi.

Deze proeven hebben echter het nadeel, dat bij draaien steeds beide labyrinthen worden geprikkeld; zij worden echter aangevuld door later te vermelden proeven, waarbij na eenzijdige labyrinthexstirpatie het andere normale labyrinth met cocaine werd ingespoten en de waargenomen labyrinthreflexen dus slechts in dit labyrinth konden worden opgewekt.

Voor zuiver geïsoleerd onderzoek der booggangen van één labyrinth eigent zich alleen het uitspuiten van de gehoorgang met koud resp. warm water (calorisch onderzoek volgens BÁRÁNY) waarbij de dan waar te nemen nystagmus alleen dan zeker als door de calorische prikkeling opgewekt is te beschouwen, indien de richting bij normalen stand van den kop en bij „kop beneden" juist omgekeerd is. Deze calorische proeven zijn echter natuurlijk alleen dan bewijzend, wanneer na het ophouden met uitspuiten, de nystagmus weer verdwijnt en niet in den voor het volgende stadium kenmerkenden spontanen nystagmus overgaat. Dit laatste bleek dan ook in bovengemelde proeven niet het geval te zijn.

Soms zeer snel, soms eerst na 7—18 minuten ziet men het derde stadium, de verlamming der booggangen optreden. De kop wordt eerst weinig, langzamerhand steeds sterker, naar links gewend, waaraan zich dan eene wending van het lichaam naar links aansluit. De kopdraaireactie wordt asymmetrisch; onveranderd in de richting der kopwending, wordt deze in de andere richting steeds zwakker. De spontane nystagmus, in het begin bestaande uit enkele slagen met wisselende richting, wordt weldra regelmatig, krachtig en slaat bij het linker oog naar voorboven, bij het rechter naar achterbeneden. Als „verlammingsnystagmus" wordt deze gekenmerkt door het feit, dat geen omslag van richting wordt waargenomen, indien men het dier bij normalen stand van den kop en bij de stand „kop beneden" onderzoekt. Door draaien naar rechts resp. naar links wordt deze spontane nystagmus asymmetrisch beïnvloed op geheel dezelfde wijze als de spontane nystagmus na eenzijdige labyrinthexstirpatie. Ook typische spontane kopnystagmus is nu waar te nemen, terwijl door de wending van kop en lichaam de dieren niet meer rechtuit kunnen loopen, maar horlogebewegingen maken.

Bij deze proeven geschiedt dus de volledige uitschakeling van het labyrinth in 3 stadia.

Het eerste stadium waarin de verlamming van de sacculusmacula optreedt, wordt gekenmerkt door het verdwijnen der labyrinthoprichtreflexen bij een der zijliggingen van het dier in de lucht en het optreden van eene vertikale oogdeviatie; in het tweede stadium treedt de utriculusverlamming op, zich uitend in eene gronddraaiing naar de ingespoten zijde echter zonder wending, terwijl tenslotte in het derde stadium ook de booggangen verlamd zijn en de kopwending met spontanen kop- en oognystagmus het beeld der totale uitschakeling van één labyrinth volledig maken.

Slechts één symptoom der eenzijdige labyrinthuitschakeling ontbrak bij al deze proeven nml. de vermindering van tonus der extremiteiten

aan de ingespoten zijde. Ook na volkomen verlamming van het labyrinth door de cocaine, waarbij zelfs in één geval ook de facialis paretisch was, werd nooit waargenomen, dat de linker extremiteiten slapper waren dan de rechter, wanneer de kop tenopzichte van de romp in eenen symmetrischen stand was gebracht. Dit symptoom, welk na chirurgische uitschakeling van het labyrinth vrijwel constant wordt waargenomen, blijft dus nog steeds duister.

Het volgende typische protocol van eene dergelijke proef moge thans eerst medegedeeld worden:

Cavia IV, gevlekt.

Voor de proef alle labyrinthreflexen voorhanden en symmetrisch, (*kopdraai-reacties* en *oogdraaireacties*, horizontaal, verticaal en rotatoir, met bijbehoorende nystagmi; *reacties op progressiebewegingen*: liftreactie, „sprungbereitschaft" en spreiden der teenen; *alle labyrinthoprichtreflexen* zoowel asymmetrische als symmetrische; *compensatorische oogstanden*: vertikale en rotatoire).

Het dier zit symmetrisch, oogen symmetrisch in normalen stand zonder nystagmus. Tonus van voorpooten gelijk. Gehoorreactie positief.

11[9]. 0,1 ccm. 5 % cocaine in linker middenoor gespoten.

11[12] Labyrinthoprichtreflexen beiderzijds positief en symmetrisch.

11[13]. Begin van oogdeviatie: linker oog naar beneden.
Labyrinthoprichtreflex in rechter zijligging positief (kop wordt in normalen stand gebracht), in linker zijligging negatief (kop blijft in linker zijligging).
Geen spoor van gronddraaiing.

11[14]. Vertikale oogdeviatie: linker oog naar beneden, rechter naar boven.
Tonus voorpooten gelijk of rechter voorpoot iets slapper.
Oogdraaireacties en -nystagmus (zoowel horizontaal, verticaal als rotatoir) bij draaien naar rechts en naar links: beiderzijds positief en symmetrisch.
Geen gronddraaiing, geen spontane nystagmus.

11[17]. Thans duidelijke gronddraaing naar links.

11[19]. Uitspuiten linker gehoorgang met weinig koud water: duidelijke nystagmus; bij normalen stand van den kop aan linker oog naar voorboven; bij stand „kop beneden" naar achter en beneden.

11[20]. Calorische nystagmus verdwenen, geen spontane nystagmus.
Oogdraaireacties en -nystagmus (hor., vert. en rotat.): duidelijk en symmetrisch.
Kopdraaireacties bij draaien naar rechts en naar links eveneens symmetrisch, niettegenstaande de kopdraaiing (gronddraaiing).
Labyrinthoprichtreflexen in rechter zijligging positief, in linker zijligging absoluut negatief
Tonus voorpooten in rugligging met kop symmetrisch tenopzichte van den romp): rechter voorpoot slapper.

11[25]. Sterke vertikale oogdeviatie, geen spontane nystagmus.
Tonus voorpooten: rechter voorpoot meer gebogen; weerstand tegen buigen rechts en links echter niet duidelijk verschillend.

11[27]. Linker oog naar beneden en iets naar voren gedevieerd, rechter oog naar boven, niet naar achter.
Gronddraaiing 90°.

11^{32}. Eerste optreden van eenen spontanen nystagmus: bij normalen stand van den kop van linker oog naar voorboven, van rechter naar achter beneden. Bij onderzoek met „kop beneden" geen omslag van den nystagmus, alleen eene geringe verandering van de richting overeenkomende met de compensatorische oogstand bij deze positie.

11^{35}. Horizontale oogdraainystagmus bij draaien naar rechts en naar links asymmetrisch: bij draaien naar rechts spontane nystagmus frequent, bij draaien naar links langzamer. Verticale en rotatoire oogdraainystagmus, tengevolge van den spontanen nystagmus niet goed te onderzoeken.
Tonus voorpooten: gelijk of rechter voorpoot iets slapper.

11^{40}. Naast sterke gronddraaiing thans ook sterke wending naar links.
Duidelijke asymmetrie in de horizontale kopdraaireacties: bij draaien naar rechts duidelijke reactie, bij draaien naar links geen reactie te zien.
Tonus voorpooten: rechter voorpoot slapper; weerstand tegen buigen rechts en links echter niet duidelijk verschillend.

Volgende bijzonderheden werden bij de proeven van deze eerste reeks nog waargenomen:

Het kan voorkomen, dat aan de verlamming door cocaine eene kort-, slechts enkele minuten durende prikkeling voorafgaat. In deze gevallen treedt dan oogdeviatie (sacculus) of gronddraaiing (utriculus) naar de andere zijde op.

In een der proeven trad alleen de sacculusverlamming op, terwijl de utriculus en booggangen niet werden uitgeschakeld. Bij enkele proeven had inspuiten van cocaine in het middenoor in het geheel geen verlamming van het labyrinth tengevolge. Bij de sectie werd dan steeds eene etterige otitis media met sterke zwelling van het slijmvlies van het middenoor aangetroffen, waardoor de cocaine verhinderd werd door te dringen.

Het tijdsverloop tusschen de verschillende stadia wisselt zeer sterk; in één proef was de opeenvolging zoo snel, dat een nauwkeurig onderzoek der verschillende labyrinthreflexen niet mogelijk was. In andere gevallen daarentegen duurde het weer ongeveer een half uur voordat de verlamming van het labyrinth volledig was, zoodat een zeer nauwkeurig onderzoek kon plaats hebben.

Eenmaal begon de gronddraaiing reeds zeer vroeg (4 minuten) na het inspuiten, zoodat het eerste en tweede stadium niet te onderscheiden waren; in alle andere gevallen was dit wel het geval.

Zooals boven medegedeeld slaat de spontane nystagmus na eenzijdige booggangsuitschakeling bij verschillende standen van den kop in de ruimte niet om. Wel treedt er, wanneer men van den normalen stand van den kop uitgaande, den kop in de positie „kop beneden" brengt, een geringe verandering in de richting van den nystagmus op, doordat, vanuit het normale labyrinth de oogen door compensatorische raddraaiingen eenen anderen stand gaan innemen (bovenste corneapool naar achter). Deze geringe verandering der richting kan echter nooit worden verwisseld met den werkelijken omslag van den nystagmus bij calorische prikkeling.

In alle gevallen waren de labyrinthreflexen den volgenden dag weer geheel normaal en was van de inspuiting van cocaine niets meer te bespeuren.

Reeds deze eerste reeks van proeven veroorlooft het maken van verschillende gevolgtrekkingen, van welke de volgende met name genoemd mogen worden.

1. De labyrinthuitschakeling geschiedt in 3 stadia. Tot het eerste

stadium behooren de „asymmetrische" labyrinthoprichtreflexen en de verticale compensatorische oogstanden, waardoor de vroeger geuite meening, dat deze beide in de sacculusmacula worden opgewekt, wordt bevestigd. Tot het tweede stadium behooren de gronddraaiing en de „symmetrische" labyrinthoprichtreflexen. Daar de gronddraaiing, zooals vroeger werd aangetoond aan de uitschakeling van één utriculusmacula moet worden toegeschreven, is het waarschijnlijk, dat deze bij de symmetrische labyrinthoprichtreflexen ook eene beslissende rol speelt.

De derde groep: nystagmus van kop en oogen evenals de kopwending worden bij caviae door de booggangen opgewekt. Terwijl nu wat de kopwending betreft, deze bij konijnen en apen na eenzijdige labyrinthexstirpatie een blijvend symptoom is en het dus mogelijk is, dat bij deze dieren ook de otolithenapparaten eene rol spelen bij het tot stand komen van dit verschijnsel, is deze wending bij caviae, hond en kat slechts voorbijgaand na eenzijdige labyrinthexstirpatie te zien en moet bij deze dieren in verband met boven medegedeelde proeven op caviae, hoogstwaarschijnlijk als een booggangssymptoom worden opgevat.

Tevens blijkt, dat uitschakeling der otolithenmaculae (zonder prikkeling) geen nystagmus tengevolge heeft en dat de spontane kop- en oognystagmus onder deze omstandigheden uitsluitend als een booggangssymptoom zijn op te vatten.

2. Wanneer de spontane nystagmus onafhankelijk is van de otolithenmaculae en optreedt wanneer zonder prikkeling het booggangsapparaat van éene zijde wordt uitgeschakeld, zoo volgt daaruit, dat de oorzaak van dezen spontanen nystagmus moet gezocht worden in prikkels, welke hun ontstaan aan het booggangsapparaat der intacte zijde te danken hebben. De nystagmus is (in de eerste dagen na eenzijdige labyrinthexstirpatie) voortdurend aanwezig, ook als de kop in volkomen rust is. Dientengevolge wordt men a. h. w. van zelf tot de zelfde conclusie gedrongen, dat het zintuigepitheel der cristae voortdurend prikkels voortbrengt en dat de rol der cupulae, wanneer deze door de endolymphe bewogen of gedrukt worden, daarin bestaat, dat zij deze constante prikkels, in de cristae opgewekt, versterken of verzwakken. We komen dus tot dezelfde gevolgtrekkingen als vroeger voor de otolithenmaculae: een zintuigepitheel, dat constante prikkels voortbrengt, terwijl daarop liggende apparaten de sterkte dier prikkels in positieven of negatieven zin beinvloeden. Misschien berust op dit feit de buitengewoon groote gevoeligheid van het zintuigepitheel in het labyrinth.

De mechanische verhoudingen in de booggangen zijn zoodanig,

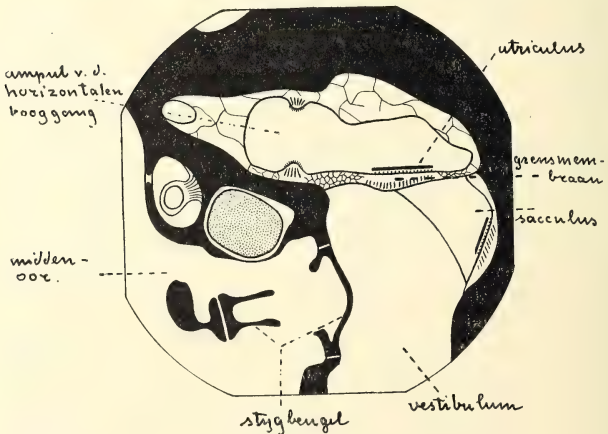
dat veranderingen van den prikkelingstoestand der zintuigcellen slechts voorbijgaand optreden, terwijl bij de otolithenmaculae blijvende veranderingen mogelijk zijn. Booggangs*reflexen* zijn steeds slechts voorbijgaand; aan het centrum worden echter constante prikkels door het zintuig toegezonden. Eene voorstelling dus, welke naverwant is aan het begrip „Tonuslabyrinth" van EWALD.

3. Opvallend is, dat bij caviae de in de booggangen opgewekte symptomen der eenzijdige labyrinthexstirpatie als kop- en oognystagmus, kop- en lichaamswending en horlogebewegingen, alle voorbijgaand zijn en na enkele dagen verdwijnen, terwijl de otolithensymptomen blijvend voortbestaan.

4. De volgorde waarin de verschillende zintuigcellen door de in het middenoor ingespoten cocaine verlamd worden, komt geheel overeen met de anatomische verhoudingen.

Op fig. 1 ziet men het middenoor, dat op de plaats van foramen

Fig. 1.



ovale en stijgbeugelplaat door eenen tamelijk dunnen wand van het vestibulum is gescheiden. Aan den medialen wand van het vestibulum ziet men den sacculus. Utriculus en booggangen zijn van deze door de grensmembraan (de Burlet) gescheiden en dus meer beschut tegen de inwerking van cocaine. Misschien berust het feit, dat de utriculus

voor de booggangen door de cocaine beïnvloed wordt, hierop, dat de utriculus direct op de grensmembraan rust.

De tot nu toe gemaakte gevolgtrekkingen worden door de volgende proefreeksen bevestigd en gedeeltelijk uitgebreid.

II.

Bij 5 caviae werd 5 dagen voor de eigenlijke proef het rechter labyrinth geëxstirpeerd. Na deze 5 dagen werd het typische symptomencomplex gevonden:

De kop is naar rechts gedraaid; bij zitten wordt deze naar rechts gewend of recht gehouden, kan echter ook naar links gewend worden. De kopdraaireacties, evenals de horizontale oogdraaireacties met bijbehoorende nystagmi zijn asymmetrisch. Vertikale en rotatoire oogdraaireacties zijn aanwezig. Spontane nystagmus ontbreekt of bestaat nog in geringe mate. De reacties op progressiebewegingen zijn positief. Gronddraaiing $\pm$ 90° naar rechts. De labyrinthoprichtreflexen vertoonen het typische beeld: bij rechter zijligging in de lucht ligt de kop in rechter zijligging; vanuit linker zijligging wordt deze naar den normalen stand gebracht. Het rechter oog is naar beneden (ev. iets naar achter), het linker naar boven (ev. iets naar voren) gedevieerd. Deze oogdeviatie is maximaal in linker zijligging van den kop, geringer bij normalen stand en minimaal bij rechter zijligging. De rechter voorpoot is, indien de kop symmetrisch ten opzichte van de romp is gebracht, slapper dan de linker.

Spuit men nu bij een dergelijk dier 0,1 ccm. 5 °/₀ cocaineoplossing in het linker middenoor, dan ziet men de gevolgen der rechtszijdige labyrinthexstirpatie in eene bepaalde volgorde verdwijnen, overeenkomend met de geleidelijke verlamming der verschillende zintuigcellen van het linker labyrinth. Ook hier het eerst eene verlamming van den sacculus. Dientengevolge wordt in de lucht bij linker zijligging van het dier de kop niet meer in linker zijligging, maar in rugligging gehouden (gronddraaiing). Tegelijkertijd of kort daarna begint het verschil der vertikale oogdeviatie bij rechter en linker zijligging af te nemen om ten slotte te verdwijnen; de oogen staan dan zoowel bij rechter als bij linker zijligging van den kop in normalen stand of zijn in beide zijliggingen nog zeer weinig in de oorspronkelijke richting afgeweken (waarschijnlijk door invloed van het linker booggangsapparaat). In dit stadium is de gronddraaiing nog steeds 90°; spontane nystagmus ontbreekt, de draaireacties en de wending van den kop hebben geene verandering ondergaan.

Na dit stadium begint de gronddraaiing te verminderen en verdwijnt tenslotte geheel, waardoor dan, daar nu beiderzijds zoowel de sacculi als de utriculi uitgeschakeld zijn, bij beide zijliggingen

van het dier in de lucht ook de kop in zijligging gehouden wordt.

Daartegenover staat, dat de linker booggangen nog intact zijn en dientengevolge de kop (bij ontbrekende gronddraaiing) naar rechts gewend is; de kopdraaireacties zijn asymmetrisch, terwijl de horizontale, vertikale en rotatoire oogdraaireacties resp.-nystagmi met die vóór de inspuiting in niets verschillen.

Ten slotte worden ook de booggangen verlamd. Dit geschiedt echter merkwaardigerwijze in twee etappen. In het eerste stadium verdwijnt de wending van den kop naar rechts en kan zelfs tengevolge van de *Bechterew*-compensatie voor eene wending naar links plaats maken, waarbij ook de horizontale kopdraaireacties niet meer op te wekken zijn en in de meeste gevallen een spontane *Bechterew*-nystagmus naar rechts ontstaat. In dit stadium zijn echter de verticale oogdraaireacties en -nystagmus nog duidelijk ja meestal zelfs zeer sterk aanwezig.

Daar volgens de algemeen gangbare meening de horizontale draaireacties in de horizontale booggangen worden opgewekt, moeten deze feiten wel zoo worden verklaard dat eerst door de cocaine de crista van de horizontale booggang wordt verlamd, terwijl in dit stadium de cristae van een of van beide verticale booggangen nog functioneeren. Ten slotte wordt ook de uitschakeling der booggangen compleet en is het symptomenbeeld aanwezig van een dier, bij welke beide labyrinthen met eenige dagen tusschenruimte, zijn geexstirpeerd. Alleen blijft de grootere slapheid van de pooten aan die zijde, waar de eerste labyrinthexstirpatie plaats vond, bestaan. De opeenvolgende verlamming der verschillende deelen van het booggangsapparaat weerspiegelt zich in een typisch verloop van den *Bechterew*-nystagmus; in het eerste stadium meer horizontaal slaand, wordt de richting van deze in het tweede stadium meer vertikaal. De nystagmus sloeg b.v. in verschillende gevallen in het eerste stadium bij het linker oog naar voren, bij het rechter naar achterbeneden; in het tweede stadium links naar bovenvoor, rechts verticaal naar beneden.

Thans moge eerst een typisch protocol van een dergelijke proef volgen:

Cavia XVI, wit.

14. XI. '23. Bij onderzoek bleken alle labyrinthreflexen, zoowel de tonische als die op beweging, normaal en symmetrisch aanwezig. Dier zit symmetrisch, oogen symmetrisch zonder nystagmus, geen gronddraaiing. Gehoorreactie positief.

15. XI. '23. Rechtszijdige labyrinthextirpatie.

20. XI. '23. Bij zitten wordt de naar rechts gedraaide kop rechtuit gehouden of naar rechts gewend, kan echter ook naar links gewend worden.

Booggangsreflexen: Kopdraaireactie bij draaien naar rechts negatief; bij draaien naar links positief.

Oogdraaireacties en -nystagmus; (zoowel hor.-, vert. als rotat.): als na rechtszijdige labyrinthextirpatie.

Reacties op progressiebewegingen: Liftreactie en „Sprungbereitschaft" beiderzijde positief.

Labyrinthoprichtreflexen: in beide zijliggingen, bij „kop boven" en „kop beneden" en bij rugligging geheel typisch voor een dier na rechtszijdige labyrinthextirpatie.

Verticale compensatorische oogstanden: als na rechtszijdige labyrinthextirpatie.

Gronddraaiing: 90°.

Rechter voorpoot dikwijls slapper dan linker, soms geen duidelijk verschil te zien.

10^{58}. 0,1 ccm. 5% cocaine in linker middenoor.

11. Rechter zijligging van dier in de lucht: kop in *rugligging* (gronddraaiing). Het verschil der verticale oogdeviatie in rechter en linker zijligging wordt minder.

11^{1}. Rechter zijligging: kop in rugligging. Verschil der verticale oogdeviatie in beide zijliggingen verdwenen. Gronddraaiing 90° naar rechts.

11^{2}. Horizontale en verticale oogdraaireacties met nystagmus: positief. Gronddraaiing 70°. Kop bij zitten naar rechts gewend.

11^{4}. Gronddraaiing 30°. Horizontale oogdraaireactie: positief. Geen spontane nystagmus.

11^{6}. Gronddraaiing verdwenen. Horizontale oogdraaireacties: zwak positief, even daarna negatief. Verticale oogdraaireacties: sterk positief. Geen spontane nystagmus.

11^{7}. Kop naar links gewend; geen gronddraaiing.

$11^{7\frac{1}{2}}$. Begin van den spontanen nystagmus, eerst slechts aanvalsgewijze. Rechter oog naar voren, iets naar boven gedevieerd, met nystagmus naar achter iets naar beneden; linker oog naar achter gedevieerd met nystagmus naar voren.

11^{9}. Geen gronddraaing. Kop naar links gewend. Verticale oogdraaireacties ook verdwenen.

11^{12}. Rechter oog naar boven gedevieerd met nystagmus naar beneden; linker oog naar beneden gedevieerd met nystagmus naar voorboven.

Bij zitten kop naar links gewend. Geen gronddraaiing; bij hangen „kop beneden" alleen wenden van den kop naar links.

Rechter voorpoot slapper dan linker.

Linker facialis intact (corneareflex).

Bij één proef trad alleen een *Bechterew*-omslag van de gronddraaiing op, terwijl geen omslag van den nystagmus en de kopwending plaats vond. In dit geval verdwenen in het eerste stadium der booggangsverlamming de horizontale draaireacties en de rechtswending, terwijl de verticale oogdraaireacties nog sterk aanwezig waren en eerst in het tweede stadium verdwenen. In een ander geval sloeg de gronddraaiing reeds om op een oogenblik waarop nog geen symptomen van booggangsverlamming aanwezig waren. Daarentegen trad in eene andere proef

geen omslag der gronddraaiing, wel der kopwending op, terwijl ook een *Bechterew*-nystagmus der oogen aanwezig was.

Ook dit wijst weer op de zelfstandigheid der booggangs- en utriculussymptomen; gronddraaiing en kopwending gedroegen zich dan ook bij deze proeven geheel onafhankelijk van elkaar.

Den volgenden dag was de werking van de cocaine in alle gevallen volkomen verdwenen en functioneerde het linker labyrinth weer normaal.

III.

Bij de proeven, waarbij na rechtzijdige labyrinthexstirpatie, het inspuiten van cocaine in het linker middenoor reeds 4—5 uur daarna plaats vond, kon men het opeenvolgende verdwijnen der acute symptomen zeer goed vervolgen.

De dieren zaten na de reehtszijdige labyrinthexstirpatie met sterke rechtswending van den kop en lichaam, hadden kopnystagmus naar links, sterke kopdraaiing naar rechts, typische oogdeviatie (rechts naar beneden, links naar voorboven), welke bij linkerzijligging maximaal, bij rechter zijligging van den kop minimaal was. Oognystagmus rechts naar voorboven, links naar achter beneden.

Bij linker zijligging van het dier in de lucht stond de kop in normalen stand, bij rechter zijligging daarentegen in rechter zijligging. Sterke asymmetrie der kopdraaireacties en horizontale oogdraaireacties bij draaien naar rechts en naar links. Rolbewegingen naar rechts.

Een typisch protocol van eene dergelijke proef is het volgende:

Cavia XII, wit-zwart.

6. XI.' 23. Bij onderzoek blijken alle labyrinthreflexen symmetrisch aanwezig. Dier zit symmetrisch, oogen eveneens symmetrisch zonder nystagmus. Geen gronddraaiing. Gehoorreactie positief.

10^{15}. Rechtszijdige labyrinthexstirpatie.

3. Kop naar rechts gedraaid en gewend, nystagmus naar links, gronddraaiing 90° naar rechts. Rechter oog naar achter en beneden gedevieerd met nystagmus naar voorboven; linker oog met deviatie naar voorboven en nystagmus naar achter en beneden.

Bij onderzoek met normalen stand van den kop en bij „kop beneden": geen omslaan van den nystagmus

Typische oogdeviatie en labyrinthoprichtreflexen als na rechtszijdige labyrinthexstirpatie.

Oogdraaireacties eveneens typisch voor rechtszijdige labyrinthexstirpatie. Kopdraaireactie bij draaien naar rechts afwezig, bij draaien naar links positief.

Rechter voorpoot slapper dan linker.

4^{28}. 0.1 ccm. 5% cocaine in het linker middenoor.

4^{30}. Rechter zijligging: kop 45° naar rugligging toe.

4^{31}. Rechter zijligging: kop in rugligging.
Verschil in oogdeviatie bij rechter en linker zijligging neemt af.
Gronddraaiing 90°.
Kopdraaireactie bij draaien naar links nog positief. Sterke spontane nystagmus.

4^{33}. Verschil in oogdeviatie bij rechter en linker zijligging gering; bij normalen stand van den kop zijn beide oogen nog iets gedevieerd. Typische spontane nystagmus.

4^{36}. Verschil in oogdeviatie bij rechter en linker zijligging verdwenen; bij verschillende standen van den kop in de ruimte nog wel eene geringe, maar constante deviatie der oogen in de oorspronkelijke richting.
Gronddraaiing 90°.
Kopdraaireactie bij draaien naar links nog positief; spontane nystagmus even sterk bij beide zijliggingen.

4^{38}. Gronddraaiing 70°, kort daarna 45°.
Kopdraaireactie bij draaien naar links positief; nystagmus nog aanwezig

4^{39}. Gronddraaiing 30°.
Zoowel bij rechter als bij linker zijligging: kop in zijligging.

4^{41}. Gronddraaiing 20°.
Kopdraaireactie naar links duidelijk positief; naar rechts negatief.
Spontane nystagmus positief: rechter oog naar voorboven; linker naar achterbeneden.
Zit dikwijls met kop rechtuit, dan weer kop naar rechts gewend.

4^{44}. Verdraagt bij hangen „kop boven" zoowel rechter als linker zijligging.

4^{45}. Gronddraaiing weg.
Kopdraaireactie bij draaien naar links nog duidelijk. Spontane nystagmus zeer duidelijk. Bij zitten neiging tot wenden van kop naar rechts.

4^{49}. Oogen nog iets gedevieerd. Nystagmus rechter oog naar boven; linker oog naar beneden.
Bij zitten kop ongeveer 30° naar rechts gewend.

4^{52}. Kopdraaireacties bij draaien naar links afwezig of minimaal.
Spontane nystagmus zwak: rechter oog naar achter, linker naar voren (omslag!).

4^{53}. Oogdeviatie verdwenen. Rechter voorpoot *veel* slapper.

4^{58}. Nystagmus van rechter oog naar achterbeneden; van linker naar voorboven, dus volledige omslag bij vroeger vergeleken.
Gronddraaiing 10° naar rechts (dus geen omslag).
Wending van kop meest afwezig, soms neiging tot wending naar rechts.

5^{3}. Nystagmus als 4^{58}. Gronddraaiing weg. Bij zitten kop recht.

5^{5}. Nu gronddraaiing 45° naar links omslag).
Rolt bij zitten eenmaal naar links, kan echter uit linkerzijligging gaan opzitten.

Zooals men ziet verdwenen in deze proef eerst de ,,asymmetrische" labyrinthoprichtreflexen, zoodat bij rechter zijligging van het dier in de lucht de kop in rugligging werd gehouden. Tegelijkertijd nam het verschil in oogdeviatie bij rechter en linker zijligging af en verdween kort daarop geheel. In dit stadium der sacculusverlamming

waren dan nog aanwezig: de gronddraaiing, de spontane nystagmus, de wending van den kop, de asymmetrie der kopdraaireactie bij draaien naar rechts en naar links en eene lichte oogdeviatie der oogen in de oorspronkelijke richting.

Daarna begon de verlamming van den utriculus, zich uitend in eene vermindering en tenslotte een verdwijnen van de gronddraaiing.

Tenslotte trad de verlamming van de booggangen op: de kopdraaireactie verdween evenals de wending van den kop; de nystagmus sloeg om. Eerst eenige minuten later sloeg ook de gronddraaiing om en rolde het dier naar links.

Interessant was de richting van den spontanen nystagmus gedurende het optreden van de booggangsverlamming.

De nystagmus sloeg eerst	rechts: naar voorboven,	links: naar achterbeneden
Kort voor het verdwijnen der kopdraaireactie	rechts: naar boven (verticaal),	links: naar beneden (verticaal)
Na het verdwijnen der kopdraaireactie (omslag van den nystagmus)	rechts: naar achter horizontaal),	links: naar voren (horizontaal)
Eenige minuten later.	rechts: naar achterbeneden	links: naar voorboven.

Bij het begin der verlamming van de horizontale booggang werd dus de tot dusverre schuine nystagmus zuiver verticaal. Nadat de verlamming van de horizontale booggang compleet was geworden, was de richting van den „omslag" nystagmus zuiver horizontaal, terwijl bij complete verlamming van het geheele labyrinth deze laatste in de omgekeerde richting sloeg als voor het inspuiten met cocaine.

Of de omslag van den spontanen nystagmus bij deze proeven, waarbij tusschen het inspuiten van cocaine en labyrinthexstirpatie van de andere zijde slechts eene tijdsruimte van 4—5 uur lag, op eene beginnende Bechterew-compensatie of op een prikkelingstoestand van den octavusstam aan de geopereerde zijde berust, is niet zonder meer uit te maken, daar van beide hetzelfde effect is te verwachten.

De verandering van de richting van den spontanen nystagmus kwam in 3 van de 5 proeven bij het begin der verlamming der booggangen op boven geschilderde wijze tot stand; tweemaal trad slechts een zwakke „omslag" nystagmus op, welke echter in de eene proef ook zuiver horizontaal begon.

Opvallend was, dat in deze reeks van proeven het moment van intreden der utriculus- en booggangsverlamming niet zoo scherp gescheiden was als bij de andere proeven (onder I en II beschreven). De oorzaak hiervan is nog niet nader onderzocht.

SAMENVATTING.

De bovenvermelde proeven, waarbij cocaine in het middenoor van caviae werd gespoten, toonen aan, dat zoowel in het geval, dat het andere labyrinth intact is, als in het geval, dat dit laatste van te voren operatief is verwijderd, de symptomen der cocaineverlamming zich volgens bepaalde wetten opeenvolgend ontwikkelen en dat de symptomen, wat de verlamming der otolithenreflexen betreft, volkomen overeenkomen met de vroeger geuite veronderstellingen. Tevens is het mogelijk nog eene andere groep van symptomen af te zonderen, welke aan eene eenzijdige verlamming der booggangen zijn toe te schrijven. Is het labyrinth aan de andere zijde intact, zoo worden deze symptomen door cocaine te voorschijn geroepen; is het labyrinth van de andere zijde van te voren verwijderd, zoo verdwijnen deze symptomen successievelijk.

Verlamming van den sacculus veroorzaakt bij intact andere labyrinth eenzijdige opheffing der „asymmetrische" labyrinthoprichtreflexen en verticale oogdeviatie zonder nystagmus. De „symmetrische" labyrinthoprichtreflexen blijven intact en zijn daarom waarschijnlijk van de utriculi afhankelijk.

Is het tweede labyrinth van te voren verwijderd, dan veroorzaakt de verlamming van den sacculus het verlies van alle „asymmetrische" labyrinthoprichtreflexen en het verdwijnen der bestaande verticale oogdeviatie (met uitzondering van eene kleine rest, welke waarschijnlijk van de booggangen afhankelijk is).

Verlamming van den utriculus veroorzaakt, wanneer het andere labyrinth intact is, eene gronddraaiing naar de ingespoten zijde, en, wanneer het andere labyrinth van te voren is verwijderd, het verdwijnen van de bestaande gronddraaiing en in sommige gevallen eene gronddraaiing naar de andere zijde (*Bechterew*omslag; indien het andere labyrinth slechts enkele uren van te voren is geëxstirpeerd, ev. door eene prikkeling van den octavusstam aan die zijde).

Bij intact labyrinth treedt, zoolang de booggangen niet door de cocaine beïnvloed en door draaiing en calorisch prikkelbaar zijn, noch spontane nystagmus van kop en oogen noch eene wending van den kop op.

Zoodra de *booggangsverlamming* intreedt, ziet men eene wending van den kop en spontane nystagmus van kop en oogen, terwijl tegelijkertijd de draaireacties bij draaien naar rechts en naar links asymmetrisch worden.

Indien het andere labyrinth van te voren is verwijderd, verdwijnen de wending van den kop, de ev. nog aanwezige lichte verticale

oogdeviatie en de draaireacties op kop en oogen. Tevens ontstaat er een spontane nystagmus naar de omgekeerde richting.

Bij het begin van de booggangsverlamming werd gevonden, dat de horizontale draaireacties van kop en oogen verdwenen en eerst later hetzelfde met de verticale draaireacties het geval was. Ook de richting der oogbewegingen bij het omslaan van den nystagmus wijst er op, dat eerst de horizontale booggang en het laatst een verticale booggang wordt verlamd.

Uit de symptomen, waargenomen bij gecentrifugeerde caviae, bij welke cocaine in één middenoor was ingespoten, werd in eene vorige mededeeling de gevolgtrekking gemaakt, dat het zintuigepitheel der maculae voortdurend prikkels voortbrengt, wier sterkte door trekken of druk der otilithenmembranen wordt veranderd.

De thans beschreven proeven maken het hoogstwaarschijnlijk, dat ook aan het zintuigepitheel der cristae, de eigenschap, voortdurend prikkels voort te brengen, moet worden toegeschreven. De sterkte dier prikkels zou dan worden veranderd door mechanische invloeden, welke de cristae bereiken, wanneer bewegingen resp. versnellingen van den kop plaats vinden.

Palaeontologie. — P. KRUIZINGA: „*Apateodus Corneti* (*For.*) *in het Senoon van Zuid-Limburg.*"

(Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en J. F. v. BEMMELEN).

Eenigen tijd geleden werd bij Valkenburg in een kleine groeve in het Mucronaten Krijt een zeer goed bewaarde kop van een fossiele beenvisch gevonden, welke op het oogenblik in het bezit is van den Heer HUB. LEUFKENS te Heerlen.

Van dit exemplaar (fig. 1—4) zijn bij het ontbindingsproces slechts enkele stukken van de kieuwdeksels en van de wangbedekking van hun plaats gegleden, waarbij sommige verloren zijn gegaan en tijdens het fossilisatieproces werd deze kop niet platgedrukt, doch slechts een weinig scheef, n.l. van links naar rechts, zoodat alle beenstukken zich nog bijna volkomen in hun normale verband bevinden. Bij het uithakken uit de groeve is tenslotte het geheel slechts weinig beschadigd.

Allereerst werd het gesteente overal weggeprepareerd, waar dit zonder het geheel te verzwakken mogelijk was. Zoo werden aan de linkerzijde de neus- en oogholte schoongemaakt en omdat het hyomandibulare aan die zijde iets was beschadigd, werd dit been ook nog aan de rechterzijde uitgeprepareerd. Aan denzelfden kant werden de stukken van de kieuwdeksels blootgelegd. Voor zoover mogelijk werden de tanden aan weerszijden te voorschijn gebracht. Aan de rechterzijde kon dit slechts zeer onvolledig gebeuren, daar resten van het praemaxillare, welke aan die zijde waren bewaard, dit niet wenschelijk maakten. Aan den onderkant werd de tongbeenboog uitgeprepareerd en aan de achterzijde de rechterhelft van het achterhoofd. Een drietal ruggewervels werden daarbij in situ aangetroffen. Schubben werden niet gevonden.

Deze kop van Valkenburg gelijkt op het eerste gezicht eenigermate op dien van een snoek, vooral wanneer men hem van boven beziet; ook hier eindigt de snoet tamelijk stomp, naar verhouding is hij evenwel korter. Van achteren naar voren neemt de breedte slechts langzaam af. Van terzijde is de kop iets afgeplat. In de lengterichting is de bovenkant van den schedel geheel recht, overdwars is het schedeldak plat tusschen de oogen, hier achter, zoowel als er voor, is het naar weerszijden min of meer rond. Het achter-

hoofd is concaaf, doordat de pterygoidea verder achterwaarts uitsteken dan de epiotica en het supraoccipitale. Met het schedeldak maakt het een bijna rechten hoek.

De totale lengte vanaf de punt van den snoet tot aan het achterste einde van de aanwezige resten van de kieuwdeksels is 19,2 cM. Hierbij kan worden opgemerkt, dat van de kieuwdeksels slechts kleine stukjes ter breedte van enkele millimeters ontbreken. De lengte van den bovenkant van den schedel is 13.2 cM. De lengte van de onderkaak is 13,3 cM. Het ophangpunt hiervan ligt daardoor juist onder het achterhoofd, zoodat de bek, waarin een groot aantal kleine en groote tanden zitten, zeer wijd is. De hoogte vanaf den top van het supraoccipitale tot aan den onderkant van de onderkaak bedraagt links 9,4 cM., rechts 8,6 cM. De hoogte van den schedel is in het midden aan de achterzijde 3 cM. De breedte van den kop is achteraan 5 cM., midden boven de oogen 4,1 cM. en op 1 cM. afstand van den snoet nog 2,2 cM.

De oogholte is bijna rond en naar achteren open, doordat de reeks circumorbitalia verbroken is. Zooals we aanstonds zullen zien, is deze hier bijna geheel verdwenen. De begrenzing der achterzijde wordt nog aangeduid door een benedenwaarts gerichte punt van het sphenoticum. De voorrand is 5,6 cM. van den snoet verwijderd, zoodat de oogholte ongeveer midden tusschen den snoet en het achterhoofd is gelegen. De hoogte is 4,1 cM., de lengte is ongeveer 4,5 cM. en de diepte bedraagt ongeveer 2 cM.

Voor de oogholte bevindt zich nog eene kleinere van langwerpigen vorm, n.l. de neusholte, waarvan de lengte 2,6 cM. bedraagt, de breedte 1 cM. en de diepte 7 mM.

Aan dezen schedel werden de volgende beenderen waargenomen:

supraoccipitale,
pleurooccipitale,
basioccipitale,
epioticum,
pteroticum,
sphenoticum,
prooticum,
alisphenoid,
basisphenoid,
parasphenoid,
orbitosphenoid,
pleuroethmoid,
mesethmoid met nasalia,
frontale, (ten deele als afdruk bewaard)

vomer,
palatinum, (linker en rechter, met één' vangtand)
ectopterygoid, (het linker, zoowel als het rechter met één' tand)
entopterygoid,
metapterygoid,
hyomandibulare,
quadratum,
symplecticum, (alleen links aanwezig)
maxillare, (grootendeels als afdruk, het linker is zeer fragmentair)
praemaxillare, (het linker met drie tandjes en sporen van twee, het rechter één tandje)
dentale, (ten deele als afdruk, het linker met zes tanden, de afdruk van één' tand en sporen van een paar, het rechter met acht tanden en sporen van enkele andere)
articulare,
angulare,
stylohyale, (alleen het linker is te zien)
epihyale,
ceratohyale,
hypohyale,
basihyale,
praeoperculum, (alleen het rechter aanwezig)
operculum, (alleen het rechter aanwezig)
suboperculum,
interoperculum,
radii branchiostegi, (alleen rechts aanwezig)
postorbitalia?

Achter aan het achterhoofd bevinden zich nog de drie voorste wervels. Van de beenderen, welke gepaard zijn, zijn beide exemplaren aanwezig, behalve waar dit is aangegeven.

Van deze vischsoort zijn groote en kleine fragmenten herhaaldelijk aangetroffen, zooals blijkt uit die, welke in verschillende collecties in ons land en ook elders aanwezig zijn [1]); de losse tanden zijn daarbij buiten beschouwing gelaten. Voor zoover deze resten van

[1]) Gaarne dank ik hier Prof. ESCHER te Leiden, Prof. DOLLO in Brussel en Prof. FRAIPONT in Luik, den Heer H. LEUFKENS te Heerlen en den Heer UMBGROVE, geol. cand. te Leiden, die mij allen welwillend toestonden de hier genoemde resten te bestudeeren en te beschrijven, waardoor dit onderzoek zoo volledig mogelijk kon zijn. Tevens dank ik gaarne Mej. POPTA, die mij in het Museum van Natuurlijke Historie te Leiden in de gelegenheid stelde skeletten van recente visschen te vergelijken en Prof. VAN BEMMELEN, Prof. VAN KAMPEN, Dr. TATE REGAN en Dr. DE BEAUFORT, die mij enkele boekwerken en geschriften verschaften, welke ik aanvankelijk niet kon verkrijgen.

eenig algemeen belang zijn, volgt hiervan eene korte beschrijving. Het scheen me echter gewenscht, daarna een volledig beeld te geven van de anatomie van een' kop van deze vischsoort, door gebruik te maken van alle verzamelde gegevens.

Een onderkaakfragment (fig. 9) uit het Boven Senoon van Zuid-Limburg, waarvan de vindplaats niet nader bekend is, is aanwezig in het Geol. Museum te Delft N°. 1264. Ned. Het is een voorste gedeelte van de rechterkaak, van binnen gezien. De lengte is 12,2 cM. Het dentale, dat alleen is overgebleven, draagt een groot aantal tanden, welke nader beschreven worden op blz. 991 en 992.

Aan een verbrijzelden schedel, afkomstig uit het Boven Senoon van Valkenburg en aanwezig in het Geol. Museum te Leiden (N°. 8594 van de coll. STARING) zijn de volgende beenderen te herkennen: beide frontalia, rechter pleuroethmoid, rechter ectopterygoid met één grooten tand van 2,5 cM. lengte, rechter palatinum met een afdruk van den vangtand, mesethmoid, vomer, fragmenten van het rechter praemaxillare met nog een enkel tandje, rechter en linker dentale, rechter en linker articulare, het linker praeoperculum, dat vrij goed bewaard is en enkele niet nader te bepalen beenfragmenten. Het stuk is ongeveer 15 cM. lang en 11 cM. breed.

Een kopfragment, een geopende, doch platgedrukte bek (fig. 10), gevonden in eene groeve in het Boven Senoon aan den weg van Valkenburg naar Sibbe, werd mij door den Heer UMBGROVE geleend. De lengte van het stuk is 10,5 cM., de hoogte 5 cM. In de eerste plaats zijn hieraan te zien: fragmenten van rechter en linker ectopterygoid met eenige tanden. Mooi bewaard is het achtereinde van het linker ectopterygoid. In dit been bevinden zich nog 4 tanden, welke later nader, op blz. 991, zullen worden besproken en er voor ligt nog de spits van eenen grooteren; het rechter ectopterygoid vertoont slechts een deel van een grooten tand, welke correspondeert met laatstgenoemden tand uit het linker ectopterygoid. Van de onderkaak zijn stukken van linker en rechter dentale aanwezig, de voorste gedeelten ontbreken. Het linker dentale is zeer gaaf. Het vertoont de achterbegrenzing van dit been en draagt nog vier tanden van uiteenloopende grootte. Van een paar andere is de spits afgebroken. Het rechter dentale is sterk gehavend en ten deele alleen als afdruk bewaard, het bevat alleen nog de drie tanden, welke correspondeeren met de drie voorste uit het linker dentale. Het linker articulare vertoont nog een groot deel van het gewricht voor de onderkaak, het rechter is voor het grootste deel nog slechts als afdruk te zien. Van de hyoidboog zijn bewaard: epihyale, ceratohyale en mogelijk nog resten van de voorste beentjes.

Een tweetal van de fragmenten, welke bewaard worden in het Musée Royal d'Histoire Naturelle te Brussel zullen hier nader worden besproken. In de eerste plaats een schedelfragment uit het Boven Senoon van Kunrade, N°. I. G. 6921, behoorende bij de collectie Ubaghs, dat van belang is, omdat hieraan het geheele achterhoofd en een groot gedeelte van den zijwand van den schedel bijzonder fraai bewaard zijn, terwijl tevens de naden tusschen de verschillende beenderen zeer duidelijk zijn (fig. 12 en 13). De breedte van het achterhoofd is 3.7 cM. We zien hier het supraoccipitale, beide pleurooccipitalia met het foramen magnum, het basioccipitale, beide epiotica, beide pterotica en de beide overdekte posttemporale groeven. Aan de linkerzijde van dit schedelfragment zien we van de overige schedelbeenderen nog het prooticum, het sphenoticum en een gedeelte van het parasphenoid. Van de doorboringen vallen hier op de foramina in het prooticum en in het pleurooccipitale. Aan de bovenzijde zijn tenslotte nog te vermelden fragmenten der frontalia. Duidelijk zichtbaar is ook hier de naad tusschen het supraoccipitale en de frontalia. De lengte van dit stuk is 5.5 cM In de tweede plaats vermeld ik hier een' schedel, afkomstig uit de coll. Bosquet, N°. I. G. 4289 en gevonden in het vuursteenhoudende tufkrijt van Valkenburg, waarvan het achtergedeelte grootendeels is verdwenen (fig. 11). De lengte van het geheele stuk is 13 cM. De bek is een weinig geopend, waardoor het gesteente er uit geprepareerd kon worden. Aanwezig zijn de voorste gedeelten der frontalia, het parasphenoid, het linker pleuroethmoid, het mesethmoid, het vomer, de beide palatina, elk met één vangtand. Het rechter palatinum is ten deele beschadigd. Verder zien we de beide ectopterygoidea met enkele tanden en het linker entopterygoid, evenals fragmenten van de beide praemaxillaren met 8 tandjes. Als een gedeelte van het rechter entopterygoid zal waarschijnlijk moeten worden opgevat het stukje been, dat in de oogholte ligt. In de onderkaak zijn aan beide zijden aanwezig resten van het dentale, links met een elftal tanden en rechts met een tiental, waarvan de voorste het kleinst zijn, en tenslotte nog het articulare. Dit laatste is grootendeels slechts als afdruk bewaard. Van verschillende der overige beenstukken zijn hier en daar nog eenige overblijfselen aanwezig.

Tenslotte moet hier vermeld worden het fragment, dat door Forir werd beschreven als *Enchodus Corneti* (fig. 7 en 8). Het is uit het onderste Maastrichtsche krijt van Valkenburg afkomstig en aanwezig in het Geol. Museum in Luik. Ongelukkig werd dit stuk juist onderst boven gehouden, zoodat de onderkaak als bovenkaak is beschreven, enz. De figuren en beschrijving van dit fossiel moeten dus ook geheel

gewijzigd worden. Het achterstuk van den kop ontbreekt geheel en eveneens is de snoet iets beschadigd. Het fragment is lang 7.3 cM., achteraan is het 3.8 cM. breed en 3.3 cM. hoog. Te herkennen zijn nog de voorste rest van het parasphenoid, het vomer (grootendeels als afdruk), nasalia?, de beide palatina. Van den vangtand van het rechter palatinum is alleen nog maar de afdruk te zien, die van het linker palatinum is aanwezig, doch is iets minder ver naar voren geplaatst. Een fragment van het rechter ectopterygoid bevat nog één grooten tand van 2.5 cM. lengte, welke door de onderkaak heen steekt; het linker draagt een dergelijken tand met nog een tweetal kleinere daarachter. Het linker praemaxillare draagt zeven tandjes en de afdruk van een achtste is waar te nemen, het rechter heeft er acht. Van de onderkaak zijn gedeelten van beide dentalia bewaard. Het linker met zes tanden, waartusschen nog een drietal verspreid liggen, welke van hun plaats gebroken zijn, het rechter bezit nog vijf tanden, terwijl nog één er los bij ligt. Van het linker articulare is waarschijnlijk nog het voorste stuk over. Van de hyoidboog zijn tenslotte een paar fragmenten te zien, welke vermoedelijk resten zijn van de ceratohyalia, de hypohyalia en mogelijk van het basihyale.

Afgaande op de grootte der beenstukken van al de hier beschreven fossiele resten moeten we aannemen, dat ze alle, behalve misschien dat van fig. 12, van ongeveer even groote visschen afkomstig zijn.

De minder belangrijke resten, welke ik nog aantrof in het Geol. Museum te Leiden waren een symphyse van eene onderkaak, afkomstig van den St. Pietersberg, een fragment van een rechterhelft van eene onderkaak gevonden bij Valkenburg en een paar beenstukjes (ectopterygoid) met tanden uit den St. Pietersberg en in het Museum te Brussel zag ik een paar schedelfragmenten van Kunrade, een schedelfragment van Valkenburg en een gedeelte van een onderkaak, dat gevonden is tusschen Huls en Simpelveld. Deze laatste fragmenten zijn alle evenals de vorige afkomstig uit het Boven Senoon en vermoedelijk uit de onderste afdeeling van het Maastrichtsche krijt.

Gaan we nu over tot eene nadere beschrijving van de verschillende beenstukken aan eenen kop, ter grootte van het eerstgenoemde exemplaar.

Van het supraoccipitale neemt een belangrijk stuk deel aan de vorming van het achterhoofd, terwijl een bijna even groot gedeelte ervan behoort tot de beenderen van het schedeldak. Het eerste is een vrij stevige en min of meer zeshoekige, concave beenplaat,

waarvan de hoogte 1,2 cM. en de breedte 1,6 cM. bedraagt. Bovenaan bevindt zich de crista als een 4 mM. lang, achteruitstekend beenstaafje. Het andere deel is eenigszins driehoekig van vorm; de lengte ervan bedraagt 1,3 cM. De naden tusschen het supraoccipitale en de aangrenzende beenstukken van het achterhoofd zijn recht en duidelijk, evenals trouwens alle overige naden aan het achterhoofd; die tusschen het bovenste deel van het supraoccipitale en de aangrenzende beenstukken van het schedeldak zijn daarentegen iets moeilijker waar te nemen.

De beide pleurooccipitalia omsluiten aan den achterkant van den schedel het foramen magnum geheel en helpen verder met het basioccipitale aan de onderzijde de schedelbasis vormen. Het gedeelte van de pleurooccipitalia, dat van het achterhoofd deel uitmaakt, is blijkbaar stevig en eveneens zeshoekig van vorm. De hoogte bedraagt 1,3 cM., de grootste breedte 1,6 cM. Geheel onderaan zit aan elk een kort uitsteeksel, dat als een zygapophyse op het lichaam van den voorsten wervel ligt. Het andere stuk van deze beenderen staat hier ongeveer loodrecht op en is vierhoekig, lang 8 mM. en hoog eveneens 8 mM. Nabij den achterrand bevat het het iets langwerpige foramen voor den nervus vagus (X). Het foramen magnum is min of meer afgerond driehoekig van vorm, de hoogte ervan bedraagt 5 mM., de grootste breedte ligt onder en is 8 mM.

Het basioccipitale past met een vlak van elliptischen vorm aan den eersten wervel. De hoogte is 8 mM., de breedte 11 mM. Het strekt zich langs de onderzijde van den schedel nog ongeveer 11 mM. uit en is van onder voorzien van twee naar voren in breedte toenemende kielen.

Aan weerszijden van het supraoccipitale liggen de epiotica langs den bovenrand van het achterhoofd. Het zijn min of meer ruitvormige en stevige beenstukjes. Ze vormen aan den bovenrand van het achterhoofd niet, zooals we veelal waarnemen, duidelijke uitsteeksels, doch ze zijn plaatselijk slechts een weinig convex gebogen; van eigenlijke uitsteeksels is hier geen sprake. De hoogte is 8 à 9 mM., de breedte 10 mM. Achter aan den bovenkant van den schedel zien we ze als driehoekige beenstukjes van 5 mM. breedte en 10 mM. lengte. Het zijn deze beentjes, welke HAY bij *Empo nepaeolica* Cope abusievelijk voor parietalia houdt (9 blz. 85, fig. 69).

Afzonderlijke opisthotica ontbreken blijkbaar.

De pterotica liggen aan de bovenzijde van den schedel voor de epiotica en terzijde van de frontalia en het supraoccipitale. Voor een kleiner gedeelte maken ze echter ook deel uit van de onderzijde van den schedel en van het achterhoofd. Deze drie gedeelten zijn

alle min of meer vierhoekig van vorm. De pterotica vormen de beide buitenste uitsteeksels van het achterhoofd en deze reiken, hoewel ze niet bijzonder lang zijn, toch verder naar achter dan de epiotica en de crista van het supraoccipitale. Van boven gezien is daardoor het achterhoofd iets concaaf. Bovendien is het bovenste deel van de pterotica geheel als een dak over de posttemporale groeven, welke links en rechts tusschen epioticum en pteroticum liggen, heengegroeid. Het onderste stuk draagt met het aangrenzende sphenoticum een gewrichtsvlak voor het hyomandibulare. Het bovenste deel van de pterotica is lang 2 cM. en breed 2,1 cM., het onderste is breed 8 cM. Het stuk, dat deel uitmaakt van het achterhoofd is lang 8 m.M. en breed 6 m.M. en grenst aan het pleurooccipitale en aan het epioticum.

De sphenotica zijn beentjes van zeer onregelmatigen vorm, aan weerszijden van de frontalia en schuin boven de orbita gelegen. Ze grenzen van achter aan de pterotica. Hun vorm is eenigermate die van een driezijdige pyramide, doordat ze zich zoowel langs de zijde van den schedel als langs den rand der orbita ombuigen. De top duidt de achterste begrenzing der orbita aan. Van voren maken ze zoodoende deel uit van den wand der orbita; aan elke zijde vormt een stuk, zooals we zagen, met het pteroticum een gewrichtskom voor het hyomandibulare. De lengte langs den rand der oogholte is 1,6 cM., die langs de zijde van den schedel 1,8 cM. en langs den wand der orbita strekken de sphenotica zich nog 1,2 cM. uit.

De prootica zijn in de zijwanden van den schedel gelegen. Ze grenzen van boven aan de sphenotica en pterotica, van achter aan de pleurooccipitalia en van onder aan de vleugelvormige aanhangsels van het parasphenoid. Het zijn vijf- à zeshoekige beentjes, waarvan de hoogte 1,2 cM. is. De breedte is slechts even grooter. Ze zijn doorboord door een paar duidelijk te herkennen foramina, waarvan de eene den nervus trigeminus (V), doorlaat, een tweede den nervus facialis (VII) en de overige verschillende bloedvaten.

Het parasphenoid is zeer lang. Het achtereinde sluit aan het basioccipitale aan op ruim 1 cM. afstand van het achterhoofd, vooraan overdekt het nog het achtereinde van het vomer. De lengte is zeker ongeveer 10 cM. Aan het achtereinde bezit het parasphenoid een tweetal vleugels, welke, zooals we zagen, in verbinding treden met de prootica. De hoogte is hier 1,1 cM., naar voren wordt deze vrij snel geringer, doch voordat de vleugels geheel verdwijnen, treffen we aan beide zijden van het parasphenoid nog een smal beenstaafje aan, dat bovenaan vast zit aan het prooticum. Hierdoor is aan elke zijde een vrij groote opening aanwezig tusschen den vleugel van het parasphenoid, het prooticum en het genoemde staafje. De opening

tusschen deze beenderen van linker- en rechterzijde is verder 1,2 cM. hoog en 1 cM. breed. Waar de vleugels ophouden, verkrijgt het parasphenoid een driehoekige doorsnede (hoogte 3 à 4 mM.) en geheel vooraan eindigt het als een dun, gootvormig uitgehold beentje.

Het Y-vormige basisphenoid staat op korten afstand voor de prootica midden op het parasphenoid, en voor de juist vermelde opening (myodoom), juist daar, waar de vleugels van dit been zijn verdwenen. Het onderste gedeelte van het basisphenoid wordt gevormd door een beenplaatje, dat 1,4 cM. lang en 0,4 cM. breed is. Door middel van de beide bovenste beenen, welke veel korter zijn, is het met de alisphenoidea en met de prootica verbonden. De totale lengte van het basisphenoid is 1,8 cM.

De alisphenoidea zijn zeer onregelmatig van vorm, ze zijn van onder eerst zeer smal, doch naar boven worden ze snel breeder en buigen zich daarbij buitenwaarts om, zoodat ze meehelpen het dak der orbita te vormen. De grootste lengte is ± 2 cM., de breedte 1 cM. Met hun achterzijde grenzen ze aan de prootica, van boven aan de sphenotica en tusschen het linker en rechter alisphenoid en de beenen van het basisphenoid is nog de opening voor de naar voren gaande bloedvaten, den nervus olfactorius (I) en den nervus ophthalmicus (II) te zien. De alisphenoidea grenzen aan de voorzijde aan dunne, plaatvormige beenderen, welke een deel van het dak der beide orbita's vormen en zich vereenigen tot een verder ongepaard orbitosphenoid, dat als een half cirkelvormige plaat in het overigens niet verbeende interorbitaalseptum neerhangt. De hoogte van de verticale plaat is ongeveer 1 cM., de lengte 1,7 cM.

De pleuroethmoidea schenen eerst korte, haltervormige beenstukken te zijn, lang 1,2 cM. en in het midden 6 mM. dik. Ze zijn gelegen aan de voorzijde van elk van de beide orbita's tusschen frontale en de boog van het palatinum en pterygoidea. Bij het verder prepareeren bleken ze zich in den voorwand der orbita en in den achterwand der neusholte naar binnen voort te zetten tot aan het parasphenoid, zoodat ze elkaar van weerszijden naderen. De vorm en het oppervlak van deze naar binnen gaande vleugels zijn zeer onregelmatig, de breedte is 1,3 cM.

Het mesethmoid vormt een klein en naar voren spits toeloopend beentje (lengte ± 2 cM.), dat het vooreinde van de frontalia V-vormig omvat. Naar weerszijden gaat het zonder duidelijken overgang over in een langwerpig been, dat van voren rust op het palatinum en naar achter zich voortzet tot de neusholten, dat ik om deze redenen meen te moeten beschouwen als het nasale. De lengte ervan is 1,7 cM., de breedte 0,7 cM.

Aan den bovenkant van den schedel zijn de frontalia verreweg de grootste beenstukken. De overlangsche naad tusschen beide is zeer goed zichtbaar. Ze grenzen aan den achterkant aan het supraoccipitale en aan den voorkant reiken ze tot dicht bij den snoet. Ze zijn dus niet door de parietalia van het supraoccipitale gescheiden, zooals A. SMITH WOODWARD bij zeer nauw verwante soorten aangeeft (6, pl. 54, fig. 4*a*, blz. 246) doch evenmin is vermoedelijk de toestand juist, zooals hij die weergeeft l.c. pl. 13, fig. 1*b* en 8 blz. 261, omdat hieruit zou volgen, dat de parietalia van elkaar gescheiden worden, doordat frontalia en supraoccipitale elkaar raken. Voor zoover dit althans uit het mij ten dienste staande materiaal valt op te merken, ontbreken n.l. de parietalia. De lengte der frontalia bedraagt 10,4 cM. Hun grootste breedte bereiken ze vlak achter de oogen. Samen zijn ze daar 4 cM. breed. Vanaf dit punt worden ze naar achteren vrij snel doch niet zeer regelmatig smaller, naar voren neemt de breedte slechts langzaam af. Boven de oogen vormen ze een eenigszins beschermend afdak. Op het oppervlak bevinden zich een groot aantal strepen, welke aan de binnenzijde van den schedel blijkbaar nog duidelijker uitkomen, dan aan de buitenzijde en die wij bij verwante soorten ook terugvinden. Al deze strepen stralen vanuit de verbeeningscentra achter boven de oogen naar alle zijden uit en vormen daardoor midden op den kop een groot aantal min of meer ruitvormige figuren. Elke versiering ontbreekt overigens geheel.

Het vomer is een zeer langgerekt, lancetvormig been, dat in het midden voorzien is van een overlangsche groef. Voor aan den snoet is het onder de frontalia zichtbaar; het achtereinde ervan ligt nog onder het vooreinde van het parasphenoid. De breedte is 4 mM., de lengte waarschijnlijk ruim 4 cM.

Het visceraalskelet is aan weerszijden van den schedel door een stevig hyomandibulare met het pteroticum en het sphenoticum bewegelijk verbonden. Het gewrichtsvlak is lang 2,8 cM. en breed 4 mM. Naar onder wordt het hyomandibulare eerst een weinig smaller, doch spoedig neemt de breedte weer sterk toe, de voorrand is daarbij regelmatig rond gebogen, terwijl de achterrand schuin is afgesneden. Naar beneden splitst het zich in een drietal takken, waarvan de achterste zich het eerst afscheidt. Deze tak ligt iets naar binnen, is klein en dun en verbond waarschijnlijk het hyomandibulare met het operculare. De middelste tak is kort en loopt naar onder spits uit. De achterzijde hiervan is recht en lag oorspronkelijk langs den voorrand van het praeoperculum. Tusschen deze middelste tak, de voorste, het praeoperculum en het symplecticum te zamen

werd een groote opening vrijgelaten. De voorste tak is de grootste. Ze is iets gebogen en door een schubnaad verbonden met het metapterygoid. Aan de voorzijde van het hyomandibulare begint bovenaan een lage kam, welke met een kleinen boog naar de juist genoemde opening gaat.

Het metapterygoid is een dun, plaatvormig beentje, lang 2,8 cM., breed 1,7 cM,. iets gebogen en aan den inspringenden bovenrand van een kleine opstaande lijst voorzien. De hoeken zijn sterk afgerond. Aan de onderzijde van dit been en bovendien nog aan het hyomandibulare grenzende ligt het quadratum, een vrij stevig been, dat op verschillende punten nog versterkt is; de algemeene vorm is min of meer driehoekig. De achterrand is iets rond en vertoont een kleine bocht, waarin het symplecticum past. De bovenrand en de voorrand zijn concaaf. Geheel onderaan bevindt zich het gewricht voor de onderkaak. De lengte van het quadratum is 2,5 cM., de grootste breedte 2,4 cM. Het symplecticum, dat langs den achterrand van een quadratum in den juist genoemden inham ligt, is een waarschijnlijk staafvormig beentje, waarvan evenwel de afmetingen niet zijn op te geven, daar het eenige aangetroffen exemplaar ten deele achter het quadratum is gegleden.

Van de pterygoidea is het ectopterygoid het voornaamste. Het reikt van voor bij den snoet naar achteren tot aan het quadratum. De lengte is daardoor 9 à 10 cM. Van terzijde gezien is het eenigszins S-vormig gebogen en van voren naar achter wordt het tevens eerst tot aan den voorrand der orbita breeder, onder de orbita is het smal, doch daarna verbreedt het zich weer. Geheel achteraan is het ongeveer 2 cM. hoog. Van voren eindigt het ectopterygoid vrij dun. Langs den bovenrand van het voorste gedeelte van het ectopterygoid loopt aan de binnenzijde een plaat, waarop een aantal stevige tanden staan. De dikte ervan is niet groot, slechts ± 1 mM., naar achter toe wordt deze plaat smaller en ongeveer midden onder de orbita is ze verdwenen.

Het entopterygoid heeft ongeveer den vorm van een driehoekig, bol staand zeil. De lengte is 4,2 cM., de breedte, die achteraan het grootst is, 1,8 cM. Vanaf het metapterygoid reikt het tot bijna aan het pleuroethmoid. De onderrand sluit daarbij aan den boven- en binnenrand van het ectopterygoid volkomen aan. De bovenrand nadert tot een afstand van 6 mM. het parasphenoid.

Zeer waarschijnlijk reikt het palatinum tot het pleuroethmoid. Het is breed 0,7 cM. en lang 4 à 5 cM. Vooraan draagt het een' vangtand. Dit gedeelte van het been is stevig en iets opgezwollen, naar achter toe gaat het over in een dunne, poreuse beenplaat,

welke voorzien is van een aantal in overlangsche richting loopende buizen van ± 1 mM. diam. Het voorste stuk van het ectopterygoid wordt door deze plaat overdekt.

Van de beenderen in de bovenkaak is het praemaxillare het kleinst. Het is een dun en min of meer langgerekt beenplaatje, dat tegen het palatinum en het ectopterygoid aan ligt. De bovenrand is rond, de onderrand, waarop een aantal kleine tandjes staan, is iets uitgehold. Ongeveer vanaf het vooreinde van het palatinum reikt het tot even voorbij het pleuroethmoid. Het maxillare daarentegen is zeer langgerekt, vrij smal en dun. Waarschijnlijk is het ongeveer 10 cM. lang geweest en hoogstens 5 à 6 mM. breed. Van een supramaxillare zijn geen resten gevonden. Van een reeks circumorbitalia, zooals door A. SMITH WOODWARD beschreven wordt (blz. 246, pl. 54) van *Apateodus striatus* Woodw. een verwante soort uit het Engelsche Krijt, zijn hier slechts enkele aanduidingen gevonden in den vorm van kleine beenfragmenten in de orbita.

De onderkaak. In de onderkaak zijn in elken tak drie beenstukken aanwezig, n.l. dentale, articulare en angulare en er zijn geen aanwijzingen, dat er oorspronkelijk nog meer zijn geweest. De lengte bedraagt ± 13,3 cM. De vorm is kenmerkend. De beide helften vertoonen in hun lengterichting slechts een flauwe bocht en over een grooten afstand loopen ze bijna evenwijdig. Van boven naar beneden zijn ze bovendien eenigszins rond. De achterrand staat verticaal, de bovenhoek is afgerond. Even voor het achtereinde is de hoogte het grootst, n.l. 2,8 cM. of ± $^{1}/_{5}$ van de lengte. Naar voren blijft deze over de achterste helft van de kaak bijna gelijk, doch daarna neemt ze gelijkmatig af, aan de symphyse iets sneller. Aan de achterzijde zien we twee uitstekende knobbels. De onderste, welke het kleinst is, vormt de benedenachterhoek; even daarboven bevindt zich het gewrichtsuitsteeksel.

Het dentale. Dit beenstuk is van de beenderen in de onderkaak verreweg het grootst. Over het algemeen is het niet dik, vooral niet aan het onderste gedeelte. De bovenrand is scherp, doch daar waar de tanden zitten, d.w.z. in de voorste helft is het even daaronder verdikt. Het strekt zich zeer ver naar achter uit; de bovenrand toch wordt er geheel door gevormd en van den onderrand blijft achteraan slechts ± 2 cM. vrij. De achterste begrenzing van het dentale loopt vanaf den onderrand schuin naar voren, buigt daarna scherp naar achter om en gaat dan in horizontale richting naar achter.

Het articulare is een vrij, langgerekt, driehoekig been. De lengte is ± 7,6 cM. De breedte is van achter 2,3 cM. Onder aan de achterzijde bevindt zich het ± 8 mM. lange uitsteeksel met het

gewricht. Hierom is dit gedeelte dan ook iets verdikt, doch bovendien strekt zich van hier nog een verdikte strook naar voren uit. Van het articulare is, zooals uit het bovenstaande blijkt, slechts een klein gedeelte niet door het dentale bedekt, n.l. een min of meer vierhoekig stukje van ± $1^1/_2$ bij 2 cM. De rest schuift als een wig achter het dentale.

Het angulare, het kleinste van de beenderen van de onderkaak, is slechts ± 1 cM. lang en 3 mM. breed. Het vormt den benedenhoek en steekt als een ongeveer 2 mM. lange knobbel naar achter uit.

De tongbeenboog.

De stylohyalia zijn kleine staafvormige beentjes, welke aan het ondereinde iets dikker zijn dan van boven. De lengte bedraagt ± 8 mM., de grootste dikte ± 3 mM. De epihyalia zijn een paar platte, naar voren breeder wordende beentjes. De grootste breedte is ± $1\frac{1}{2}$ cM., de lengte $2\frac{1}{2}$ cM. en de dikte ± 4 mM. De ceratohyalia zijn tamelijk lang en van voren iets binnenwaarts gebogen. Achteraan zijn ze 1.5 cM. hoog. De dikte is aan de einden iets grooter dan in het midden en bedraagt 4.5 à 5 mM. De lengte is 4.7 cM. De hypohyalia zijn slechts 8.5 mM. lang, de dikte is nog ± 5 mM. en de breedte is 1 cM. Van het voorste beentje, het basihyale, werd alleen een horizontale doorsnede waargenomen. De vorm daarvan is driehoekig. De breedte ervan is ± 6 mM., de lengte ongeveer 4 mM.

Van de branchiostegalia zijn een viertal bewaard. Het zijn dunne en langgerekte beenplaatjes, welke tegen een der epihyalia aan liggen en onder het daar nog aanwezige interoperculum en suboperculum. De breedte is niet waar te nemen, doch is zeker ± 1 cM. De lengte van de bovenste is 4.5 à 5 cM.

Het aantal kieuwdeksels is voltallig, we vinden er aan elke zijde vier. Het praeoperculum is bijna vlak, alleen langs den voorrand is het bovenste deel iets naar buiten gebogen. Het is een tamelijk groote beenplaat met een omtrek van ongeveer een halven cirkel. Van den voorrand is het bovenste deel, dat aansloot aan het hyomandibulare recht, het overige stuk is gebogen. De hoogte is waarschijnlijk ongeveer 7 cM. geweest, de breedte ± 3.5 cM. Het groeicentrum ligt vooraan in het onderste gedeelte. Op deze plaats is het been tevens het dikst, en van hieruit stralen verder naar alle zijden een klein aantal fijne lijnen uit. Voor het overige vertoont het oppervlak slechts flauwe concentrische streepjes. De vorm van het operculum is niet zuiver te bepalen, daar het best bewaarde exemplaar nog op verschillende plaatsen gebroken is. Uit de concentrische groeilijnen is echter op te maken, dat de omtrek min of meer ovaal

is geweest; de voor- en bovenrand alleen waren minder gebogen dan de andere zijden. De breedte bedraagt ± 3.5 à 4 cM., de lengte ± 5½ cM. Het hier onder aansluitende suboperculum is voor zoover het den boven- en voorrand betreft, bedekt door de andere stukken. Het schijnt evenwel, dat dit been min of meer driehoekig is met afgeknotte of afgeronde hoeken. De lengte is ± 6 cM., de breedte 3 à 4 cM. Fijne concentrische groeistrepen zijn aanwezig. Het interoperculum, dat aansluit aan de onderkaak, bezit aan de voorzijde, waar het overigens dunne beenplaatje ook iets verdikt is, eenen concaven rand. De vorm is langwerpig, de hoeken zijn afgerond. De breedte bedraagt 1½ cM., de lengte 3 cM. Op het oppervlak zijn een aantal fijne strepen te zien, welke uitstralen van een punt dicht bij den voorrand.

De tanden zitten, zooals uit het voorgaande gebleken is, aan de palatina, de ectopterygoidea, de praemaxillaria en de dentalia. Ze zijn niet alleen zeer verschillend in vorm en grootte, al naar gelang van het beenstuk, waarop ze bevestigd zijn, doch tevens varieeren de tanden van één been sterk. Overal waar tanden geplaatst zijn, is het been iets opgezwollen. Het palatinum draagt slechts één grooten vangtand, welke subterminaal of ± 1 cM. vanaf het vooreinde geplaatst kan zijn, een verschil, dat aan denzelfden kop kan optreden en dat, naar het mij voorkomt, een gevolg is van niet gelijktijdig wisselen. De punt wijst naar binnen. De tand is met een verbreede basis aan het been vergroeid, hij is sikkelvormig naar achter gebogen en eindigt in een scherpe punt. Links en rechts is hij verder afgeplat, aan den voet minder dan meer naar den top. De dwarse doorsnede is daardoor aan den voet nog ovaal; naar den top wordt de voor- en achterrand al spoedig scherp. Het oppervlak is glanzend en voorzien van fijne overlangsche streepjes, welke het duidelijkst zijn aan de basis. De voor- en achterrand zijn voor zoover deze scherp zijn aan weerszijden voorzien van fijne, overdwarse groefjes, waardoor ze zeer fijn gezaagd zijn. Aan den voet zijn de afmetingen van de dwarse doorsnede ± 3 en 4 mM. De lengte van een dergelijken tand is ± 1.1 cM. Het ectopterygoid draagt een klein aantal tanden, welke met een verbreede basis met dit been vergroeid zijn. Vóór het pleuroethmoid kunnen er blijkbaar twee geplaatst zijn, op vrij grooten afstand van elkaar. (Zie hiervoor o.a. 6 pl. 11, fig. 8, fig. 3 en 4. Het betreffende gedeelte is daar evenwel aangeduid als palatinum). In geen der mij ten dienste staande exemplaren is de voorste van die tanden aanwezig. De andere is schuin onder het pleuroethmoid geplaatst. De lengte ervan is ongeveer 2,5 cM., de breedte 7 mM. In het origineel van *Enchodus*

Corneti, For. steekt de punt ervan door de onderkaak heen. De vorm is die van een korten dolk. Aan de basis is de dwarse doorsnede weer ovaal, en naar den top wordt de zijdelingsche afplatting geleidelijk sterker. Voor- en achterrand zijn beide scherp en met fijne dwarsgroefjes voorzien. Overigens zijn op het glanzende oppervlak slechts fijne, overlangsche streepjes te zien, welke evenals bij den vangtand van het palatinum aan de basis het duidelijkst zijn. De andere tanden van het ectopterygoid zijn alle kleiner en wel neemt de grootte naar achter steeds meer af. In algemeenen vorm komen alle tanden in dit been echter tamelijk wel met elkaar overeen. De onderlinge afstand varieert naar gelang er oude tanden zijn weggevallen en nieuwe weer werden tusschen gevoegd, zoodat ook het aantal kan uiteenloopen. Alle staan ze met de punt een weinig schuin binnenwaarts gericht.

Afmetingen van de tanden van het ectopterygoid (zonder de basis) van de fragmenten afgebeeld in fig. 7 en 10.

	lengte in mM.	breedte in mM.
1e tand (fig. 10)	25	7
2e tand (fig. 7)	18	6,5
3e tand, ,,	9	4,5
4e tand, ,,	9	4
5e tand, ,,	6	3,5

Op het praemaxillare bevinden zich slechts een aantal zeer kleine tandjes. Maximaal telde ik er 8 (origin. van *Enchodus Corneti* For., op het rechter praemaxillare). Ze staan op den onderrand van het been op kleineren of grooteren afstand van elkaar en zijn nog sterker dan de vorige binnenwaarts gebogen. Van weerszijden zijn ze iets afgeplat, zoodat ze een scherpen voor- en achterrand bezitten. Het oppervlak vertoont weer fijne, overlangsche streepjes. De lengte varieert van $1^1/_2$ tot 2 mM. en de breedte bij de basis bedraagt ± 1 mM.

Het dentale draagt het grootste aantal tanden, welke bovendien sterk in grootte varieeren. Ze staan in één rij op een verdikte lijst, welke even onder den bovenrand langs de binnenzijde loopt, zooals ook het geval is met de tanden van het ectopterygoid. Vooraan bij de symphyse vinden we steeds eenige zeer kleine tandjes, ongeveer een vijftal. Hierachter volgt een iets grootere tand en vervolgens komen de twee grootste uit de onderkaak; de meer naar achteren geplaatste tanden zijn weer kleiner. In grootte nemen deze evenwel niet regelmatig af. Wel zijn de achterste zeer klein. De onderlinge afstand verschilt om dezelfde reden als te voren genoemd

is en hierom kan ook in dit geval het aantal varieeren. Alleen de voorste helft van het dentale draagt tanden. In de onderkaak afgebeeld in fig. 9 zitten nog de meeste tanden.

Deze hebben van voren naar achteren geteld de volgende afmetingen (in mM.):

	lengte in mM.	breedte in mM.
1e tand	1	0.5
2e tand	1	0.5
3e tand	1	0.5
4e tand	1	1
5e tand	4.5	2
6e tand	10.5	4
7e tand	12	5
8e tand	5 à 6	3
9e tand	5	3
10e tand	8	4
11e tand	7	4
12e tand	1	1

Voor zoover dit is na te gaan, zijn alle tanden in het dentale iets achterwaarts gekromd. De binnen- en buitenzijde zijn afgeplat, de buitenzijde het meest. De diameter is aan de basis ovaal. De voorrand is boven de basis scherp, de achterrand daarentegen is rond, behalve aan den top, waar ook deze scherp wordt. Het punt van overgang is aangeduid, doordat de achterrand daar een kleinen knik vertoont, waardoor deze tanden, a. h. w. een kleinen weerhaak bezitten, zooals we ook kennen aan de tanden van het ectopterygoid van *Cimolichthys*. Het was evenwel niet uit te maken, of deze eigenschap behalve aan de groote tanden in de onderkaak ook toekomt aan de kleine. De voorrand vertoont weer de fijne, overdwarse groefjes en voor zoover deze scherp is eveneens de achterrand, bovendien zien we op de tanden der onderkaak weer de fijne, overlangsche streping.

Van de wervels zijn alleen de drie voorste zeker bekend. De eerste wervel is niet zoo lang als de beide daarop volgende. De lengte ervan bedraagt n.l. slechts 4 mM., terwijl die bij de tweede 6 mM. en de derde 7 mM. is. De diameter is steeds ongeveer 1 cM. Bovendien is er nog een ander verschil. Langs den omtrek bezit de voorste wervel aan elke zijde slechts een tweetal indeukingen, welke door een breede strook van elkaar gescheiden zijn. Aan de twee andere zijn een drietal diepere waar te nemen, telkens door vrij

smalle, horizontale lijsten gescheiden. De wervels zijn amficoel. De neurapophysen zijn ± 4 mM. breed. De lengte ervan bedroeg vermoedelijk ± $1^1/_2$ à 2 cM. Naar het schijnt waren de neurapophysen niet met de wervellichamen vergroeid, daar hiertusschen blijkbaar steeds een weinig van het gesteente ligt, zooals overal daar te vinden is, waar oorspronkelijk zachtere weefsels verschillende beenderen verbonden (zie b.v. de tongbeenboog). De zygapophysen zijn klein en braken bij het praepareeren ten deele af.

In het voorgaande is reeds opgemerkt, dat een der hier beschreven fragmenten door FORIR (3) werd beschreven als *Enchodus Corneti*.

De kenmerken van het geslacht *Enchodus* nagaande, zooals die door AGASSIZ (1, blz. 64) en A. SMITH WOODWARD (8, blz. 190 en 6, blz. 55) zijn omschreven, blijkt het, dat dit niet juist moet worden geacht. Ter vergelijking haal ik dat gedeelte van de beschrijving door laatstgenoemden auteur aan, wat hier van belang is:

„Trunk elongate-fusiform, both this and the head laterally com„pressed. Cranial roof exhibiting a deep median longitudinal de„pression its lateral and occipital margins ornamented, like the other „external bones, with ridges and tubercles of ganoine. Mandible a „little prominent, provided with an inner widely-spaced series of „large slender teeth, the largest in front, also a marginal series of „minute teeth, all nearly or completely solid; premaxilla in the „form of a vertical lamina, deepest in front, tapering behind, and „with a single spaced series of small teeth; maxilla long and slender, „either finely toothed or toothless at the oral border; palatine thickened „and tumid, with only one large tooth fixed at its anterior end; „ectopterygoid robust, with a single spaced series of large slender „teeth, gradually diminishing in size backwards; no teeth barbed. „Preoperculum very narrow and deep; operculum strengthened on „the inner side by a ridge extending horizontally backwards from „the point of suspension; branchiostegal rays about 12 to 16 in „number."

Immers geen der beenstukken van den kop der hier beschreven soort is versierd met tuberkeltjes van ganoine, en in de onderkaak bevindt zich slechts één rij tanden, de kleinste vooraan, de grootste daarachter en het praeoperculum is breed. Het blijkt verder, dat de wervels van *Enchodus* slechts twee groefjes aan elken kant bezitten, (10, blz. 184), terwijl de andere, de voorste uitgezonderd, er drie hebben. Als een punt van overeenkomst moet echter vermeld worden, dat ook *Enchodus* wel degelijk tanden met weerhaken heeft; alleen is dit kenmerk hier niet zoo sterk ontwikkeld. In de onderkaak

65

bezit b.v. *Enchodus Faujasi* Ag. tanden, welke eenigszins S-vormig zijn, en van terzijde afgeplat. De voorrand van deze tanden is over de geheele lengte scherp, terwijl van de achterzijde alleen het bovenste $^1/_3$ gedeelte scherp is. Overdwarse groefjes werden niet waargenomen langs de scherpe gedeelten van voor- en achterrand.

A. SMITH WOODWARD heeft de fragmenten van de hier beschreven soort, welke aanwezig zijn in het Museum te Brussel reeds herkend als behoorende tot het geslacht *Apateodus* (6, bl. 38), zooals ook blijkt uit de etiketten van zijn hand, welke daarbij lagen. De omschrijving van de verschillende kenmerken van dit geslacht moet echter door hetgeen nu bekend geworden is eenigszins worden herzien en aangevuld.

Geslachtskenmerken van Apateodus: Kop driehoekig, de wangen plat, snoet van boven gezien vrij stomp, bovenkant van den schedel recht, achterhoofd iets concaaf en verticaal, geen bijzondere versiering aan de beenstukken behalve de lijnen op de frontalia, welke uitstralen van punten boven de oogen, ophangpunt der onderkaak onder het occiput, het supraoccipitale in contact met de frontalia, het supraoccipitale bezit slechts een zeer kleine crista, geen parietalia aanwezig, wel een orbitosphenoid, een basisphenoid en een myodoom, het palatinum draagt één vangtand en overdekt een gedeelte van het ectopterygoid, het ectopterygoid heeft één rij groote, dolkvormige tanden, naar achteren kleiner wordende met voor- en achterrand scherp en van terzijde afgeplat, evenals de vangtand van het palatinum, het praemaxillare draagt één rij tandjes en vormt met het maxillare de begrenzing der bovenkaak, hoogte der onderkaak $^1/_6$ van de lengte, achterrand verticaal, bovenhoek afgerond, benedenhoek uitstekend, één rij tanden, vooraan kleine, daarachter de grootste, daarna weer kleinere. De tanden der onderkaak ook van weerszijden afgeplat, doch aan den binnenkant minder dan aan den buitenkant en achterwaarts gekromd, voorrand scherp, achterrand rond, behalve geheel boven aan den top, waar de achterrand ook scherp is en waardoor een kleine weerhaak gevormd wordt, praeoperculum breed, circumorbitaalring aanwezig, branchiostegalia lange en vrij breede beenplaatjes, wervels voorzien van groeven, gescheiden door lijsten, de voorste helft breede lijsten en twee groeven, de andere smallere lijsten en drie groeven; de voorste wervel is veel korter dan de volgende.

Van het geslacht *Apateodus* zijn tot dusverre slechts uit het Engelsche Krijt een drietal soorten bekend geworden, n.l. *Apateodus glyphodus*, C. C. BLAKE, uit het Gault en *Apateodus striatus* (Ag.)

A. S. WOODW. evenals *Apateodus lanceolatus* A. S. WOODW. uit het Turoon.

Van *Apateodus glyphodus* C. C. BLAKE zijn slechts enkele kaakfragmenten gevonden. Deze soort verschilt van de hier beschreven fragmenten, doordat de reeks kleine tandjes, welke zich in de onderkaak vóór de grootere bevinden een veel grootere ruimte hebben ingenomen dan in onze soort (8 pl. 13, fig. 3 en 5) en ook schijnt hun aantal grooter. Van *Apateodus lanceolatus*, A. S. WOODW. verschilt de hier beschreven soort door den stand van de tanden in het ectopterygoid (ten deele pal. genoemd door WOODWARD), welke niet naar voren gericht zijn, doch verticaal naar beneden of iets achterwaarts. Voor- en achterrand der tanden bij *Apateodus lanceolatus* A. S. WOODW. rechter en de tanden zijn daarbij iets slanker.

De verschillen, welke bestaan tusschen onze soort en *Apateodus striatus* (Ag.) A. S. WOODW. zijn nog het gemakkelijkst te bepalen, omdat ook van deze laatste veel vollediger resten bekend zijn. Ze zijn reeds terstond van elkaar te onderscheiden, doordat de hoek, waaronder we van terzijde den snoet van *Apateodus striatus* (Ag.) A. S. WOODW. zien kleiner is, doordat aan de bovenzijde van een dergelijken schedel de frontalia relatief breeder zijn en door den vorm van het gedeelte van het schedeldak, dat bestaat uit het supraoccipitale en het achtereinde der frontalia. (6, pl. 54).

Hierom meen ik er dan ook toe te mogen besluiten, dat onze soort verschilt van de drie Engelsche soorten en stel daarom voor haar *Apateodus Corneti* te noemen.

Oorspronkelijk rekende A. SMITH WOODWARD *Apateodus* tot de familie der *Scopelidae* (8, blz. 258) doch we zien, dat hij dit geslacht reeds even later in de familie der *Enchodontidae* (6, blz. 37) heeft ondergebracht, een familie, welke naar zijn meening verwant is met de *Scopelidae*, de *Odontostomidae* en de *Alepidosauridae*. In de handboeken van BOULENGER (11, blz. 611) en GOODRICH (12, blz. 399), zoowel als in dat van ZITTEL (16, blz. 132) vinden we *Apateodus* nog in de fam. der *Scopelidae* geplaatst en in de nieuwste classificatie der visschen n.l. die van C. TATE REGAN (13, blz. 131) vinden we *Apateodus* in de buurt van de fam. der *Alepidosauridae* in de orde der *Iniomi*.

Tot de *Scopelidae* kan *Apateodus* niet behooren, omdat het praemaxillare het maxillare niet geheel van de begrenzing der bovenkaak uitsluit en doordat het supraoccipitale aan de frontalia grenst en niet tot de *Alepidosauridae*, daar deze geen orbitosphenoid bezitten, doch ook een andere plaats in de orde der *Iniomi* laat de

bouw van den schedel niet toe. Tot mijn spijt was ik niet persoonlijk in de gelegenheid Londen te bezoeken, om het daar aanwezige recente en fossiele materiaal te vergelijken, doch op grond van de nu bekend geworden eigenschappen bleek mij, dat *Apateodus* volgens het systeem van T. REGAN moet worden gerekend tot de orde der *Isospondyli*, zooals die door hem (13, blz. 77) is omgrensd en daarbij tot de onderorde der *Stomiatoidei*, een groep van pelagische, physostome visschen, waarvan enkele op groote diepte leven. Hiertoe rekent hij o.a. de volgende families: de *Astronesthidae*, de *Chauliodontidae*, de *Stomiatidae* en de *Malacosteidae*, welke geen of slechts zeer kleine parietalia bezitten, en van de fossiele visschen de *Enchodontidae*, welke in schedelbouw groote overeenkomst blijken te vertoonen met *Astronestes* (17 blz. 613) en de *Stomiatidae* (13 blz. 82). Het komt mij verder voor, dat *Apateodus* behoort tot de fam. der *Enchodontidae*. We behoeven om ons hiervan te overtuigen slechts afbeeldingen van verschillende genera dier familie te vergelijken met die van *Apateodus*, zooals b.v. die van *Enchodus Faujasi* Ag. door SMITH WOODWARD (8 pl. 11, fig. 6) en van *Empo nepaeolica* COPE door HAY (9 bl. 85, fig. 69). Doch ook wanneer we, BOULENGER en GOODRICH volgende, beproeven *Apateodus* in het systeem der visschen onder te brengen is het resultaat, dat we komen bij de familie der *Enchodontidae*. Op grond van bovenstaande reken ik dan ook *Apateodus* tot deze familie, welke dan in overeenstemming met de meening van TATE REGAN behoort tot de onderorde der *Stomiatoidei* van de orde der *Isospondyli* der *Teleostei*. Het geslacht *Apateodus* zal derhalve een geslacht van physostome roofvisschen zijn geweest, dat waarschijnlijk eene pelagische levenswijze had. Er bestaat echter geen aanleiding om aan te nemen, dat de hiertoe behoorende soorten zich op zeer groote diepte plachten op te houden. Hiertegen pleit o.a. de facies van het gesteente, zoowel in Nederland als in Engeland. Bekend is het geslacht *Apateodus* nu vanaf het Gault tot in het Boven-Senoon.

LITERATUUR.

1. L. AGASSIZ. Recherches sur les poissons fossiles, Tome V. Neuchatel 1833—1843.
2. A. C. L. G. GÜNTHER. An introduction to the study of fishes. Edinbourgh, 1880.
3. H. FORIR. Contributions à l'étude du système crétacé de la Belgique. 1. Sur quelques poissons et crustacés nouveaux ou peu connus. Annales de la Société geol. de Belgique, Tome 14, 1887, p. 37—42, pl. I.
4. C. GEGENBAUR. Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere, Bd. I. Leipzig. 1898.
5. F. B. LOOMIS. Die Anatomie und die Verwandschaft der Ganoid- und Knochen-Fische aus der Kreide-Formation von Kansas, U. S. A. Palaeontographica, Bd. 46, 1899—1900, p. 213—283, pl. 19—27.

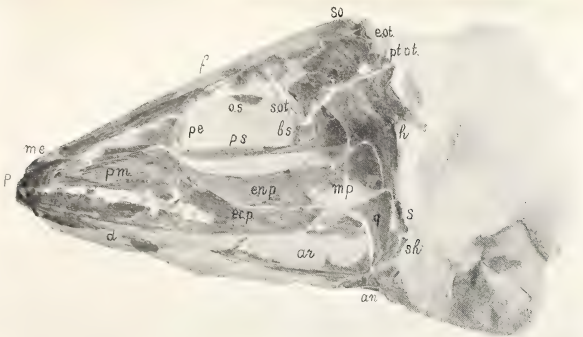

so
eot.
ptot.
f
o.s
sot
pe
ps
bs
h
me
P
pm.
enp
mp
ecp
q
s
d
ar
sh
an

Fig. 1.

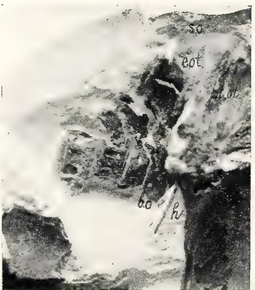
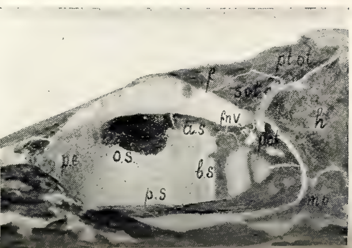

so
eot
bo
h

Fig. 5.


f
ptot
sot
fnv
a.s
h
pe
o.s
bs
p.s
mp

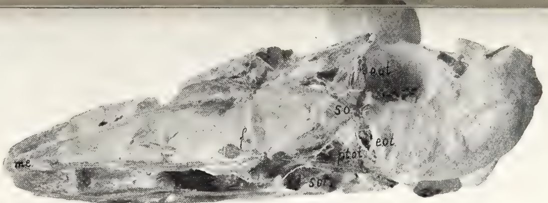


Fig. 3.



Fig. 7.

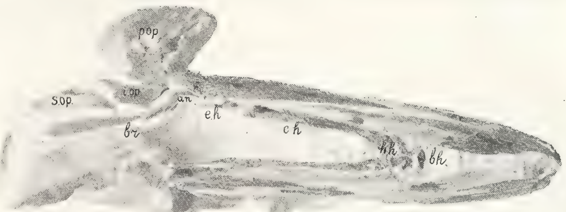


Fig. 4.

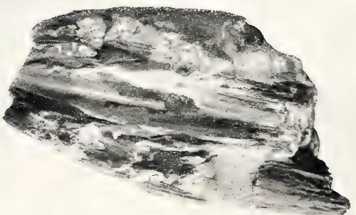


Fig. 8.

Apateodus Corneti (For.) KRUIZINGA 1923. *Maastrichtsch Krijt*, Valkenburg, Limburg.
Boven-Senoon, type (fig. 1—4) lengte van de bovenzijde van den schedel 13.2 cM. ½ nat. gr., fig. 6 ongev. 0.8 nat. gr., fig. 5, 7 en 8 ongev. nat. gr.
Teleostei-Isospondyli-Stomiatoidei-Enchodontidae.

6. A. S. WOODWARD. The fossil fishes of the English Chalk. London, 1892—1912. Palaeontographical Society.
7. O. BÜTSCHLI. Vorlesungen über vergleichende Anatomie, 1e Lieferung, Leipzig, 1900.
8. A. S. WOODWARD. Catalogue of the fossil fishes in the British Museum. Part IV. 1901.
9. O. P. HAY. On certain genera and species of North American cretaceous actinopterous fishes Bulletin of the Amer. Mus. of Nat. Hist., Vol. 19, 1903, p. 1—95.
10. L. DOLLO. Premiere note sur les Téléostéens du Crétacé supérieur de la Belgique. Bull. d. l. Soc. belge de Géologie, T. VI, 1892, p. 180—189.
11. G. A. BOULENGER. Fishes (system. Account of Teleostei) in Vol. VII of the Cambridge Natur. History. Edited London 1904 by S. F. HARMER and A. E. SHIPLEY.
12. E. S. GOODRICH. Vertebrata craniata. Part 9 in Ray Lankester: A treatise on Zoology, London 1909.
13. C. TATE REGAN. The classification of the Teleostean fishes. Annals and Mag. of Nat. Hist., Ser. 8, Vol. 3, p. 75, 1909.
14. C. TATE REGAN. The anatomy and classification of the Teleostean fishes of the order Iniomi. Annals and Mag. of Nat. Hist., Ser. 8, Vol. 7. p. 120, 1911.
15. S. H. REYNOLDS. The vertebrate skeleton, 2nd ed. Cambridge Zoological Series, 1913. Cambridge.
16. K. A. VON ZITTEL. Grundzüge der Palaeontologie, IIe Abt. Vertebrata, 4e Aufl. Neubearbeitet von F. BROILI und M. SCHLOSSER, 1922.
17. C. TATE REGAN. The classification of the Stomiatoid fishes. Annals and Mag. of Nat. Hist., Ser. 9, Vol. 11, p. 612, 1923.
18. FEL. SUPINO. Morphologia del cranio dei Teleostei, Fasc. 1—6, Roma 1904—'06.
19. M. SAGEMEHL. Beiträge zur vergleichende Anatomie der Fische. III. Morphologische Jahrb. Bd. 10, 1881, p. 1—119, pl. 1 en 2.
20. C. B. BRÜHL. Zootomie aller Thierklassen, Atlas, Bd. Fische. Wien 1877.

VERKLARING DER FIGUREN.

Fig 1. Linkerzijde van den kop met vangtand in het palatinum, de pterygoidea basisphenoid, orbitosphenoid, symplecticum, stylohyale, angulare, pteroticum, sphenoticum, enz. 0.5 nat. gr.

Fig. 2. Rechterzijde van den kop met het praemaxillare, resten van het maxillare, het dentale, de kieuwdeksels en het gewricht van de onderkaak. 0 5 nat. gr.

Fig. 3. Bovenkant van den schedel, frontalia raken aan het supraoccipitale, parietalia ontbreken. 0.5 nat. gr.

Fig. 4. Onderzijde van den schedel met den hyoidboog, de branchiostegalia en het angulare. 0.5 nat. gr.

Fig. 5. De drie voorste wervels van fig. 2 aan het basioccipitale, ongev. nat. gr. deel van het hyomandibulare met het stuk, waaraan het operculare was verbonden.

Fig. 6. De linker orbita van fig. 1, 0.8 nat. gr. met orbitosphenoid, alisphenoid, basisphenoid, parasphenoid, prooticum met foramina, .myodoom.

Fig. 7. Schedelfragment linkerzijde. Boven-Senoon, gevonden bij Valkenburg. 0.8 nat. gr. Origineel van Enchodus Corneti For. = Apateodus Corneti (For.)

met palatinum met vangtand, resten van praemaxillare, ectopterygoid en dentale met tanden.

Fig. 8. Fragment van fig. 7, ongeveer nat. gr. van boven gezien met het vomer en het vooreinde van het parasphenoid.

Fig. 9. Kaakfragment van binnen gezien, afkomstig uit het Boven-Senoon van Zuid Limburg, tanden, 0.9 nat. gr. Coll. Delft.

Fig. 10. Geopende bek, gevonden bij Valkenburg, Boven-Senoon, 1.2 nat. gr. met de tanden in het ectopterygoid en den achterrand van het dentale.

Fig. 11. Schedelfragment Boven-Senoon, gevonden bij Valkenburg, Coll. Bosquet in het Museum te Brussel, N⁰. I. G. 4289, 0.8 nat. gr. Linkerzijde van den kop met geopenden bek, het achtereinde van het palatinum, dat een deel van het ectopterygoid overdekt, de vangtand in de beide palatina, de tandjes in het praemaxillare, de tanden in het linker ectopterygoid en de tanden der onderkaak (één rij).

Fig. 12. Schedelfragment. Boven-Senoon, gevonden bij Kunrade. Coll. Ubaghs in het Mus. te Brussel. N⁰. I. G. 6921. Ongeveer nat. gr. De beenderen van het achterhoofd.

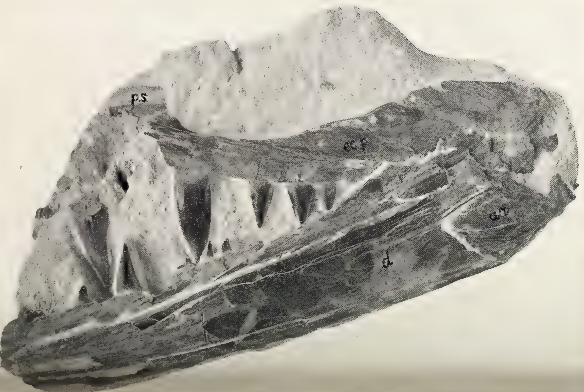
Fig. 13. Fragment van fig. 12, nat. gr. van onderen gezien, een gedeelte van den linker benedenhoek van het basioccipitale ontbreekt.

Fig. 14. Gedeelte van fig. 2 met het hyomandibulare, metapterygoid en quadratum met gewricht van de onderkaak, ongev. nat. gr.

GEBRUIKTE AFKORTINGEN IN DE FIGUREN:

s.o.	supraoccipitale.	*f*	frontale.	*an.*	angulare.
p.o.	pleurooccipitale.	*v.*	vomer.	*s.h.*	stylohyale.
b.o.	basioccipitale.	*p.*	palatinum.	*e.h.*	epihyale.
e.ot.	epioticum.	*ec.p.*	ectopterygoid	*c.h.*	ceratohyale.
pt.ot.	pteroticum.	*en.p.*	entopterygoid.	*h.h.*	hypohyale.
s.ot.	sphenoticum.	*m.p.*	metapterygoid.	*b.h.*	basihyale.
p ot.	prooticum.	*h.*	hyomandibulare.	*p.op.*	praeoperculum.
a.s.	alisphenoid.	*q.*	quadratum.	*op.*	operculum.
b.s.	basisphenoid.	*s.*	symplecticum.	*s.op.*	suboperculum.
p.s.	parasphenoid.	*m.*	maxillare.	*i.op.*	interoperculum.
o.s.	orbitosphenoid.	*p.m.*	praemaxillare.	*br.*	radii branchiostegi.
p.e.	pleuroethmoid.	*d.*	dentale.	*p.o.*	postorbitalia.
m.e.	mesethmoid.	*ar.*	articulare.		

Fig. 9.



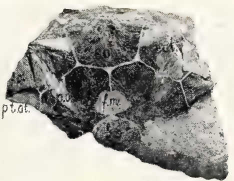


Fig. 12.

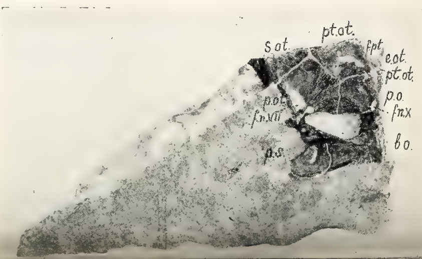




Fig. 11.

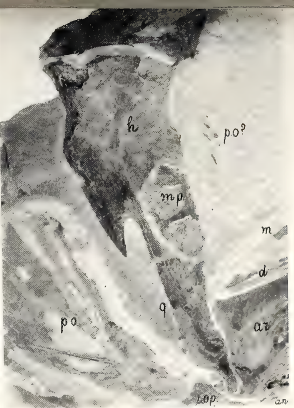


Fig. 14.

Apateodus Corneti (For.) Kruizinga 1923. *Maastrichtsch Krijt, Boven Senoon.*
Fig. 9 ongev. 0.9 nat. gr., fig. 10 ongev. 1.2 nat. gr., fig. 12 en 13 ongev. nat. gr., fig. 11 ongev. 0.8 nat. gr., fig. 14 ongev. nat. gr.
Teleostei - Isospondyli - Stomiatoidei - Enchodontidae.

Physiologie. — A. A. HIJMANS VAN DEN BERGH en M. J. ROESSINGH: *„Over den invloed van ijzer-toediening aan het organisme op de ademhaling der roode bloedlichaampjes".*

Het is bekend, dat de zuurstof der atmosfeer, die de weefselcellen noodig hebben voor hunne oxydatie-processen, daarheen wordt gebracht door de haemoglobine-bevattende roode bloedlichaampjes. Reeds verscheiden jaren geleden heeft men zich de vraag gesteld, of deze roode bloedlichaampjes, vervoermiddel der zuurstof, ook zelve een weefselademhaling bezitten, dus zuurstof verbruiken. Het is MORAWITZ geweest, die het vraagstuk aan de orde heeft gesteld. De uitkomst, waartoe hij geraakte en welke door verschillende onderzoekers bevestigd werd, is zeker de aandacht waard. Bij den mensch is het zuurstofgebruik der roode bloedcellen onder normale omstandigheden zeer gering, men vindt opgegeven van 3 °/₀ tot 4 °/₀, waarden, die wellicht binnen de waarnemingsfout vallen. Dit ontbreken van ademhaling is in overeenstemming met andere eigenschappen dezer cellen: ontbreken van een kern, van vermogen tot vermenigvuldiging, welke hun een van alle levende cellen afwijkende plaats aanwijzen, en hen als 't ware tot een tusschenvorm van doode en levende materie bestempelen.

In tegenstelling tot hetgeen bij den mensch en de zoogdieren wordt aangetroffen, is het zuurstofverbruik van de roode bloedlichaampjes der vogels niet onaanzienlijk. Het ligt voor de hand het verschil daaraan toe te schrijven, dat de menschelijke erythrocyten kernloos zijn, terwijl de roode cellen der vogels — zooals wel algemeen bekend zal zijn — een kern bevatten. Dat deze meening niet geheel juist is, blijkt uit verdere proeven, die MORAWITZ met zijn leerling MASING heeft genomen. Het is n.l. mogelijk ook het zuurstofgebruik van de roode bloedlichaampjes van zoogdieren aanzienlijk te doen stijgen door bloedonttrekking (aderlating), en in 't algemeen door allerhand ingrijpen (toediening van bloedvernielende vergiften, zooals phenylhydrazine en derg.) die een sterke regeneratie van jonge bloedlichaampjes ten gevolge hebben. Daarbij komen òf geen kernhoudende roode cellen in het periphere bloed, òf hun aantal is zoo gering, dat zij voor het meerdere zuurstofverbruik onmogelijk verantwoordelijk kunnen worden gesteld. Men is gewoon te zeggen, dat het de jeugdige toestand der roode cellen is, die in deze

omstandigheden de vermeerderde zuurstofvertering teweegbrengt. Men is genoodzaakt aan te nemen, dat aan de aanwezigheid van kernresten in deze lichaampjes, al zijn ze ook microscopisch niet aan te toonen, of aan hun chemische samenstelling, die zou verschillen in jeugdigen en ouderen toestand, de oxydatieve processen gebonden zijn. Evenals in het dierexperiment blijkt ook het menschelijk bloed een verhoogd zuurstofverbruik te vertoonen, telkens wanneer de bloedvormende organen zich in een toestand van overgroote activiteit bevinden en groote getalen jonge, misschien nog niet geheel afgewerkte roode bloedcellen in den bloedstroom werpen. Zoo vindt men dus een vermeerderd O-verbruik bij pernicieuze anaemie, bij allerlei vergiftigingen en in 't algemeen bij overmatige activiteit van het beenmerg.

Bij een vorige gelegenheid heeft Dr. Roessingh in mijn laboratorium met behulp van deze methode nagegaan, of de anaemie die bij carcinoomlijders veelal wordt aangetroffen, met een sterke regeneratie van roode bloedlichaampjes gepaard gaat.

Het resultaat was negatief: het O-verbruik van het bloed van carcinoomlijders was niet grooter dan dat van normale personen. In tegenstelling hiermede vond ook Roessingh bij lijders aan pernicieuze anaemie, evenals bij andere anaemieën en ook bij patiënten kort na bloedtransfusie, een dikwijls aanzienlijke vermeerdering (in plaats der normale 3—4 °/₀ vond hij waarden van 10—60 °/₀).

Voor een geheel ander doel heeft Roessingh eenigen tijd geleden dezelfde onderzoekingsmethode toegepast.

De behandeling van patienten met een verminderd gehalte van hun bloed aan haemoglobine (den toestand, die eigenlijk zeer ten onrechte den naam draagt van anaemie) door middel van ijzerverbindingen, heeft tot veel onderzoek, doch ook tot veel meeningsverschil aanleiding gegeven. De moeilijkheden die de beoordeeling eener medicamenteuze behandeling in den weg staan, zijn zoo groot, dat wie niet aan het ziekbed werkzaam is, ze nauwelijks kan vermoeden. Zooveel is zeker, dat nog steeds geen eenstemmigheid heerscht over de vraag, op welke wijze het ijzer werkt bij toestanden van anaemie, noch ook in welke verbinding dit medicament het beste wordt toegediend, ja zelfs zijn er volkomen bevoegde onderzoekers, die er aan twijfelen of het in 't geheel wel werkt.

Ten einde tot de oplossing dezer vraag bij te dragen heeft Dr. Roessingh bij anaemische patienten ijzer in groote dosis toegediend. Vóór de kuur en na de kuur werd de „Sauerstoffzehrung" der roode bloedlichaampjes bepaald. Men doet dit gewoonlijk

op de volgende wijze, ofschoon andere methoden zouden kunnen worden uitgewerkt.

Het uit de ader genomen bloed wordt goed gedefibrineerd, daarna worden de roode bloedlichaampjes met physiol. NaCl-oplossing gewasschen om het serum (of plasma) te verwijderen. Nu wordt de bloedlichaampjes-emulsie met lucht geschud ten einde het haemoglobine te verzadigen. Al deze bewerkingen moeten met in acht neming van strenge steriliteit plaats vinden, want vele bacteriën hebben zelf een aanzienlijk O-verbruik, en zoo zouden groote fouten kunnen worden gemaakt. Nadat het haemoglobine met O verzadigd is, wordt in een portie van het bloed de hoeveelheid losgebonden O met het toestelletje van BARCROFT volgens de methode van HALDANE bepaald. Een andere portie bloed komt, goed van de lucht afgesloten, gedurende 4 uren in de broedstoof by 37° te staan, dan wordt opnieuw de hoeveelheid thans aan het haemoglobine gebonden O bepaald. Het verschil in O-gehalte van het Hb vóór en na de bebroeding, stelt de zuurstof voor, die de lichaampjes voor hun eigen ademhaling aan hun eigen haemoglobine hebben onttrokken.

De resultaten van het onderzoek zijn in bijgaande tabel weergegeven. De uitkomsten blijken zeer verschillend te zijn; het is niet gelukt een verklaring voor deze verschillen te vinden. Eenmaal bleek na ijzertoediening het O-verbruik aanzienlijk verminderd, hetgeen moeielijk anders kan verklaard worden dan door een bij de uitvoering der methode gemaakte fout; andere malen bleef het gelijk; doch in de meerderheid der gevallen viel, dank zij, of althans na, het Fe-gebruik, een belangrijke stijging waar te nemen. In die gevallen zal men geneigd zijn te besluiten, dat het ijzer op het beenmerg een prikkel heeft uitgeoefend, dusdanig dat dit veel jonge cellen aan de peripherie heeft geleverd.

Het is evenwel noodig eene tegenwerping onder de oogen te zien. Men weet, dat aan het ijzer bij tal van biochemische processen de rol van katalysator wordt toegeschreven. En men zal zich dus kunnen afvragen, of het bij onze patienten toegediende ijzer wellicht in het molecuul der lichaampjes op een of andere wijze gebonden wordt, en aldus de eigen ademhaling dezer cellen aanzet. Deze onderstelling is te meer gerechtvaardigd sinds WARBURG waarnam, dat de eieren van den zee-egel onder toevoeging van sterk verdunde ferro- of ferri-zouten 60 %—100 % meer zuurstof gebruiken en CO_2 afstaan dan zonder deze toevoeging. Om de juistheid dezer tegenwerping te toetsen heeft Dr. ROESSINGH aan emulsies van roode bloedlichaampjes verdunde ijzerzouten toegevoegd, en daarvóór en daarna het O-verbruik bepaald. De Fe-zouten bleken zonder invloed.

	Vóór ijzergebruik.			*Na* ijzergebruik.		
	Haemogl. gehalte.	Roode bloedlich.	Zuurstof verbruik.	Haemogl. gehalte.	Roode bloedlich	Zuurstof-verbruik.
1. *R.* Chron. nephritis. 30 dagen; 2.25 gr. Fe daags			14.66 %			72.04 %
2. *Mej. V.* Anaemie na bloeding. 20 dagen; 2.25 gr. Fe daags	70 %	4.400000	geen			13.10 %
3. *v. d. H.* Tuberc. pulmonum. 30 dagen; 2.25 gr. Fe daags			45.66 %			41 %
4. *Mej. D.* Chron. nephritis. 14 dagen; 2.25 gr. Fe daags	42 %	1.860000	geen	52 %	2.200000	46.33 %
5. *Mej. de L.* Splenomegalie. 30 dagen; 2.25 gr. Fe daags	105 %	4.000000	2.44 %	100 %	4.400000	51.28 %
6. *Mej. S.* Tumor mediastini. 18 dagen; 2.25 gr. Fe daags	90 %	4.200000	11.30 %	85 %	3.800000	28.00 %
7. *Mej. Z.* Purpura haemorrhag. 18 dagen; 2.25 gr. Fe daags	70 %	3.600000	geen	85 %	3.850000	57.72 %
8. *v. E.* Maligne buiktumor. 18 dagen; 2.25 gr. Fe daags	55 %	3.800000	12.67 %	50 %	4.440000	22.40 %
9. *Mej. v. d. H.* Adipositas. 25 dagen; 2.25 gr. Fe daags	48 %	3.500000	geen	64 %	3.800000	16.27 %
10. *Mej. v. D.* Tuberc. peritonei. 46 dagen; 2.25 gr. Fe daags	64 %	4.200000	geen	82 %	4.510000	3.73 %
11. *Mej. D.* Colitis. 22 dagen; 200 mgr. Fe daags	48 %	3.180000	5.54 %	55 %	4.200000	38.97 %
12. *H.* Sarkoom lymphklieren. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	100 %	5.120000	4.27 %	98 %		2.12 %

Vervolg.

	Vóór ijzergebruik.			*Na* ijzergebruik.		
	Haemogl. gehalte.	Roode bloedlich.	Zuurstof-verbruik.	Haemogl. gehalte.	Roode bloedlich.	Zuurstof-verbruik.
13. *de B.* Koud absces. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	85 %	4.900000	geen	85 %	4.780000	7.63 %
14. *B.* Otitis chronica. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	100 %	5.170000	geen	95 %	5.000000	geen
15. *v. Z.* Pernic. anaemie. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	48 %	1.370000	geen	45 %	1.530000	10.09 %
16. *L.* Carcin. ventriculi. 14 dagen; 2.25 gr. Fe daags	31 %	3.170000	geen	32 %	2.360000	geen
17. *Mej. B.* Anaemie. 19 dagen; 2.25 gr. Fe daags	43 %	3.120000	44 %	60 %	4.400000	geen
18. *Mej. C.* Spondylitis. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	100 %		geen	100 %		geen
19. *W.* Anaemie. 25 dagen; 2.25 gr. Fe daags	50 %	4.400000	geen	62 %	5.040000	52.13 %
20. *Mej. V.* Arteriosclerose. 21 dagen; 300 mgr. Fe daags	95 %		4.21 %	95 %		geen
21. *Mej. G.* Apoplexie. 21 dagen; 2.25 gr. Fe daags	95 %		geen	100 %		22.25 %
22. *Mej. V.* Diabetes. 21 dagen; 1.5 gr. Fe daags.	88 %	4.530000	21.31 %			23.82 %
23. *Mej. E.* Anaemie. 23 dagen; 2.25 gr. Fe daags	54 %	4.400000	11.7 %	88 %	4.250000	27.25 %

Uit dit onderzoek mag dus voorloopig met waarschijnlijkheid worden afgeleid, dat de toediening van groote doses ijzer aan anae-

mische patienten een prikkel uitoefent op de bloedbereidende organen zoodanig, dat deze jonge roode bloedcellen in grooten getale aan het periphere bloed gaan afleveren.

Het ligt voor de hand het zuurstofverbruik der roode bloedlichaampjes te vergelijken met de glycolyse. Dit proces, dat door Lépine werd ontdekt, heeft tot vele onderzoekingen aanleiding gegeven. Velen hebben de juistheid van Lépine's mededeelingen daaromtrent in twijfel getrokken of het belang daarvan ontkend, zoodat men zich er jaren lang niet mede heeft bezig gehouden. Eerst sinds korten tijd begint de glycolyse weder meer de aandacht te trekken.

Wij wenschten te weten of de glycolyse, waaronder men verstaat het spontaan verdwijnen van de glucose uit het bloed, in een of ander verband staat met de inwendige ademhaling der roode bloedlichaampjes, een onderzoek, dat in mijn Laboratorium door Dr. van Steenis werd ondernomen. Het is ons in de eerste plaats gebleken, dat in strijd met de gangbare meening, de roode bloedlichaampjes van den mensch zeker vermogen tot glycolyse bezitten. Vervolgens hebben wij nagegaan of de aanwezigheid van zuurstof een belangrijken invloed op dit proces uitoefent. Wij hebben daartoe twee seriën van proeven met elkander vergeleken. In de eene serie was de vloeistof van de lucht afgesloten. In de andere serie lieten wij zuurstof door de vloeistof heen borrelen. Verschillen werden op deze wijze niet aangetroffen. Eindelijk hebben wij de glycolyse van vogelbloed en menschenbloed met elkander vergeleken. Bestond er verband tusschen glycolyse en zuurstofverbruik der roode bloedlichaampjes, dan zou men in vogelbloed sterkere glycolyse mogen verwachten dan in menschenbloed: omdat immers de inwendige ademhaling in het eerst genoemde aanzienlijker is dan in het laatste. Een dergelijk verschil werd door ons niet gevonden en wij meenen hieruit te mogen besluiten, dat de beide processen niet in een eenvoudig verband met elkander staan.

Anatomie. — JOHN I. HUNTER: „*The forebrain of Apteryx australis*". (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. U. ARIËNS KAPPERS).

Natuurkunde. — G. BREIT en H. KAMERLINGH ONNES: „*Measurement of magnetic Permeabilities of Chronium chloride and Gadolinium sulphate at liquid hydrogen in alternating fields of frequency* 369.000 *per second*"

Histologie. — E. WINKLER-JUNIUS en J. A. LATUMETEN: „*The histopathology of Lyssa in respect to the propagation of the lyssavirus*". (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en L. BOLK).

(Deze mededeelingen zullen worden opgenomen in de „Proceedings" Vol. XXVI).

Voor de boekerij der Akademie wordt ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer F. A. F. C. WENT, namens den Heer D. S. FERNANDES, een ex. van diens dissertatie „*Aerobe und anaerobe Atmung bei Keimlingen von Pisum sativum*";

2. door den Heer H. A. BROUWER: een ex. van zijn publicaties

a. „2[de] *Nederlandsche Timor-expeditie* 1916 *onder leiding van* Dr. H. G. JONKER †, *uitgegeven door* Dr. H. A. BROUWER", I. Tekst met atlas. (Uit Jaarboek v. h. Mijnwezen 1921, II);

b. „*Geologische onderzoekingen in den oostelijken Oost-Indischen Archipel*, II.

De vergadering wordt gesloten.

REGISTER.